Magistère et Licence de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°3 Octobre 2007

Intégrale de Lebesgue

Questions de définitions

1 Exercice

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

1. f et $|f|$ sont-elles intégrables sur $[0, 1]$ au sens de Riemann? sont-elles sommables au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$? Dans ce cas quelle différence y a-t-il entre les intégrales de Riemann et Lebesgue?

2. Rappeler:

   - la définition de l'intégrale généralisée de f au sens de Riemann (vue en TD) sur $[0, +\infty[$.
   - la définition de la sommabilité de f au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$.

3. Y a-t-il une différence entre dire que l'intégrale de Riemann sur $[0, +\infty[$ de f est absolument convergente et dire que f est sommable sur $[0, +\infty[$ au sens de Lebesgue?

4. Supposons que l'intégrale généralisée de Riemann sur $[0, +\infty[$ de f existe. La fonction f est-elle pour autant sommable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$?

5. Que peut-on dire de la sommabilité de $\sin(x)/x$ sur $[0, +\infty[$? Que peut-on dire de $\lim_{A\to\infty} \int_{[0,A]} dx \sin(x)/x$ (où l'intégrale est à la fois celle de Riemann et de Lebesgue)?

Applications des théorèmes de convergence de Lebesgue

2 Exercice (théorème de convergence dominée)

Cet exercice a pour but de montrer l'utilisation du théorème de convergence dominée.

1. Rappeler le théorème.

2. Examiner la possiblité d'appliquer le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ suivantes:

   (a) $f_n(x) = e^{-nx}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f_n(x) = 0$ ailleurs.

   (b) $f_n(x) = x^n$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f_n(x) = 0$ ailleurs.

   (c) $f_n(x) = \left(\frac{\sin(nx)}{nx}\right)^2 e^{-x}$ pour $x \geq 0$ et $f_n(x) = 0$ ailleurs.

3 Exercice (théorème de convergence dominée)

On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in N}$ définies sur $\mathbf{R}^+$ par:

$$\begin{cases} \forall x \in [0, \sqrt{n}],\ f_n(x) = \left(\cos \frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right)^n \\ \forall x > \sqrt{n},\ f_n(x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que:

$$\forall x \geq 0,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-\frac{\pi^2 x^2}{8}} \tag{2}$$

2. Montrer successivement les deux inégalités suivantes:

$$\forall u > 0,\ \ln(u) \leq u - 1 \tag{3}$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{4} \tag{4}$$

3. A partir de la question précédente, déduire un majorant $\varphi(x)$ de $|f_n(x)|$ sur $\mathbf{R}^+$.
4. Trouver la valeur de $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx$.
5. Déduire de ce qui précède l'équivalence suivante lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\int_0^1 dx \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \tag{5}$$

4 Exercice (théorème de Beppo-Levi)

Montrer que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{6}$$

On utilisera un développement en série de l'intégrand et on appliquera le théorème de Beppo-Levi.
Remarque: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5 Exercice (Continuité et dérivation sous le signe $\int$)

Soit f une fonction (Lebesgue-) sommable sur $[0, +\infty[$, et soit g la fonction d'une variable réelle définie par:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{x+t} dt \tag{7}$$

1. Montrer que g est définie sur $]0, +\infty[$.
2. g est-elle continue sur $]0, +\infty[$?
3. g est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?
4. g admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, quelle est sa valeur?