L3 et Magistère de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°7 Décembre 2007

Distributions:
Distribution de Dirac, Fonction de Heaviside et Valeur Principale; Convergence au sens des distributions

---

1 Distribution de Dirac

1. Rappeler la définition de la distribution de Dirac.
2. Quel est son support ?
3. Quelle est sa dérivée d'ordre n, notée $\delta^{(n)}$?
4. En quoi la notation $< \delta, \varphi >= \int dx \delta(x)\varphi(x)$ est-elle trompeuse ?
5. On considère la translatée $\delta_a = \tau_a \delta$ de la distribution de Dirac. Soit α une fonction C^∞, démontrer que $\alpha\delta_a = \alpha(a)\delta_a$.

2 Conséquences

2.1 Equations algébriques

On rappelle que toute fonction φ de $\mathcal{D}$ peut se mettre sous la forme:

$$\varphi(x) = x\psi(x) + \varphi(0)\varphi_0(x)$$

où ψ et φ_0 sont des fonctions de $\mathcal{D}$ avec $\varphi_0(0) = 1$ (voir T.D. précédent).

1. Montrer que l'équation dans $\mathcal{D}'$: $xT = 0$ admet pour seules solutions les distributions T telles que $T = C\delta$ où C est une constante.
2. Montrer que $x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}$.
3. Résoudre dans $\mathcal{D}'$ l'équation $x^n T = 0$.

2.2 Equations différentielles

On rappelle que toute fonction φ de $\mathcal{D}$ peut se mettre sous la forme:

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \varphi_1(x) \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)dt$$

où ψ et φ_1 sont des fonctions de $\mathcal{D}$ avec $\int_{\mathbf{R}} \varphi_1(t)dt = 1$ (voir TD précédent).

1. Montrer que l'équation dans $\mathcal{D}'$: $T' = 0$ admet pour seules solutions les distributions T telles que $T = CT_1$ où T_1 désigne la distribution régulière associée à la fonction constante 1.
2. Résoudre dans $\mathcal{D}'$ l'équation $T^{(n)} = 0$.
3. On s'intéresse à l'équation $xT' = 0$ dans $\mathcal{D}'$.
   (a) Calculer $[\theta]'$ où θ désigne la fonction de Heaviside et $[\theta]$ la distribution associée.
   (b) En déduire les solutions de $xT' = 0$.

3 Convergence aux sens des distributions

On rappelle que toute distribution T est la limite au sens des distributions d'une suite $\{f_n\}$de fonctions localement sommables:

$$\forall T\ \exists \{f_n\} \text{ telle que } T = \lim_{n->\infty}^{(D)} T_{f_n}$$

soit explicitement :

$$\forall T\ \exists \{f_n\} \text{ telle que } \forall \varphi \in \mathcal{D} < T, \varphi >= \lim_{n->\infty} < T_{f_n}, \varphi >.$$

Pour un choix donné de la suite $\{f_n\}$ -choix qui n'est pas unique- on parle de représentation de la distribution T.

On peut également remplacer le paramètre discret n par un paramètre continu réel.

1. Trouver la limite au sens des distributions des suites $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0, avec : $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$ ou $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$.
2. Soit $\{f_n\}$ une représentation d'une distribution T. Les fonctions f_n étant supposées de classe C^1, montrer que la suite $\{f'_n\}$ est une représentation de la distribution dérivée T'.
3. A partir des questions précédentes, trouver une représentation de la distribution δ'.
4. Soit f une fonction de classe C^1 partout sauf en un point x_0 où elle présente une discontinuité de première espèce :$\lim_{\epsilon->0^+} f(x_0+\epsilon) - f(x_0-\epsilon) = \sigma$ (σ fini).
   (a) Rappeler la formule du saut permettant de calculer $[f]'$.
   (b) Après avoir rappelé la définition de la fonction de Heaviside θ, appliquer le résultat précédent à T_θ.
   (c) Soit $[f]$ la distribution régulière associée à la fonction f définie par $f(x) = e^x\theta(x)$, calculer $T = (\frac{d}{dx} - 1)\,[f]$.

4 Valeur Principale

On rappelle que la distribution $vp\frac{1}{x}$ -valeur principale de $1/x$- est définie par :

$$\forall \varphi \in D, < vp\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\epsilon->0^+} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

1. Montrer que : $\forall \varphi \in D, < vp\frac{1}{x}, \varphi >= \int \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x} dx$
2. Quelle est la parité de $vp\frac{1}{x}$?
3. Calculer $x\ vp\frac{1}{x}$.
4. Montrer que $vp\frac{1}{x}$ est la seule distribution impaire satisfaisant l'équation $xT = 1$.
5. Montrer que la fonction $\ln|x|$ est une fonction localement sommable sur $\Re$. On peut donc définir la distribution régulière associée T. Montrer que : $T' = vp\frac{1}{x}$.

6. Rappeler la définition de la détermination principale du logarithme complexe $Ln(z)$ et montrer que : $\lim_{\epsilon->0^+} Ln(x+i\epsilon) = Ln|x| + i\pi\theta(-x)$.
   On admet que:
   $\forall x \neq 0$, $\forall \epsilon, 0 < \epsilon < 1$, $|Ln(x+i\epsilon)| \leq f(x)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}(|Ln(x^2)| + Ln(x^2+1)) + \pi$.
   Le majorant est-il localement sommable ?

   (a) Le majorant précédent est-il localement sommable ?
   (b) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que dans $\mathcal{D}'$:
   $\lim_{\epsilon->0^+} T_{Ln(x+i\epsilon)} = T_{Ln|x|} + i\pi T_{\theta(-x)}$.
   (c) A l'aide des résultats des exercices précédents du T.D. montrer que dans $\mathcal{D}'$:
   $\lim_{\epsilon->0^+} \frac{1}{x+i\epsilon} = vp\frac{1}{x} - i\pi\delta$.