Magistère et Licence de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°2 Septembre-Octobre 2009

Fonctions Analytiques

---

1 Exercice: Conditions de Cauchy-Riemann

On pose $z = x + iy$.

1. Soit $f(x,y) \equiv f(z,\bar{z}) = x^2 + y^2 + ixy$.
   f vérifie-t-elle les conditions de Cauchy Riemann ? Retrouver le résultat précédent en exprimant $f(z,\bar{z})$ à l'aide de z et $\bar{z}$.

2. Soit $P(x,y) = x^2 + y^2$. Peut-on déterminer $Q(x,y)$ de telle sorte que $f = P + iQ$ soit analytique dans un ouvert de $\mathbb{C}$.

3. Si l'on prend dans le plan non plus les coordonnées cartésiennes (x,y), mais les coordonnées polaires (r,θ), comment se réécrivent les conditions de Cauchy ?

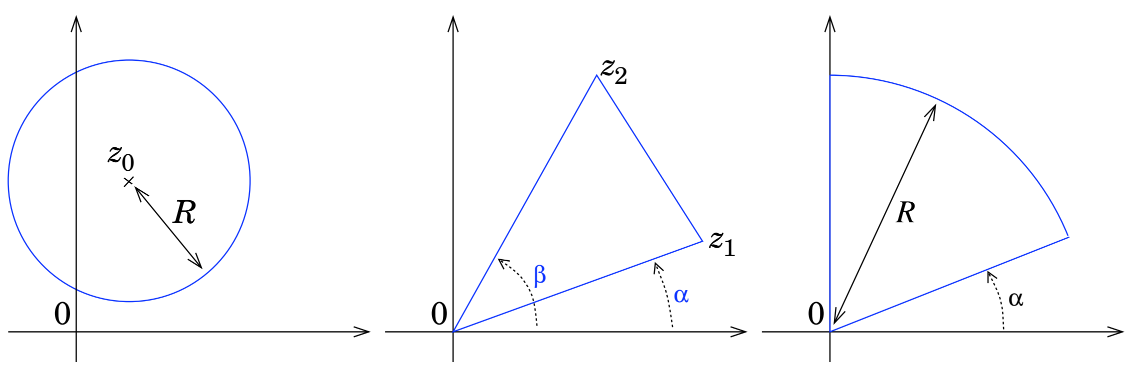
4. On définit pour tout $z \neq 0$ la fonction f par $f(z,\bar{z}) = \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}(z)$ où $\mathrm{Arg}(z)$ représente l'angle utilisé dans les coordonnées polaires selon la convention standard $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$. En utilisant la question précédente, montrer que f est analytique dans l'ouvert $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ (donc on note $f(z)$). Déterminer les fonctions g et h définies par $g(z) = \exp(f(z))$ et $h(z) = f'(z)$.

5. Soit $f = P + iQ$ une fonction analytique dans un ouvert U simplement connexe de $\mathbb{C}$. En utilisant les conditions de Cauchy, montrer que si $|f(z)|$ est constant dans U, alors f est aussi constante.

6. Démontrer que si $f = P + iQ$ est une fonction entière (analytique dans la totalité de $\mathbb{C}$), alors les faisceaux de courbes $P(x,y) = cst$ et $Q(x,y) = cst$ se coupent orthogonalement.

2 Exercice: Paramétrage de chemins dans le plan complexe

1. Trouver *un* paramétrage $t \in [t_1, t_2] \to z(t) \in \mathbb{C}$ pour les chemins fermés Γ suivants supposés orientés dans le sens positif:



2. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, pour les trois contours Γ précédents, exprimer les intégrales $\int_\Gamma f(z)dz$ sous la forme d'intégrales sur un (ou plusieurs) intervalle réel ($\int_{t_1}^{t_2} dt...$).

3 Exercice: Application du Théorème de Cauchy

On cherche à calculer l'intégrale I_a suivante:

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2iax} dx \tag{1}$$

où a désigne un paramètre réel positif.

1. Montrer tout d'abord que l'on peut écrire I_a sous la forme:

$$I_a = e^{-a^2} J_a \text{ , avec } J_a = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx \tag{2}$$

2. Montrer que J_a peut se réécrire comme l'intégrale de la fonction analytique $f(z) = e^{-z^2}$ sur la droite $D_a = \{z/z = t + ia, t \in \mathbb{R}\}$.

3. On veut montrer que $\int_{D_a} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)dz$. Pour cela appliquer le théorème de Cauchy au rectangle $ABCD$ de sommets $\{(-R, 0), (R, 0), (R, a), (-R, a)\}$. En déduire la valeur de J_a puis de I_a.

4 Exercice: Application du Théorème de Cauchy

On cherche à calculer l'intégrale I_a suivante:

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{iax^2} dx \tag{3}$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif.

Nous allons calculer I_a en utilisant le théorème de Cauchy sur un chemin fermé en forme de quart de demi-cercle OAB où O est l'origine, OA un segment de l'axe des abscisses (coté positif) de longueur R et AB un arc de cercle de rayon R.

1. Montrer que $\lim_{R\to\infty} \int_{AB} e^{iaz^2} dz = 0$. On pourra utiliser la majoration $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ pour $x \in [0, \pi/2]$ en cours de calcul.

2. En déduire I_a.

5 Exercice: Prolongement Analytique

Soit la série entière :

$$f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha z^n \tag{4}$$

où α est un nombre réel.

1. Trouver le rayon de convergence R de la série.
2. Dans les cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, calculer explicitement $f(z)$ pour $|z| < R$.
   Peut-on donner un sens à l'expression obtenue pour $|z| \geq R$? Comment nomme-t-on cette propriété?.
   Si l'on appelle $\tilde{f}$ la fonction prolongée par l'expression précédente, quelles sont les singularités de $\tilde{f}$?
   Conclure sur le rapport qu'il y a entre le rayon de convergence de f et la position des singularités de la fonction prolongée $\tilde{f}$.

6 Exercice: Développement de Laurent.

1. Donner le développement de Laurent dans $\mathbb{C} - \{0\}$ de la fonction analytique $f(z) = e^z/z^2$.
2. Soit la fonction
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3} \tag{5}$$
   (a) Donner le développement de Laurent de f dans le disque pointé centré en $z = 1$ et de rayon $\rho = 2$.
   (b) Donner les développements de Laurent dans les régions de "type" couronne $|z| < 1$; $1 < |z| < 3$; $|z| > 3$.

7 Exercice: Singularités, Résidus.

1. Préciser la position et la nature des singularités des fonctions analytiques suivantes; calculer les résidus correspondants:

   (a)
$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}, \frac{z}{1+z^4} \tag{6}$$
   (b)
$$f(z) = \frac{1}{(1+z+z^2)^2}, \frac{z-a}{(1+z+z^2)^2} \text{ avec } a \text{ complexe} \tag{7}$$
   (c)
$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)}, \frac{z}{sh(z)} \tag{8}$$
   (d)
$$f(z) = e^{1/z} \tag{9}$$

8 Exercice : Paramétrages de contours, calculs d'intégrales

Motivation : On rappelle que l'intégration d'une fonction analytique $f(z)$ le long d'un contour Γ du plan complexe est ramenée à l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle en paramétrant le contour Γ. Il s'agit en pratique de trouver une fonction $t \to z(t) \in \Gamma$ de $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
On calcule l'intégrale en utilisant : $\int_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\, f(z(t))$.

1. Calculer $\int_\Gamma \mathrm{d}z\, z^2$ où Γ est l'arc de parabole $x = y^2$ avec $y \in [0, y_0]$.
2. Si Γ désigne un cercle de centre z_0 et de rayon R parcouru dans le sens positif, calculer directement (paramétrage puis calcul) l' intégrale $\int_\Gamma dz/(z - z_0)$.
3. Soit l'intégrale
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + 2i\cos t}{(\cos t + 2i\sin t)^2} dt$$
Calculer I directement.
Trouver un chemin Γ et une fonction holomorphe f permettant d'écrire I sous la forme $I = \int_\Gamma f(z)dz$.
4. Soit l'intégrale
$$J = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + 2i\cos t}{\cos t + 2i\sin t} dt$$
Trouver un chemin Γ et une fonction holomorphe f permettant d'écrire J sous la forme $J = \int_\Gamma f(z)dz$.
En déduire la valeur de J.

9 Application du Théorème des Résidus: Fonctions Rationnelles

1. On veut calculer l'intégrale I suivante de deux manières:
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} \tag{10}$$
   (a) En utilisant une intégration conventionnelle, calculer I.
   (b) On veut utiliser le théorème des résidus pour effectuer le même calcul. On introduit pour cela la fonction $f(z) = 1/(1 + z^2)$.
      i. Quelles sont les singularités de f, leur nature et les résidus correspondants.
      ii. Définir une courbe de Jordan permettant, après utilisation du lemme de Jordan du grand cercle, de calculer I.
      iii. Vérifier que l'on obtient la même valeur de I.
2. On veut calculer l'intégrale I suivante:
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ avec } f(x) = \frac{1}{1 + x^4} \tag{11}$$
   (a) Vérifier que I existe.
   (b) Quelles sont les singularités dans le plan complexe de $f(z)$, leur nature, et les résidus correspondants.
   (c) Définir une courbe de Jordan permettant, après utilisation du lemme de Jordan du grand cercle, l'évaluation de I.
   (d) Calculer I.

(e) Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un contour ne faisant intervenir qu'un seul pôle.

3. Généraliser la méthode de la question précédente pour évaluer l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \text{ avec } n \text{ entier, } n \geq 2 \tag{12}$$

10 Application du Théorème des Résidus: Fonctions Rationnelles en sin et cos sur $[0, 2\pi]$

On veut calculer l'intégrale I suivante par la méthode des résidus:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - 2a\cos(\phi) + a^2} \tag{13}$$

où a est un nombre réel, $|a| \neq 1$.
Pour ce faire, transformer l'intégrale précédente en une intégrale sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Puis compléter le calcul.

11 Applications du Théorème des Résidus: Fonctions rationnelles et exponentielles

1. On considère la fonction g du paramètre réel k définie par:

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx \tag{14}$$

On veut obtenir une expression explicite de $g(k)$, et pour cela on va appliquer le théorème des résidus à l'intégrale précédente, en considérant la fonction analytique $f_k(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2}$.

(a) Quels sont les pôles de $f_k(z)$, leur nature et les résidus correspondants.

(b) Peut-on définir un contour de Jordan indépendant de k qui permette d'évaluer $g(k)$? Sinon, quels contours doit-on prendre en fonction de k?

(c) En déduire une expression explicite de $g(k)$.

2. On veut évaluer l'intégrale I suivante:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \tag{15}$$

(a) De quel type d'intégrale s'agit-il ?

(b) Peut-on directement utiliser le théorème des résidus en considérant la fonction $f(z) = \sin(z)/z$? Pourquoi ?

(c) Pourquoi est-il vrai que $I = \mathrm{Im}(J)$ avec:

$$J = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \tag{16}$$

Mais que l'on ne peut pas écrire directement:

$$I = \mathrm{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \tag{17}$$

(d) Calculer J puis I en considérant une courbe de Jordan formée de deux segments de droites, d'un petit arc de cercle et d'un grand arc de cercle.

12 Exercice: La fonction Log complexe

1. Rappeler la définition de la fonction $\mathrm{Log}(z)$, détermination principale. Quel est le domaine d'analyticité de Log? Quelles sont ses singularités? Quelle est la dérivée de Log?

2. Les relations $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$ et $\mathrm{Log}(e^z) = z$ sont-elles toujours vraies?

3. On appelle détermination de Log toute fonction Log_α solution de l'équation:

$$e^{\mathrm{Log}_\alpha(z)} = z \tag{18}$$

(a) Montrer que la fonction Log_α définie par:

$$\mathrm{Log}_\alpha(z) = \mathrm{Log}(e^{i\alpha} z) - i\alpha \tag{19}$$

(où $\alpha \in]-\pi, \pi]$) est solution du problème.

(b) Quel est le domaine d'analyticité de Log_α ? Que vaut Log'_α ? Que vaut $\mathrm{Log}_\alpha(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ $(\alpha \neq \pm\pi)$?

(c) Trouver la détermination Log_α qui a comme demi-axe de coupure $\mathbb{R}^+$.

4. Comment définit-on la fonction $z \to z^a$ où a est complexe? Quel est son domaine d'analyticité?

5. Les relations $(z_1 z_2)^a = z_1^a z_2^a$ et $(z^a)^b = z^{ab}$ sont-elles toujours vraies?

13 Applications du Théorème des Résidus: Fonctions Log et puissance

1. On veut calculer l'intégrale I:

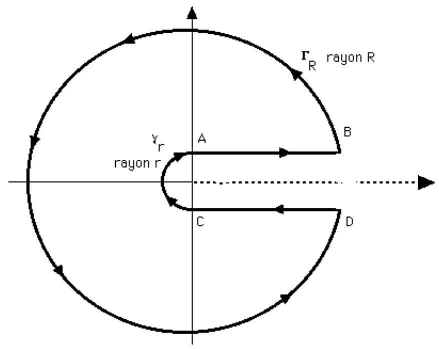
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1+x)} \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \tag{20}$$

(a) Montrer que I existe.

(b) Montrer que lorsque l'on prend $z = x + iy$ avec $x > 0$ on a:

$$\begin{array}{l} y \to 0^+ \ , \ \mathrm{Log}(-z) \to \ln(x) - i\pi \\ y \to 0^- \ , \ \mathrm{Log}(-z) \to \ln(x) + i\pi \end{array} \tag{21}$$

(c) Montrer que l'on peut calculer I en intégrant la fonction : $f(z) = \frac{(-z)^{-\alpha}}{1+z}$ sur le contour suivant:



2. On veut calculer l'intégrale I:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2 + x^2} dx \text{ avec } a > 0 \tag{22}$$

Montrer que l'on peut obtenir I en intégrant la fonction $f(z) = \frac{\mathrm{Log}(-z)}{z^2+a^2}$ sur le contour suivant: