Magistère et Licence de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°4 Novembre 2007

Transformation de Fourier

On note la transformée de Fourier de f par $\mathcal{F}(f)$ ou bien $\hat{f}(k)$ avec

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x). \tag{1}$$

La cotransformation de Fourier (ou la transformation inverse) est notée par $\bar{\mathcal{F}}(f)$.

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} f(x). \tag{2}$$

1 Exercice

Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes:

$$1_{[-1,1]}, \qquad e^{-|x|}, \qquad \tfrac{1}{1+x^2}.$$

2 Exercice

1. Soit f continue de classe C^1 par morceaux, f et f' dans L^1, on suppose de plus que f s'annule á l'infini. Trouver $\mathcal{F}(f')$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$.
2. Soit f une fonction de L^1 telle que $x \to xf(x)$ appartienne à L^1, quelle relation relie $\mathcal{F}(f)$ à $\mathcal{F}(xf)$? Démonstration ?

3 Exercice

Soit $f(x) = e^{-x^2}$. On cherche à calculer $\hat{f}(k)$.

1. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f.
2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\hat{f}(k)$.
3. Intégrer cette équation pour obtenir $\hat{f}(k)$ à une constante près.
4. Déterminer la constante d'intégration et en déduire l'expression complète de $\hat{f}(k)$.

4 Exercice

1. Pour quelles fonctions de l'exercice 2 peut-on appliquer le théorème d'inversion ?
2. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions à décroissance rapide (fonctions de Schwartz).
   Donner les expressions reliant $\mathcal{F}(f')$, $\mathcal{F}(xf)$, à $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(f)'$ pour $f \in \mathcal{S}$.
   Quel est l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{S})$?

5 Exercice

1. Soit $f(x)$ une fonction de L^1 nulle pour $x < 0$. Montrer que $\hat{f}(k)$ est la restriction à la droite réelle d'une fonction analytique dans le demi-plan $y < 0$.

2. Soit $f(x)$ une fonction de L^1 nulle hors de l'intervalle $[-a, a]$. Montrer que $\hat{f}(k)$ est la restriction à la droite réelle d'une fonction entière $\hat{f}(z)$ qui vérifie $|\hat{f}(z)| \leq (2\pi)^{-1/2}||f||_{L^1}\ e^{a|y|}$.

6 Exercice

1. Le but de cet exercice est de trouver les fonctions propres et valeurs propres de l'operateur $\mathcal{F}$ dans l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions à décroissance rapide; c'est à dire résoudre $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) = \lambda f$.
   On définit les deux operateurs linéaires A_- et A_+ sur $\mathcal{S}$ par :

$$\forall f \in S,\ A_-(f)(x) = f'(x) + xf(x) \text{ et } A_+(f)(x) = -f'(x) + xf(x) \tag{3}$$

2. Montrer que:

$$\forall f \in S,\ \widehat{A_-(f)} = \alpha A_-(\widehat{f}) \text{ et } \widehat{A_+(f)} = \beta A_+(\widehat{f}) \tag{4}$$

   où α et β sont deux constantes que l'on précisera.
   En déduire la valeur du commutateur $[\mathcal{F}, A_+A_-]$ sur $\mathcal{S}$.

3. On appelle ϕ_0 la fonction de $\mathcal{S}$ solution de l'équation $A_-(f) = 0$, normalisée par la condition $\int |f(x)|^2\, dx = 1$.
   Expliciter ϕ_0.
   On rappelle que $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

4. Quelle équation différentielle vérifie $\widehat{\phi_0}$? En déduire $\widehat{\phi_0}$. Quelle relation existe-t-il entre $\widehat{\phi_0}$ et ϕ_0 ?

5. On définit les fonctions ϕ_n dans $\mathcal{S}$ par:

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} A_+^n(\phi_0) \tag{5}$$

   Montrer que les ϕ_n vérifient $\widehat{\phi_n} = \lambda_n \phi_n$ pour certaines valeurs λ_n que l'on précisera.

7 Exercice

Soit $R_a(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$.

1. Calculer directement $R_a * R_b$.

2. Calculer, à l'aide de la transformée de Fourier, $R_a * R_b$.

3. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $f * f * \ldots * f$ (n fois).

8 Exercice

On note $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2$.

1. Exprimer pour $d = 3$ la transformée de Fourier d'une fonction radiale (qui ne dépend que de r) sous la forme d'une intégrale simple. En déduire la transformée de Fourier de e^{-ar} et de e^{-ar}/r, où a est un réel positif.

2. Trouver pour tout d la transformée de fourier de e^{-r^2}.

9 Exercice

On considère l'équation de la diffusion

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n, \tag{6}$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

On cherche la solution dans $\mathcal{S}(R^3)$ telle que n à $t = 0$ soit donnée par $n_0(x_1, x_2, x_3)$.

1. Soit $\tilde{n}(t, k_1, k_2, k_3)$ la transformée de Fourier par rapport aux variables spatiales. Trouver l'équation satisfaite par $\tilde{n}$.

2. Montrer alors que la solution n_t s'écrit comme

$$n_t = n_0 * g_t, \tag{7}$$

   où g_t est une fonction qu'on explicitera.

3. Trouver n_t si $n_0 = e^{-r^2}$.