Magistère et Licence de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°1 Septembre 2009

Rappels Divers

---

1 Exercice: Convergence d'intégrales

1. Etudier la convergence des intégrales suivantes:

   - $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ $(a \in \mathbb{R})$.
   - $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ $(a \in \mathbb{C})$.

2. Rappeler les règles de comparaison (par équivalence ou prédominance) permettant de déduire la convergence ou la divergence de $\int_{x_0} f(x)dx$ si l'on a des informations sur la convergence ou la divergence de $\int_{x_0} g(x)dx$.

3. Etudier la convergence des intégrales suivantes:

   - $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{xLn(x)}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xLn^2(x)}dx$.
   - $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ $(a \in \mathbb{R})$.
   - $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^a}dx$ $(a \in \mathbb{R})$.
   - $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(1+x^b)}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

4. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ prenant des valeurs complexes. Quelle inégalité existe-t-il entre $|\int_a^b f(x)dx|$ et $\int_a^b |f(x)|dx$?

2 Exercice: Convergence d'intégrales

Cet exercice concerne les notions d'intégrale absolument convergente et semi-convergente.

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ prenant des valeurs complexes.

1. Si $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A |f(x)|dx$ est finie, que peut-on dire de $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx$? Quel nom donne-t-on à ce type d'intégrale?

2. Si $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A |f(x)|dx = +\infty$, a-t-on une information sur $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx$? Quel nom donne-t-on à ce type d'intégrale (lorsque la limite est finie)?

3. Exemple type d'intégrale semi-convergente $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$:

   (a) Montrer que : $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$ (limite finie)

   (b) Montrer que : $\int_0^A \frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \int_0^A \frac{1-\cos(2x)}{2x}dx$

   (c) En déduire: $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1-\cos(2x)}{2x}dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{|\sin(x)|}{x}dx = +\infty$

3 Exercice: Fonction Gamma

On définit la fonction Γ dans le plan complexe par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \tag{1}$$

où par définition $x^z = e^{z \ln(x)}$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $x > 0$.

1. Montrer que Γ est définie pour $\mathrm{Re}(z) > 0$. (En fait Γ est analytique dans cet ouvert).
2. Montrer que:
$$\forall z, \mathrm{Re}(z) > 0, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$
3. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.
4. On cherche à calculer $\Gamma(1/2)$.
   (a) Montrer que :
   $$\Gamma(1/2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{3}$$
   (b) Montrer que :
   $$\Gamma(1/2)^2 = 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr \tag{4}$$
   (c) En déduire $\Gamma(1/2)$ (et donc aussi l'intégrale de e^{-x^2}).

4 Exercice: Séries Entières

1. Rappeler:
   - La définition d'une série entière
   - La définition du rayon de convergence R d'une série entière
   - La régle de Cauchy permettant d'évaluer R.
   - La régle de D'Alembert permettant d'évaluer R.
2. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour :
   - $a_n = \frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}$
   - $a_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!}$
     Remarque: La fonction $f(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est appelée fonction hypergéométrique et est solution d'une équation différentielle du second ordre intervenant dans beaucoup de problèmes physiques.
   - $a_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$
3. Déterminer les rayons de convergence de la série entière $\sum_n \frac{1}{n!} z^{n!}$.

5 Exercice: changement de variable et jacobien (facultatif)

On considre le changement de variable associé aux coordonnées polaires dans le plan:

$$x = \rho\cos(\theta) \text{ et } y = \rho\sin(\theta)$$

avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ (le changement est bijectif excepté pour $\rho = 0$).

1. Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial\rho}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$.
2. En déduire le systme inverse, à savoir les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial\rho}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$.
3. Calculer le jacobien $J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}$. En déduire l'élément de surface $ds = dxdy$ en polaires.

6 Exercice: Série asymptotique (facultatif)

Nous étudions la fonction “exponentielle intégrale” définie pour $x > 0$ par :

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Nous allons obtenir deux représentations de cette fonction sous forme de série, fournissant de bonnes approximations de la fonction soit dans la limite $x \to 0$, soit pour $x \to \infty$.

1. **Développement pour $x \to 0$.**
   Montrer que
   $$\mathrm{Ei}(x) = -\ln x + \mathrm{cste} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n.n!}$$
   Indication : dériver $\mathrm{Ei}(x)$.
2. Discuter le rayon de convergence de la série.
3. **Développement pour $x \to \infty$.**

   Montrer que la fonction Ei peut être développée comme :
   $$\mathrm{Ei}(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right) e^{-x} + R_n(x)$$
   avec $R_n(x) = (-1)^{n+1}(n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt$.
   Indication : intégrer par partie l'intégrale.
4. Vérifier que $R_n(x) = o(\frac{1}{x^{n+1}})$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Etudier le rayon de convergence de cette série. Commenter.