L3 et Magistère de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°6 Novembre 2007

Distributions: Généralités

---

1 Généralités

1. Rappeler les définitions des ensembles de fonctions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$. Quelle relation d'inclusion vérifie ces deux ensembles?
2. Donner un exemple de fonction de $\mathcal{D}$ et un exemple de fonction de $\mathcal{S}$.
3. Rappeler les définitions des ensembles de distributions $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}'$. Quelle relation d'inclusion vérifie ces deux ensembles?
4. Qu'est ce qu'une distribution dite:
   (a) régulière
   (b) singulière
   (c) tempérée
   (d) Donner des exemples pour chacune des catégories précédentes.
5. Donner des exemples de distributions :
   (a) régulières et tempérées
   (b) régulières et non tempérées

2 Quelques définitions au sens des distributions

1. Soit $\alpha(x)$ une fonction C^∞ et T une distribution (de $\mathcal{D}'$).
   (a) Quelle est la définition de la distribution notée αT ?
   (b) Exemple : Posons $\alpha(x) = x$. Que vaut $\alpha\delta$ où δ est la distibution de Dirac?
2. T étant une distribution (de $\mathcal{D}'$), comment définit-on:
   (a) la translatée $\tau_a T$? (pour une fonction f , $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$).
   Exemple: $\tau_a(\delta) =$?
   (b) la dilatée $\xi_s T$ avec $s > 0$? (pour une fonction f , $(\xi_s f)(x) = f(x/s)$).
   Exemple $\xi_s(\delta) =$?
   (c) la dérivée de T ?
   Question: Toute distribution est-elle dérivable ? Si oui, cela ne vous semble-t-il pas étrange ?
   Exemple 1: soit la fonction $f(x) = |x|$ Cette fonction f est-elle dérivable partout ? Soit T_f, notée aussi $[f]$ la distribution régulière associée à f. Quelle est la dérivée de T_f?
   Exemple 2: soit la fonction $\theta(x)$ définie par: $\theta(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\theta(x) = 0$ si $x < 0$.
   Cette fonction est-elle dérivable partout ? Calculer la dérivée de la distribution régulière T_θ (notée aussi $[\theta]$).

(d) L'operateur parité $\mathcal{P}$ appliqué à une distribution T ? (pour une fonction f, $\mathcal{P}(f)(x) = f(-x)$). En déduire la définition d'une distribution paire et impaire. Exemple: quelle est la parité de δ ? Celle de δ' ?

3. Autre Exemple :

   (a) Soit $\alpha(x)$ une fonction C^∞ et T une distribution de $\mathcal{D}'$, montrer que $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$?

   (b) Généralisation: que vaut $(\alpha T)^{(n)}$?

3 Quelques propriétés des fonctions de $\mathcal{D}$

Ces propriétés seront utilisées dans le TD suivant.

Question préliminaire:

Expliciter une fonction Φ de $\mathcal{D}$ positive et ayant pour support l'intervalle $[-1, 1]$.

3.1 Première propriété

1. Trouver une fonction φ_0 de $\mathcal{D}$ vérifiant $\varphi_0(0) = 1$ et ayant pour support l'intervalle $[-1, 1]$.

2. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}$ donnée. Montrer que la fonction ψ définie par:

$$\forall x \neq 0, \psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\varphi_0(x)}{x} \tag{1}$$

   est non seulement C^∞ sur $\Re^*$, mais également sur $\Re$ par prolongement. Montrer de plus que $\psi \in \mathcal{D}$.
   Indication :
   On montrera que : $\forall x \neq 0$, $\psi(x) = \int_0^1 dt\ (\varphi'(xt) - \varphi(0)\varphi_0'(xt))$.

3. En déduire que pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$, on peut trouver $\psi \in \mathcal{D}$ telle que:

$$\varphi(x) = x\psi(x) + \varphi(0)\varphi_0(x). \tag{2}$$

3.2 Deuxième propriété

1. Trouver une fonction φ_1 de $\mathcal{D}$ ayant pour support l'intervalle $[-1, 1]$ et vérifiant $\varphi_1(x) \geq 0$ et $\int_{\mathbf{R}} \varphi_1(x)dx = 1$.

2. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}$ donnée. Montrer que la fonction ψ définie par:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} [\varphi(t) - K\varphi_1(t)]\, dt \tag{3}$$

   est une fonction de $\mathcal{D}$ pour une valeur particulière de la constante K.

3. En déduire que pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$, on peut trouver $\psi \in \mathcal{D}$ telle que:

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \varphi_1(x) \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)dt. \tag{4}$$