Magistère et L3 de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°5 Novembre 2007

Divers: Fubini et Convolutions

---

1 Application de Fubini à un calcul d'intégrale

1. Rappeler le théorème de Fubini.

   On définit l'intégrale $J(a,b)$ avec $b > a > 0$ par:

$$J(a,b) = \int_{(x,y)\in[0,+\infty[\times[a,b]} dxdy \sin(x) e^{-xy} \tag{1}$$

2. Montrer que cette intégrale double existe (la fonction est sommable).
3. En appliquant le théorème de Fubini, calculer explicitement $J(a,b)$ et montrer que l'on peut écrire:

$$J(a,b) = F(a) - F(b) \text{ avec } F(s) = \int_0^{+\infty} dx \frac{\sin(x)}{x} e^{-sx},\ (s > 0) \tag{2}$$

4. Calculer $\lim_{s\to+\infty} F(s)$
5. En admettant que $\lim_{s\to 0^+} F(s) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ (intégrale semi-convergente de Riemann), calculer cette dernière intégrale.

2 Produit de Convolution et fonction d'appareil

Supposons que l'on enregistre un signal d'interférence optique de type sinusoïdal $s(x) = s_0 \sin(2\pi x/\lambda)$ avec un appareil qui intègre en fait le signal sur une largeur δ (par exemple un détecteur avec une fente d'entrée de largeur δ). On définit alors la "fonction d'appareil" du détecteur F par:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{\delta} \text{ pour } -\frac{\delta}{2} \leq x \leq \frac{\delta}{2} \\ F(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{3}$$

Le signal enregistré $S(x)$ est alors donné par la convolution de F par s, soit $S = F * s$. Calculer $S(x)$. Interprétation ?

3 Produit de Convolution et Régularisation de fonctions

Soit f une fonction sommable et bornée sur $\mathbf{R}$ (mais f n'est pas forcément continue par morceaux ou à fortiori dérivable). On définit la gaussienne normalisée $g_s(t)$ par:

$$g_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-t^2/(2s^2)} \tag{4}$$

où s est un paramètre réel strictement positif.
On définit les fonctions h_s par $h_s = g_s * f$.

1. Montrer que h_s est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Exprimer la transformée de Fourier $\hat{h_s}$ en fonction de $\hat{f}$. (On utilisera la transformée de Fourier d'une gaussienne vue au td précédent). En déduire que

$$\forall k \in \mathbf{R},\ \lim_{s\to 0} \hat{h_s}(k) = \hat{f}(k) \tag{5}$$

   L'interprétation de ce résultat est que la convolution introduit un "filtrage" des hautes fréquences de la fonction f et ce "filtrage" est réglable par le paramètre s.
   Nous allons regarder l'effet de ce filtrage directement sur la fonction h_s. (h_s est ce que l'on appelle une régularisation de f, c'est à dire une approximation de f ayant des propriétés de régularité).
3. Montrer l'inégalité $e^{-(x-t)^2} \leq e^{-x^2-t^2+2|x||t|} \leq e^{-t^2+2|x||t|}$.
   En déduire que l'on peut trouver une constante C telle que $\forall x \in]a,b[$ et $\forall t$, $e^{-(x-t)^2} \leq e^{-t^2+2C|t|}$.
4. En utilisant la question précédente, montrer que h_s est continue sur $\mathbf{R}$ (alors que f n'est pas du tout supposée continue (en aucun point)).
5. Par une inégalité analogue à celle de la question 2, montrer que h_s est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $h'_s = g'_s * f$.
6. Montrer que h_s est en fait C^∞ et que l'on a:

$$h_s^{(n)} = g_s^{(n)} * f \tag{6}$$

7. Enfin si l'on ajoute maintenant l'hypothèse que f est continue (mais f n'est toujours pas supposée dérivable), montrer que l'on a en plus des relations précédentes:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \lim_{s\to 0} h_s(x) = f(x) \tag{7}$$

La philosophie de cet exemple est que la convolution est une méthode pour "lisser" les irrégularités d'une fonction; et le paramètre s de l'exercice définit l'échelle en x sur laquelle ce lissage est effectué. Par ailleurs "lissage" et "filtrage des hautes fréquences" sont deux manières de parler de la même chose.

Remarque 1 :
On peut montrer que $\lim_{s\to 0} ||h_s - f||_1 = 0$ où $||.||_1$ est la norme de L^1. Cela permet de montrer que les fonctions C^∞ sont denses dans L^1.

Remarque 2 :
Les appareils de mesure introduisent toujours des imprécisions dans la mesure des signaux physiques, et la relation liant le signal mesuré au signal réel s'exprime souvent par une convolution: mesure= fct*signal vrai. La fonction "fct" est la fonction d'appareil et on peut assez souvent prendre une gaussienne pour "fct". Le paramètre s est alors la "résolution" de l'appareil de mesure.

Remarque 3 :
Le filtrage des hautes fréquences est une méthode classique de compactage de données. Dans un certain nombre de cas concrets (sons, images) les très hautes fréquences d'un signal ne constituent pas une information pertinente, on peut donc sans perte notable d'information "couper les hautes fréquences" et donc diminuer l'espace occupé par les données. Cela constitue également la base de tous les processus de numérisation de données analogiques (échantillonage).