L3 et Magistère de Physique Fondamentale

Mathématiques

T.D. n°8 Décembre 2007

Distributions:
Transformée de Fourier, Convolutions et Fonctions de Green

---

1 Rappels et quelques propriétés

1. Rappeler les définitions des opérations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\dagger$ sur l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'$.
2. Si f est une fonction sommable, quelle relation y a-t-il entre $\mathcal{F}([f])$ (TF de la distribution régulière $[f]$) et $[\mathcal{F}(f)]$ (distribution régulière associée à la TF de f)?
3. Montrer que la distribution $\mathcal{F}\delta_a$ est une distribution régulière dont on précisera la fonction associée.
4. Même question pour $\mathcal{F}^\dagger\delta_a$ et $\mathcal{F}\delta$.
5. Etablir que : $\delta_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left(\left[e^{iax}\right]\right)$
6. On se propose de retrouver ce résultat en utilisant la continuité de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$. Soit f la fonction de $\mathcal{S}$ telle que $f(x) = \exp(-x^2/2)$, on note $F(k)$ la transformée de Fourier de f. On rappelle que $F(k) = f(k)$. On pose par ailleurs $f_\epsilon(x) = f(\epsilon x)e^{iax}$.
   (a) Montrer que $\lim^{(D)}_{\varepsilon->0}[f_\epsilon] = \left[e^{iax}\right]$.
   (b) Exprimer $g_\epsilon = \mathcal{F}f_\epsilon$ en fonction de $F(k)$.
   (c) Quelle est la limite au sens des distributions de la suite $\{[g_\epsilon]\}$?
   (d) Par continuité de la Transformée de Fourier, déduire l'expression de $\mathcal{F}\left(\left[e^{iax}\right]\right)$.

2 Fonction de Heaviside, Fonction Signe et Valeur principale

1. On considère la suite de fonctions $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ définie par $f_\epsilon(x) = \theta(x)e^{-\epsilon x}$ où θ est la fonction de Heaviside.
   (a) Quelle est la limite au sens des distributions de la suite $\{[f_\epsilon]\}_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0?
   (b) Calculer $\mathcal{F}([f_\epsilon])$.
   (c) En utilisant les résultats obtenus à la fin du T.D. précédent, calculer $\lim_{\epsilon->0^+}\mathcal{F}([f_\epsilon])$ et en déduire $\mathcal{F}([\theta])$.
2. On définit la fonction $sgn(x)$ par $sgn(x) = 1$ si $x > 0$; $sgn(x) = -1$ si $x < 0$ et $sgn(0) = 0$. Exprimer sgn à partir de la fonction de Heaviside θ; puis Trouver $\mathcal{F}([sgn])$.
3. Montrer que $\mathcal{F}^\dagger vp\frac{1}{x} = -\mathcal{F}vp\frac{1}{x}$ et trouver explicitement $\mathcal{F}(vp\frac{1}{x})$ à partir de la question précédente.
4. On se propose de retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
   (a) Montrer que dans $\mathcal{S}'$ l'équation $T' = 0$ a pour seules solutions les distributions constantes.
   (b) En utilisant la relation obtenue au T.D. précédent $x\ vp\frac{1}{x} = 1$, ainsi que des considérations de parité, calculer $\mathcal{F}vp\frac{1}{x}$.

3 Produit de Convolution pour les distributions

1. Rappeler la définition du produit de convolution de deux distributions (lorsqu'il existe).

2. Montrer que la distribution de Dirac est un élément neutre pour l'opération $*$.

3. Etablir la relation générale : $T * \delta^{(n)} = \delta^{(n)} * T = T^{(n)}$.

4. L'opération de produit de convolution est-elle toujours associative ?
   Exemple :

   (a) Calculer $([1] * \delta) * \delta'$ et $[1] * (\delta * \delta')$.

   (b) Calculer $([1] * \delta') * [\theta]$ et $[1] * (\delta' * [\theta])$.

4 Produit de convolution et Fonction de Green

Soit U un élément de $\mathcal{D}'$ (ou de $\mathcal{S}'$).On dit que U possède un inverse de convolution dans $\mathcal{D}'$ (ou dans $\mathcal{S}'$), si l'on peut trouver T dans $\mathcal{D}'$ (ou dans $\mathcal{S}'$) tel que : $U * T = \delta$.

Cet inverse de convolution n'est pas unique en général et les différentes solutions dépendent aussi de l'ensemble dans lequel on les cherche, à savoir $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S}'$.

Dans le cas particulier où U est de la forme $U = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta^{(i)}$ (les a_i sont des constantes) on peut trouver T sous forme de distribution régulière associée à une fonction G qui porte alors le nom de Fonction de Green (on peut trouver plusieurs fonctions de Green pour un même U).

Interessons nous au cas où $U = \delta' + a\delta$ avec $a > 0$.

On s'interesse aux solutions dans $\mathcal{D}'$.

1. Vérifier que la distribution régulière $[G]$ associée à la fonction $G(x) = \theta(x)e^{-ax}$ est bien solution du problème.

2. Montrer que tous les inverses de convolution dans $\mathcal{D}'$ sont de la forme : $T = [G] + C\,[e^{-ax}]$ où C est une constante.
   (On rappelle que l'équation $T' = 0$ n'a pas d'autre solution que les distributions constantes dans $\mathcal{D}'$).

3. Quelles sont les solutions du problème dans $\mathcal{S}'$? Trouver la réponse de deux manières: par restriction des solutions précédentes et par transformée de Fourier appliquée à l'équation initiale.

5 Application des fonctions de Green à la résolution d'équations différentielles.

1. Supposons que l'on cherche à résoudre l'équation différentielle (au sens des fonctions): $y'(x)+ay(x) = 0$ $(a > 0)$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$. On s'interesse à la distribution régulière tempérée T associée à la fonction $\theta(x)y(x)$ et on note U la distribution $\delta' + a\delta$.

   (a) Montrer que T vérifie l'équation $U * T = y_0\delta$.

   (b) En déduire l'expression de T (dans $\mathcal{S}'$) puis celle de $y(x)$.

2. Autres équations différentielles.
   Résoudre dans $\mathcal{S}'$ les équations différentielles suivantes ($k > 0$) :
   (a) $T'' - k^2 T = 0$
   (b) $T'' - k^2 T = \delta$
3. Trouver la fonction de Green (distribution tempérée) de l'opérateur Laplacien en dimension 2.
4. Trouver la fonction de Green (distribution tempérée) de l'opérateur Laplacien en dimension 3.