Université de Paris-Sud

Centre Scientifique d'Orsay

S1SM

Travaux Dirigés de Physique

2003-2004

Table des matières

T.D. n^o 1 - Outils mathématiques

1- a) Qu'appelle-t-on dimension, équation aux dimensions, symbole d'une grandeur ? Quelle est la dimension de la constante de gravitation universelle ? Quelle est son unité dans le système international ?

b) Ecrire l'équation aux dimensions d'une puissance. En déduire son unité dans le système international. Quelle est son unité dérivée associée ? Quel est son symbole ?

c) L'unité d'énergie dans le système international est le Joule. Dans l'ancien système C.G.S (unités de base : cm, g, s), c'était l'erg.

- Trouver le rapport entre les deux unités d'énergie.

- Application : La constante solaire est le flux total de rayonnement reçu sur Terre, en dehors de l'atmosphère, en provenance du Soleil et à la distance moyenne Terre-Soleil. Sa valeur dans le système C.G.S est :

$$f = 1,36\ 10^6 \ \ \text{erg cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}$$

Connaissant les unités utilisées pour f, définir ce qu'est un flux d'énergie. Donner la valeur de f en unités SI, soit en utilisant la transformation des unités, soit en utilisant une analyse dimensionnelle.

d) L'année lumière (a.l.) est-elle une unité de temps ou de longueur ? Quelle est sa valeur en unités SI ? Comparer cette valeur à celle de l'unité astronomique couramment utilisée en astrophysique : 1 UA = distance Terre-Soleil $\sim 1,5\ 10^{11}$ m.

2- Les expressions suivantes (où l_i représente une longueur, m_i une masse et t_i un temps) sont-elles homogènes, c'est-à-dire susceptibles d'être physiquement acceptables ?

a) $m_1^2 - m_2 = m_3^3$; b) $l_1 \sin t_1 = l_2 \cos t_2$; c) $l_1 t_1^2 + l_2^2 t_2^3 / l_1 t_1 = l_1 t_1^3 / t_3$;
d) $m_1 l_1 = m_2 l_2 \exp(-t)$; e) $l_1/l_2 = \ln(t_1/t_2)$; f) $m_1 \cos(l_1 t_2 / t_1 l_2) = l_1 \exp(-t_1/t_2)$

Comment expliquer qu'on trouve parfois écrites en physique des expressions du type $l_1 = l_2 \ln t$?

3- L'équation d'état d'un gaz parfait est $pV = nRT$, où p est la pression du gaz, V le volume qu'il occupe, n le nombre de moles de gaz et T sa température.

a) Quelle est la dimension de R, constante universelle des gaz parfaits ? Quelle est son unité dans le système international ?

b) L'équation d'état (homogène) d'une mole de gaz réel est donnée par :

$$p = [RT/(V-b)]\ \exp(-a/RTV)$$

Dans cette expression a et b sont des coefficients tels que $a = 3,5\,10^{-3}$ SI et $b = 25\,10^{-6}$ SI. Donner les équations aux dimensions de a et b et déduire leurs unités dans le système international.

4- a) On suppose que la fréquence de vibration ν d'une corde tendue ne dépend que de la force de tension T, de la longueur l et de la masse m de cette corde. Déduire, par une analyse dimensionnelle, la loi de variation de cette fréquence en fonction des paramètres, à une constante multiplicative k près (sans dimension).

b) La constante de Planck h lie l'énergie E à la fréquence ν d'une onde, par la relation $E = h\nu$.

- Déterminer la dimension de h.
- On donne $h = 6,63\,10^{-34}$ SI. Quelle est l'unité de h ?
- Déterminer l'expression de la longueur d'onde de Compton λ_C relative à l'électron, sachant qu'elle est uniquement fonction de sa masse $m_e = 9,1\,10^{-28}$ g, de la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3\,10^5$ km.s^{-1} et de h. Calculer sa valeur numérique en picomètre.

5- On veut évaluer l'aire de la peau d'un être humain de masse m et de hauteur h.

a) De quelle grandeur supplémentaire a-t-on besoin pour estimer son volume V ? A.N. : $m = 60$ kg, $h = 1{,}65$ m. Donner une estimation de V.

b) On modélise la forme du corps par un cylindre de diamètre d et de hauteur h. Calculer l'aire A de la peau. Commenter cette modélisation, sachant que cette aire, évaluée à partir d'un autre modèle plus élaboré, vaut 1,6 m^2.

6- Lorsqu'on envoie un faisceau de particules incidentes issues d'un accélérateur (le Tandem, sur le campus, par exemple) sur une cible fixe, la section efficace d'interaction faisceau-cible, qui est essentiellement une mesure de la probabilité de l'interaction, est donnée par :

$$\sigma = \frac{n\,A}{\phi\,\rho\,e\,\mathcal{N}}$$

où ϕ est le nombre de particules par unité de temps dans le faisceau incident, n est le nombre de particules qui ont interagi par unité de temps, ρ est la masse volumique de la cible, e son épaisseur et A le nombre de masse des atomes qui la constituent. Enfin, $\mathcal{N}$ est le nombre d'Avogadro.

On donne : $\phi = 10^7$ s^{-1}, $n = 180$ s^{-1}, $\rho = 60$ kg/m^3, $e = 0,1$ mm, $A = 12$ g/mol et $\mathcal{N} = 6,02\,10^{23}$ mol^{-1}.

a) Quelle est l'unité de σ dans le système international ?

b) Sans utiliser la calculatrice, déterminer l'ordre de grandeur de la valeur de σ dans le système international.

Vérifier ensuite votre résultat.

c) On constate que les unités du système international ne sont pas adaptées au calcul des sections efficaces d'interaction faisceau-cible. On utilise plutôt le barn (b). Sachant que la section efficace précédemment calculée vaut $\sigma = 598$ mb, donner la valeur associée à 1 b dans le système international.

7- a) Les résultats de différentes mesures sont exprimés de la façon suivante :

- $t = 23$ s ;
- $m = 0,5$ kg ;
- $R = 534\ \Omega$ avec une précision de 10% ;
- $l = (36,0 \pm 0,3)$ m.

Pour chacune de ces grandeurs, donner l'intervalle de variation de la grandeur mesurée.

b) Les longueurs a, b, c et d ont été mesurées avec différents protocoles. Pour chacune, l'écriture des résultats proposée ici vous paraît-elle cohérente ?

$a = (27 \pm 0,02)$ cm ;
$b = (5,337 \pm 0,004)$ m ;
$c = (1234,1 \pm 2,3)$ km ;
$d = (50,17 \pm 6)$ nm .

8- Une molécule d'un gaz enfermé dans une enceinte de volume V est l'objet d'un mouvement ponctué par les chocs avec les autres molécules et par les chocs contre les parois de l'enceinte. Les chocs entre molécules entraînent que les normes de la vitesse de différentes molécules sont très majoritairement égales à la célérité moyenne v. Les chocs sur les parois expliquent physiquement la pression p du gaz parfait par un transfert de quantité de mouvement.

Expérimentalement, on vérifie que la pression dans l'enceinte augmente avec la vitesse moyenne v des molécules, leur masse m et bien sûr leur nombre N.

a) Par des considérations d'analyse dimensionnelle, en supposant que p dépend exclusivement des paramètres v, m et N, on cherche la loi qui les relie sous la forme $p = f(N)m^{\alpha}v^{\beta}$, où f est une fonction numérique de N, sans dimension. Est-ce-possible ?

b) N'aurait-on pas oublié un paramètre ? En effet, que se passe-t-il pour la pression lorsqu'on fait varier le volume de l'enceinte ? Refaire le raisonnement de la question précédente avec ce nouveau paramètre.

On montre en théorie cinétique des gaz que $f(N) = \frac{N}{3}$.

9- La vitesse d'un train augmente suivant le graphe vitesse-temps présenté page suivante. Que représente la surface comprise entre la courbe, l'axe des temps, et la droite d'équation $t = T$?

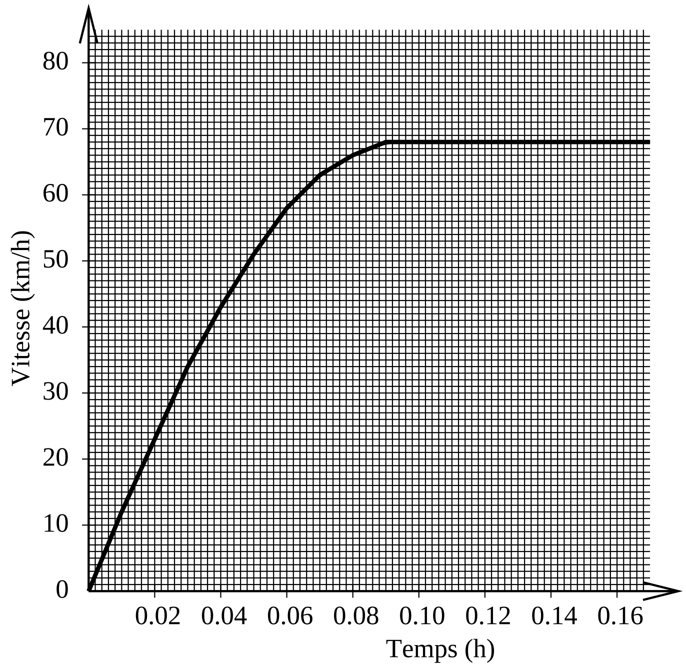
En déduire un méthode d'évaluation de la distance que le train parcourt pendant les 6 premières minutes ; puis, pendant les 3 minutes suivantes.

10- a) Donner l'expression du développement en série de $\cos x$ et de $(1+x)^{\alpha}$ autour de $x = 0$.

b) A une altitude h, la norme du champ de gravitation est donnée par :

$$g(h) = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

- Si $h \ll R$, donner une expression approchée de $g(h)$ en utilisant un développement limité au 2ème ordre en h/R.



- Jusqu'à quelle altitude h peut-on considérer qu'un DL d'ordre 0 est suffisant pour que l'erreur relative soit inférieure à 1% ?

- Même question avec un DL d'ordre 1.

On donne $R = 6,38\,10^3$ km dans le cas de la Terre.

11- a) Calculer la différentielle des fonctions $y = \ln x$, $f(x) = \exp(x^2)$ et $f(t) = \sin \omega t$.

b) Sachant que la longueur de l'arc de cercle de rayon R et d'ouverture α est $s = R\alpha$, calculer la différentielle ds, la variable étant α. Montrer que le périmètre L du cercle peut se calculer à l'aide d'une intégrale.

c) On considère un carré de côté a. Si on augmente a de Δa, quelle est la variation ΔA de l'aire A du carré ? Faire le calcul sans approximation. Calculer la différentielle dA. A quelle condition dA peut-elle donner une approximation de ΔA ? Quel est en ce cas le terme négligé ?

d) On considère un cercle de rayon $R = 1$ m. Calculer la variation ΔL de son périmètre et celle ΔA de son aire, lorsque le rayon diminue de 1 cm, en traitant la variation comme une différentielle. Calculer les variations relatives correspondantes.

e) Calculer la différentielle logarithmique des fonctions suivantes :

$$A = \pi R^2 \quad ; \quad y = \sqrt{x^2+1} \quad ; \quad f(x) = \frac{a}{(x+b)^2}$$

12- a) On donne $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Donner la valeur de la différentielle df en $x = 1$.
On considère une variation Δx prise à partir de $x = 1$. Quelle est alors la variation de la fonction pour $\Delta x = 1$, puis $\Delta x = 0,01$? Comparer à la différentielle. Représenter ces valeurs sur un graphique.

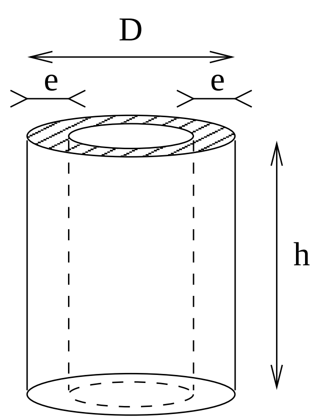
b) Soit $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$. En déduire l'expression de la différentielle de la fonction $r(x,y,z)$. Donner les expressions des différentielles de $z(x,y) = \lambda x + \mu y$ et de $w(x,y) = xy$.
c) Soit la fonction $g(x,y,z) = x^2y^3/z^2$. Comment s'écrit la différentielle logarithmique dg/g ?

13- a) On considère un point matériel se déplaçant sur une parabole d'équation $y = 2x^2$.
- Donner l'expression de la différentielle de la fonction $y(x) = 2x^2$.
- On suppose que le point matériel se trouve au point (0,0). Il se déplace de Δx sur l'axe des x, avec $\Delta x \ll 1$. Quelle est alors son ordonnée ?
- Même question si le point de départ est (1,2).

b) On considère un point matériel se déplaçant sur un paraboloïde d'équation $z = 2x^2 + 3y^2$.
- Tracer qualitativement l'allure du paraboloïde.
- Donner l'expression de la différentielle de la fonction $z(x,y) = 2x^2 + 3y^2$.
- On suppose que le point matériel se trouve au point (0,0,0). Il se déplace de Δx sur l'axe des x, de Δy sur l'axe des y, avec $\Delta x \ll 1$ et $\Delta y \ll 1$. Quelle est alors son altitude Δz ?
- Même question si le point de départ est (1,1,5).

14- Soit la fonction $f(\theta) = 3\cos\theta$ obtenue par la mesure de différents angles θ, avec une incertitude absolue associée $\delta\theta$. Exprimer $d(\cos\theta)$. En déduire les expressions des incertitudes absolue δf et relative $\delta f/f$ sur la fonction f.
Application numérique : $\theta = (30 \pm 1)^o$; calculer δf.

15- On dispose d'un tube cylindrique comme représenté sur la figure suivante. Sa hauteur, mesurée avec une règle, est $h = (250 \pm 1)$ mm ; son diamètre extérieur, mesuré avec un pied à coulisse, est $D = (25,00 \pm 0,01)$ mm ; son épaisseur, mesurée avec un palmer, est $e = (5,000 \pm 0,005)$ mm.



a) Calculer les incertitudes relatives associées à ces mesures. Quelle est la mesure la plus précise ?

b) Calculer le volume V occupé par le matériau constituant le cylindre.

c) Un ami, en qui vous avez une entière confiance quant à ses connaissances scientifiques, vous dit que l'incertitude absolue correspondante sur le volume, donnée par sa calculatrice (supposée fiable) est $\delta V = 0,412\ 233\ \text{cm}^3$.

Quel résultat final donneriez-vous pour la valeur de V ? Comment obtenir une valeur plus précise de V ?

16- On détermine expérimentalement la résistivité électrique ρ_e du cuivre en mesurant la résistance R, la longueur l et le diamètre D d'un fil de cuivre, et en utilisant la relation $R = \rho_e l/S$, où S est la section du fil.

a) En quelle unité doit-on exprimer ρ_e ?

b) Calculer sa valeur approchée puis, par un calcul différentiel, les incertitudes relative et absolue sur cette valeur et donner le résultat final, qui résume toute la mesure, d'après les valeurs expérimentales suivantes :

$R = (0,4562 \pm 0,0002)\ \Omega$, $l = (2,0000 \pm 0,0001)$ m et $D = (0,30 \pm 0,01)$ mm.

c) Quelle mesure serait-il souhaitable d'améliorer ?

d) Les estimations des incertitudes dans la question b) ont été faites à partir d'une mesure unique ou d'un nombre faible de mesures. Mais pour être certain d'encadrer la vraie valeur, on est amené à prendre une incertitude assez grande.

Lorsque la valeur d'une grandeur physique peut être obtenue à partir d'un grand nombre de mesures, on utilise une approche statistique. Que signifie alors le résultat expérimental suivant ?

$$D = (0,30 \pm 0,01)\,\text{mm} \text{ fiable à } 95\%$$

e) L'approche statistique du calcul d'incertitude sur ρ_e sera totalement différente de l'approche classique faite à la question b).

Avec des données numériques équivalentes à celles du b) mais fiables à 95% (on dit aussi : avec un niveau de confiance de 95%), que pensez-vous du résultat obtenu pour ρ_e ?

17- Un satellite ponctuel, de masse m, situé à la distance r du centre de la Terre, est soumis de la part de celle-ci à une force d'attraction $\vec{F}$ de module

$$F = \frac{G\,M\,m}{r^2}$$

où M est la masse de la Terre et G la constante de gravitation universelle.

a) Donner la dimension de G et son unité dans le système international.

b) Au niveau du sol (c'est-à-dire $r = R$, où R est le rayon de la Terre), le module de l'accélération de la pesanteur g_0 est donné par $g_0 = GM/R^2$.

Sachant que $R = 6400$ km et $M = 6\,10^{24}$ kg, donner un ordre de grandeur de la valeur de la constante G, en adoptant pour g_0 la valeur approchée $g_0 = 10\ \text{m.s}^{-2}$.

c) On cherche à trouver, par une analyse dimensionnelle, la vitesse minimale, appelée vitesse de libération v_{lib}, avec laquelle il faut lancer un satellite A à partir du sol pour qu'il puisse échapper à l'infini. On suppose *a priori* que cette vitesse ne peut dépendre que de la masse m du satellite, du rayon R de la Terre et du module de l'accélération de la pesanteur au sol g_0.

- Déduire une expression de v_{lib}.

- La valeur ainsi trouvée est en fait $\sqrt{2}$ fois trop petite. Justifier pourquoi l'analyse dimensionnelle n'a pu donner ce facteur $\sqrt{2}$.

- Les grandeurs m, R et g_0 sont connues avec des incertitudes qui valent respectivement δm, δR et δg_0. Donner l'expression de l'incertitude relative (précision) résultante sur v_{lib}.

- Application numérique : estimer v_{lib}, puis donner le résultat final $v_{lib} \pm \delta v_{lib}$, sachant que $\delta m = 0,3\,10^{24}$ kg, $\delta R = 100$ km et $\delta g_0 = 0,2$ m.s^{-2}

18- L'intérêt des équations différentielles du premier ordre à variables séparées peut être illustré par l'étude de la décharge d'un condensateur.

Un circuit électrique, comprenant un condensateur de capacité C et une résistance ohmique R est fermé à l'instant $t = 0$ où la charge du condensateur vaut Q. Soient $q(t)$ sa charge restante et $I(t)$ le courant à l'instant t, avec $I = -dq/dt$.

La décharge du condensateur est décrite par l'équation différentielle :

$$R\,\dot{q} \; + \; \frac{1}{c}\,q \; = \; 0$$

a) Quelle est la dimension de $\dot{q}$?

b) Montrer que $q(t) = \lambda \exp(-t/RC)$ est solution de l'équation.

c) Intégrer l'équation pour obtenir l'expression de $q(t)$ en fonction de $\tau = RC$, appelée constante de temps du circuit. Montrer qu'on retrouve le résultat précédent. En déduire l'expression de $I(t)$.

19- On dispose d'une masse m, fixée à une paroi verticale par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k. Cette masse peut se déplacer le long d'un axe horizontal. Soit $x(t)$ sa position sur l'axe Ox à l'instant t. On donne l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse m en l'absence de frottements :

$$\frac{d^2x}{dt^2} \; + \; \frac{k}{m}\,x \; = \; 0$$

a) Donner sans démonstration la solution générale de cette équation différentielle. Que se passe-t-il si $k = 0$?

On prendra pour la suite $m = 200$ g et $k = 50$ N.m^{-1}.

b) Déterminer la pulsation, la période et la fréquence du mouvement.

c) à $t = 0$, la masse m a pour abscisse $x_0 = 2$ cm et on communique à la masse une vitesse $v_0 = -0,4$ m.s^{-1}.

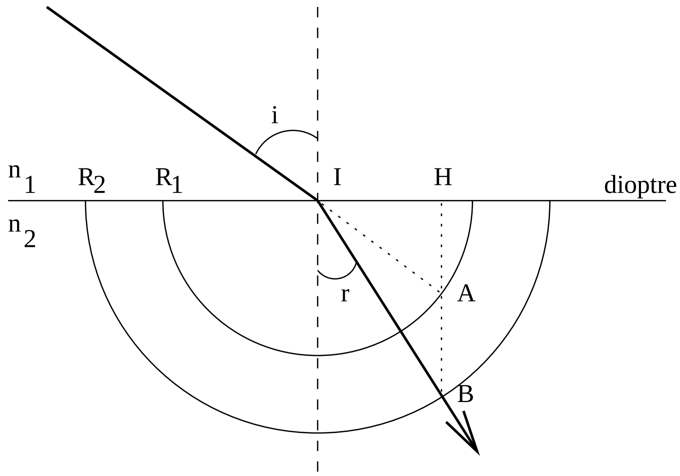
- Déterminer les valeurs numériques de l'amplitude et de la phase.

- On souhaite une solution du type $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. A quelle condition sur A, B et ω cette solution est-elle possible ?

d) Donner l'expression de dx, différentielle de la fonction $x(t)$. Quelle est son interprétation physique ?

T.D. n^o 2 - Optique géométrique

1- Huygens a proposé la figure suivante pour contruire de façon précise le rayon réfracté dans le milieu d'indice n_2 à partir du rayon incident traversant le milieu d'indice n_1.



En prenant comme centre le point d'incidence I, deux demi-cercles sont tracés dans le milieu 2 avec des rayons R_1 et R_2 respectivement proportionnels à n_1 et n_2. L'exemple de la figure correspond à $n_1 = 1,0$ et $n_2 = 1,5$.

Le rayon incident est prolongé jusqu'au cercle R_1 qu'il coupe au point A. De A est abaissée la perpendiculaire (AH) à la surface du dioptre qui coupe le cercle R_2 en B ; le rayon réfracté correspond au rayon IB.

a) Dans ce cas où $n_1 < n_2$, montrer que cette construction correspond bien à la loi de Snell-Descartes concernant la réfraction.

b) En utilisant cette construction, étudier la variation de r lorsque i varie de 0^o à 90^o. On appelle λ l'angle limite obtenu (c'est l'angle limite de réfraction).

Donner l'expression de λ en fonction des indices n_1 et n_2.

c) Dans le cas où $n_1 > n_2$, montrer en utilisant ce type de construction qu'il existe un angle limite d'incidence au-delà duquel la réfraction n'est plus possible.

2- a) Dans un milieu transparent, isotrope et homogène, la vitesse V de propagation de la lumière est-elle inférieure, égale ou supérieure à la vitesse c de propagation de la lumière dans le vide ?

b) Quelle est la relation entre la vitesse de propagation de la lumière dans le vide c et celle dans un milieu transparent d'indice n ?

c) Parmi toutes les trajectoires possibles pour aller d'un point à un autre, la lumière suit-elle le chemin : qui a la distance la plus courte ; celui qui a le temps de parcours minimal ; ou encore celui qui a le temps de parcours maximal ?

d) Si un rayon lumineux dans un premier milieu fait, à l'arrivée sur le dioptre de séparation avec un milieu moins réfringent, un angle d'incidence i, sa trajectoire fait-elle après le dioptre un angle r avec la normale au dioptre inférieur, égal ou supérieur à i ?

e) Si un rayon lumineux tombe sur le dioptre de séparation avec un milieu plus réfringent avec l'angle d'incidence i, le rayon réfracté : n'existe plus au dessus d'une valeur limite de i ; existe toujours et l'angle de réfraction peut prendre toutes les valeurs de 0 à 90^o ; ou encore existe toujours et l'angle de réfraction ne peut pas dépasser une valeur limite ?

f) Si on regarde un bâton rectiligne plongé obliquement dans l'eau, il paraît à l'observateur : toujours rectiligne ; brisé et la partie dans l'eau faisant avec la verticale un angle plus grand que la partie dans l'air ; ou encore brisé et la partie dans l'eau faisant avec la verticale un angle plus petit que la partie dans l'air ?

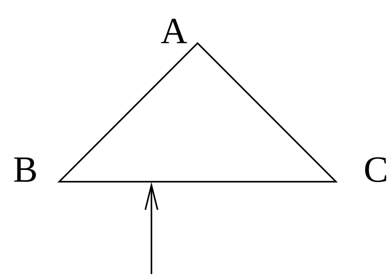
3- Un observateur regarde un objet ponctuel A placé derrière une cuve à faces planes parallèles distantes de e, remplie d'un liquide d'indice n. La ligne observateur-objet est perpendiculaire aux faces de la cuve. L'observateur voit l'image A' de A. Quelle est sa nature ? Calculer la distance AA'. Décrire qualitativement ce qu'on observe si la ligne observateur-objet n'est plus perpendiculaire aux faces de la cuve, par exemple si la cuve tourne d'un petit angle.

4- Un télescope est constitué d'un miroir sphérique de rayon R. Il donne des étoiles observées des images situées dans le plan focal du téléscope. Celui-ci est dirigé vers une étoile S_1, c'est-à-dire que l'axe optique a exactement la direction de la lumière provenant de S_1. Une deuxième étoile S_2 est située à la distance angulaire α de S_1. Construire les images S_1' et S_2' des deux étoiles. Calculer leur distance.

A.N. : $R = 20$ m, $S_1'S_2' = 3$ cm. Calculer α.

5- a) Une ampoule, supposée ponctuelle, est située à 1,5 m du plafond. Elle est centrée au dessus d'un miroir plan circulaire de 60 cm de diamètre placé à 50 cm au dessus du sol. Sachant que la hauteur de la pièce est de 2,5 m, quelle est la portion de plafond éclairée par réflexion sur le miroir ?

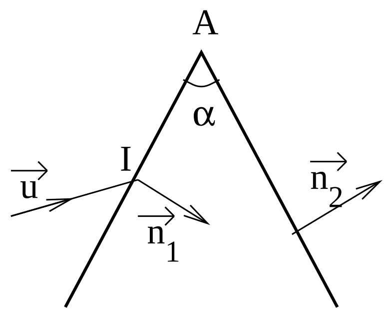
b) On considère un prisme en verre d'indice $n = 1,5$ et dont la base est un triangle rectangle isocèle ABC, comme représenté sur la figure page suivante. Tracer la marche d'un rayon lumineux arrivant perpendiculairement à l'hypothénuse BC.



c) Même question si le rayon incident n'est pas perpendiculaire à BC (on suppose dans ce cas qu'il y a deux réflexions totales dans le prisme).

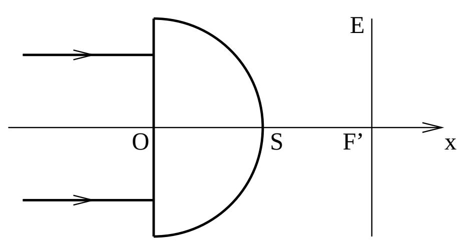
6- Un prisme est constitué d'un matériau transparent d'indice n. Soit α son angle au sommet. Un rayon incident de vecteur unitaire $\vec{u}$ arrive sur la première face de normale $\vec{n}_1$ avec l'angle d'incidence $i = (\vec{n}_1, \vec{u})$. Le rayon émergent de vecteur unitaire $\vec{u'}$ sort par la deuxième face de normale $\vec{n}_2$ avec l'angle $i' = (\vec{n}_2, \vec{u'})$. On règle le dispositif de sorte que $i' = -i$ et on mesure la déviation $D = (\vec{u'}, \vec{u})$. En déduire n en fonction de D et α.

A.N. : $\alpha = 60^o$, $D = 37,2^o$. Calculer n.



7- Une demi-boule de verre d'indice $n = 1,5$ et de rayon $R = 6$ cm, est éclairée sur toute sa surface plane par un faisceau de lumière parallèle à son axe Ox. La lentille constituée de la demi-boule est-elle mince ? Les conditions de Gauss sont-elles réalisées ? Montrer que les rayons incidents dont la distance à Ox est petite ($\ll R$) convergent à la sortie en un point F'. Calculer sa position. Application numérique.

Du côté de la face de sortie, on observe le long de l'axe un segment brillant. Expliquer et calculer la longueur du segment. En F', on place un écran E perpendiculaire à Ox. Que voit-on sur l'écran ? Calculer le rayon de la tache observée sur E.

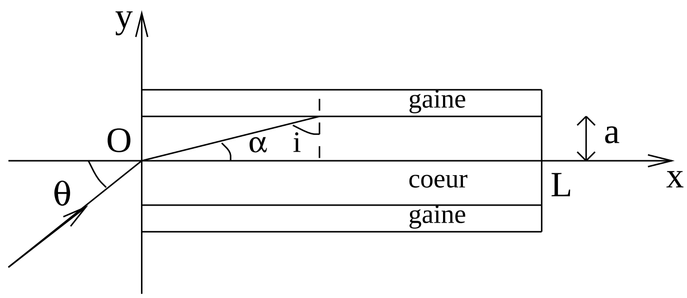


8- Fibre optique à saut d'indice

On considère dans l'air d'indice n_0, une fibre optique constituée d'un coeur cylindrique de longueur L, de rayon a, d'axe Ox, d'indice uniforme n_1, entouré d'une gaine d'indice n_2 avec $n_0 < n_2 < n_1$. Un rayon lumineux atteint le coeur de la fibre au centre O de la face d'entrée, avec l'angle d'incidence θ. On note α l'angle que fait le rayon avec Ox immédiatement après son entrée dans la fibre.

Données : vitesse de la lumière dans le vide $c = 3\,10^8$ m.s^{-1} ; $n_0 = 1,000$; $n_1 = 1,520$; $n_2 = 1,480$; $a = 30$ μm.

a) Expliquer pourquoi le rayon lumineux suit une trajectoire plane dans un plan contenant l'axe Ox.



b) A quelles conditions sur α et sur θ, le rayon subit-il une réflexion totale sur la gaine et donc se propage-t-il dans la fibre ? Calculer numériquement les valeurs maximales θ_0 et α_0 de θ et α pour que le rayon se propage dans la fibre.

c) Dessiner les trajets de deux rayons dans la fibre avec des θ différents. Dessiner aussi les rayons émergeant dans l'air à l'extrémité de la fibre de longueur L. Que se passe-t-il à la sortie de la fibre si on éclaire la face d'entrée avec un faisceau convergent au point O d'ouverture supérieure à θ_0 ?

d) A $t = 0$, on éclaire la fibre pendant un temps très bref (impulsion lumineuse).

- Calculer la date à laquelle émerge le signal lumineux quand il est porté par le rayon caractérisé par son angle α à l'entrée. Faire l'approximation des petits angles :

$$\sin\alpha \simeq \alpha \quad ; \quad \cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

- Montrer que si la fibre est éclairée par un faisceau conique de grande ouverture, l'impulsion lumineuse émergeant de la fibre est étalée entre les instants $n_1 L/c$ et $n_1 L/c + \Delta t$. Calculer Δt. Faire un schéma qualitatif montrant l'intensité lumineuse en fonction du temps en sortie de la fibre.

- Le signal d'entrée est une succession périodique d'impulsions lumineuses de fréquence f. Calculer la fréquence maximale f_m qui peut être guidée distinctement par la fibre.

A.N. : Calculer f_m pour $L = 1000$ m. Peut-on utiliser cette fibre pour transmettre la télévision ? Commentaire.

9- Soient les schémas 1 à 10 présentés pages 17 et 18.

a) Donner la définition des foyers objet et image d'une lentille. Donner la relation de conjugaison en définissant les quantités qui y apparaissent.

b) Pour chacune des 10 lentilles :

- Construire l'image $A'B'$ de l'objet AB donnée par la lentille.

- En utilisant les formules de conjugaison et de grandissement pour les lentilles minces, calculer la position et la grandeur de l'image et vérifier la construction précédente. Les lentilles ont une distance focale de 2 cm et l'objet AB est tel que $\overline{AB} = 1$ cm.

c) A quelle distance du centre optique O d'une lentille (convergente ou divergente, de distance focale f' et de grandissement γ) doit-on placer un objet AB (A étant sur l'axe), de taille $AB = d$, pour obtenir une image de taille $d' = \gamma d$? Exprimer cette distance en fonction de f' et de γ.

d) En utilisant vos résultats, dire pour chacune des propositions ci-dessous si l'image est réelle ou virtuelle, et si le grandissement γ est positif ou négatif.

Pour une lentille convergente :

- objet réel entre $-\infty$ et F ;
- objet réel entre F et O ;
- objet virtuel entre O et $+\infty$.

Pour une lentille divergente :

- objet réel entre $-\infty$ et O ;
- objet virtuel entre O et F ;
- objet virtuel entre F et $+\infty$.

10- Une lentille bi-convexe donne d'un objet réel rectiligne, placé perpendiculairement à son axe optique à 28,8 cm en avant de la lentille, une image réelle cinq fois plus grande que l'objet. Dans la suite de l'énoncé, on envisagera les deux cas : $\gamma = 5$ et $\gamma = -5$.

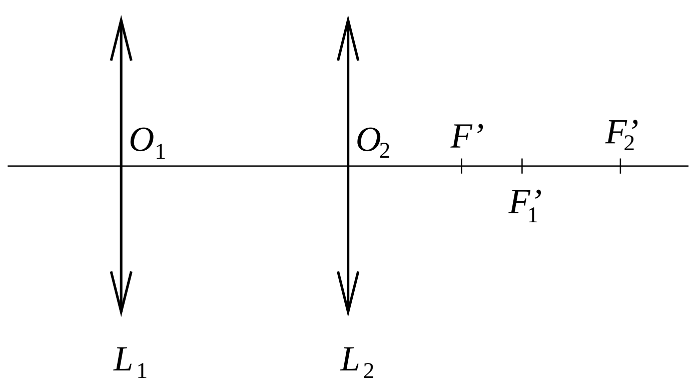
a) Déterminer la distance focale de cette lentille et sa convergence.

b) Calculer le rayon de courbure de sa deuxième face, sachant que celui de la première face est de 20 cm et que l'indice du verre qui la constitue est $n = 1,5$.

11- a) De part et d'autre du foyer objet d'une lentille convergente L de 20 cm de distance focale et à 1 cm de ce foyer, on place un objet de 1 cm de hauteur. Où se trouvent les images respectives ? Calculer la grandeur des deux images et la distance les séparant.

b) On dispose maintenant deux lentilles identiques à L de façon à ce qu'elles aient même axe principal. La distance de leurs sommets S_1S_2 est $e = 8$ cm. Déterminer la position des foyers objet et image du système formé par les deux lentilles.

12- Considérons le système optique constitué de deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2, séparées d'une distance e, comme présenté sur la figure page suivante. On se propose de calculer la distance focale "équivalente" de ce système optique O_2F, en fonction des distances focales des deux lentilles, O_1F_1 et O_2F_2, et de leur distance de séparation e.

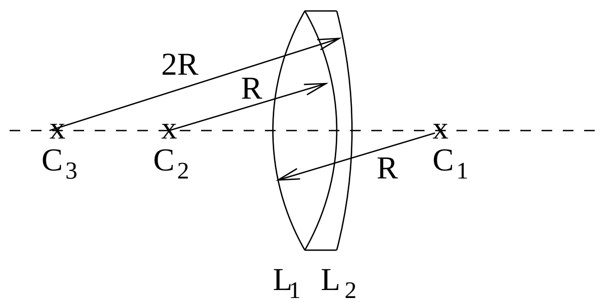


a) Déterminer graphiquement la position du point F, où convergent les rayons parallèles à l'axe optique arrivant sur la lentille L_1.

b) A l'aide du schéma, donner l'expression analytique de $\overline{O_2F}$ en fonction de e, $\overline{O_2F_2}$ et $\overline{O_1F_1}$.

c) Dans quelles conditions ce système optique est-il afocal ? Dans ce cas, quel est le rapport entre les tailles transverses des faisceaux lumineux parallèles à l'entrée et à la sortie du système optique ?

13- L'objectif d'un appareil photo est constitué de deux lentilles accolées, comme représenté sur la figure suivante. L'une L_1, en crown ($n = 1,5$), est bi-convexe et symétrique, l'autre L_2, en flint ($n = 1,68$), est un ménisque divergent. La face commune présente le même rayon de courbure R. La face convexe du ménisque divergent a un rayon de courbure égal à $2R$. La focale du système est 20 cm. Déterminer R et calculer les focales des deux lentilles.



14- On dispose d'un objectif de focale 30 cm, supposé assimilable à une lentille mince L_1. On vise un objet rectiligne AB très éloigné et dont le diamètre apparent est $\alpha = 0,02$ radian. Quelle est la grandeur de l'image A_1B_1 donnée par cet objectif ?

On désire transformer ce dernier en téléobjectif donnant une image trois fois plus grande et on se procure pour cela une lentille divergente L_2 de 12 cm de focale. Où faut-il placer cette lentille ? Quel est l'encombrement total du téléobjectif (défini comme la distance entre L_1 et l'image définitive A_2B_2) ?

15- Un agrandisseur photographique est un appareil principalement destiné à fournir d'un négatif une image agrandie qui sera enregistrée par un papier photosensible. Cet agrandissement est obtenu grâce à un système optique appelé objectif. Celui-ci est monté sur un support qui peut être déplacé par rapport au plan du papier grâce à une crémaillère. De même, le négatif peut être déplacé par rapport à l'objectif.

I) Répondre aux questions suivantes de façon qualitative :

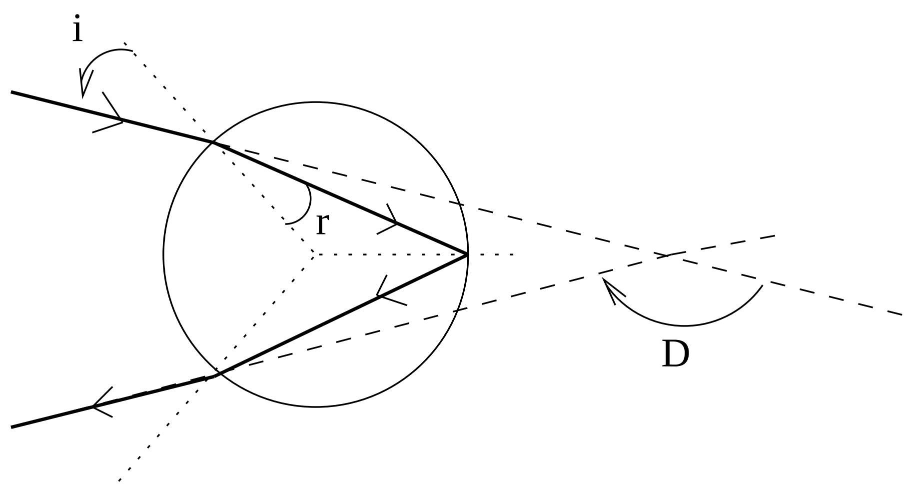
a) L'image fournie par l'objectif doit-elle être réelle ou virtuelle ?

b) Pour cela, l'objectif doit-il être convergent ou divergent ?

c) L'appareil est initialement réglé pour fournir une photo au format (16x24) cm^2 à partir d'un négatif (24x36) mm^2. On veut maintenant l'utiliser pour obtenir une photo au même format, à partir d'un négatif (6x9) cm^2. Dans quel sens doit-on déplacer l'objectif par rapport au papier ? Dans quel sens doit-on déplacer le négatif par rapport à l'objectif ? Faire une figure illustrant le résultat.

II) On assimile maintenant l'objectif à une lentille mince. Sachant que l'image du négatif (6x9) cm^2 recouvre exactement le papier (16x24) cm^2 et que la distance entre l'objectif et le négatif est de 13,75 cm, calculer la distance focale de l'objectif. Quelle est la distance entre l'objectif et le papier ? Faire une figure à l'échelle 1/2 représentant les positions du négatif, de l'objectif et du papier, ainsi que les rayons lumineux issus du négatif s'appuyant sur les bords de l'objectif de diamètre d'ouverture 14 cm.

16- La formation d'un arc-en ciel peut s'expliquer par la réflexion, à l'intérieur d'une goutte d'eau, d'un rayon lumineux provenant du Soleil. On rappelle que la lumière blanche du Soleil est équivalente à la superposition de lumières monochromatiques. Lorsqu'un rayon monochromatique pénètre dans une goutte d'eau d'indice n, il subit un certain nombre de réflexions. On s'intéressera pour le moment uniquement à la première, comme représenté sur la figure suivante.



a) Donner l'expression de D, angle de déviation du rayon incident en fonction de l'angle d'incidence i et de l'angle réfracté r.

b) Trouver, en fonction de n, la valeur de $\sin i$ pour laquelle la déviation du rayon incident est minimale. On calculera l'angle α défini par $\alpha = \pi - D$, dans le cas d'une goutte d'eau ($n = 1,33$) et dans le cas d'une goutte de glace ($n = 1,31$).

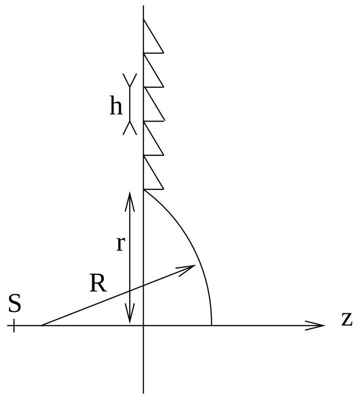
c) Sachant que l'intensité, lorsque le rayon lumineux émerge de la goutte, est maximale au minimum de déviation, expliquer la formation de l'arc-en-ciel lorsque la lumière est blanche. On admet que la variation de l'indice n avec la longueur d'onde λ_0 dans le vide satisfait la loi de Cauchy :

$$n = n_0 + \frac{C}{\lambda_0^2}$$

avec n_0 et C constantes positives.

d) On observe souvent un second arc-en ciel d'intensité plus faible et inversé par rapport au premier. On interprète sa formation par une deuxième réflexion à l'intérieur de la goutte d'eau. Déterminer la nouvelle déviation D_2 puis calculer $\beta = \pi - D_2$ au minimum de déviation. Justifier son inversion des couleurs par rapport au premier arc-en-ciel.

17- Une lentille de Fresnel utilisée dans un phare maritime est constituée d'une lentille plan convexe et de cinq anneaux concentriques jointifs de section prismatique, comme représenté sur la figure suivante.



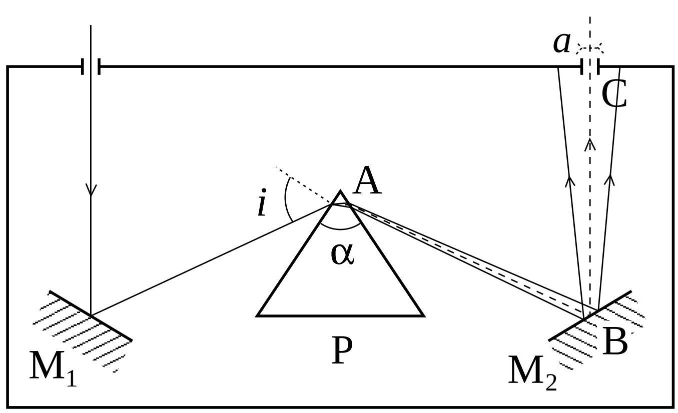
L'indice du verre est $n = 1,5$, le rayon de courbure de la lentille centrale est $R = 1$ m, son rayon d'ouverture vaut $r = 10$ cm et la hauteur des anneaux est $h = 2$ cm.

a) Calculer la distance entre la source ponctuelle S et la lentille plan convexe, sachant que la source doit se situer au point focal objet.

b) Calculer les angles des cinq sections prismatiques, de telle sorte que les rayons incidents provenant de la source mergent parallllement l'axe optique.

18- L'indice de réfraction d'un matériau diélectrique transparent (silice, saphir, verre ordinaire, etc...) n'est pas constant mais dépend de la longueur d'onde de la lumière qui s'y propage $n = n(\lambda)$. En particulier, dans tous les matériaux les plus communs, l'indice de réfraction diminue lorsque la longueur d'onde augmente. Le paramètre qui caractérise cette variation est la dérivée première de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde (appelé coefficient de dispersion linéaire du matériau $[dn(\lambda)/d\lambda] < 0$).

Les propriétés de dispersion linéaire des matériaux sont à la base de la réalisation d'appareils tel que le spectromètre. Celui-ci est un instrument qui permet de faire une analyse du contenu spectral ("couleurs") d'un faisceau lumineux. Un schéma simplifié est reporté sur la figure suivante.



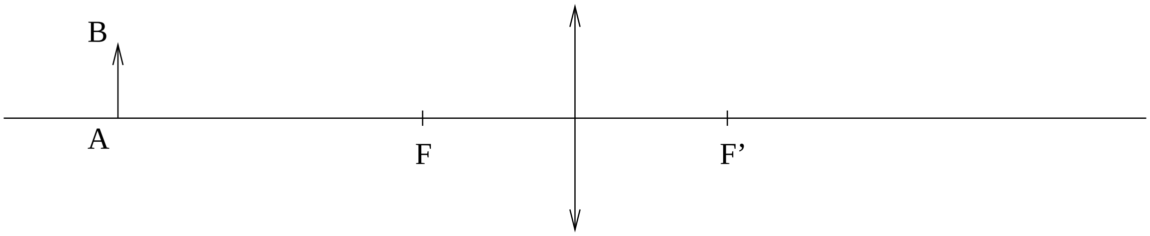
Un faisceau lumineux en entrée du spectromètre est réfléchi par le miroir M_1 et le prisme P sous un angle α. Les différentes longueurs d'onde contenues dans le faisceau en entrée émergent du prisme avec des directions différentes et sont réfléchies par le miroir M_2 vers la fente, qui fait une sélection spectrale de la lumière en sortie de l'appareil. La distance totale parcourue entre le prisme et la fente vaut $ABC = ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{BC}|| = L$, et la largeur de la fente est égale à a.

On supposera que le faisceau lumineux à l'entrée est infiniment fin.

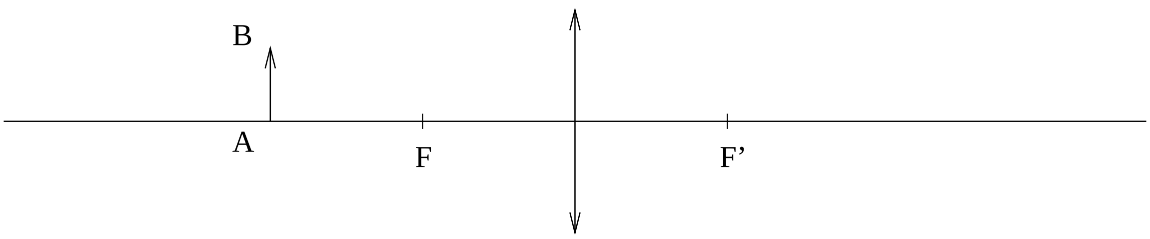
a) Déterminer qualitativement la position des différentes couleurs au niveau de la fente de sortie (point C).

b) Déterminer la résolution spectrale du spectromètre, définie comme le plus petit intervalle $d\lambda$ entre deux longueurs d'onde que l'on arrive à séparer.

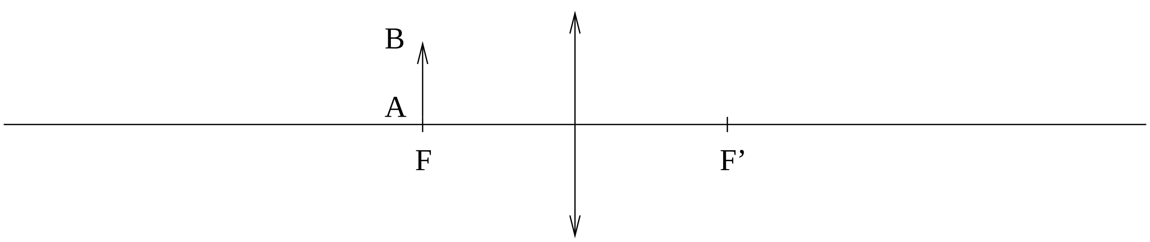
A.N. : $a = 100\ \mu$m, $L = 1$ m, $n(\lambda = 632$ nm$) = 1,5$, $dn/d\lambda(\lambda = 632$ nm$) = -0,05\ \mu$m^{-1}, $\alpha = 56,3^o$.



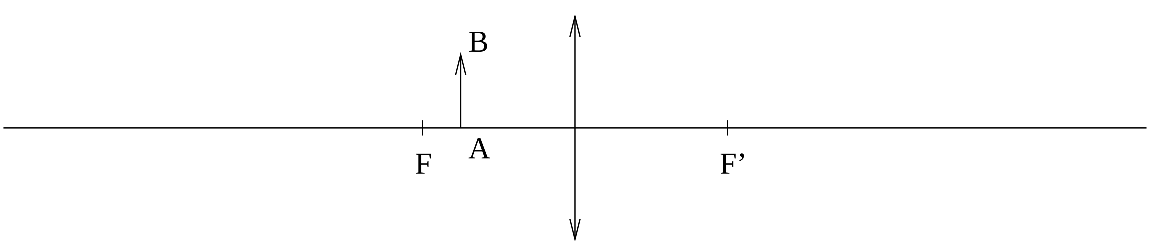
cas 1



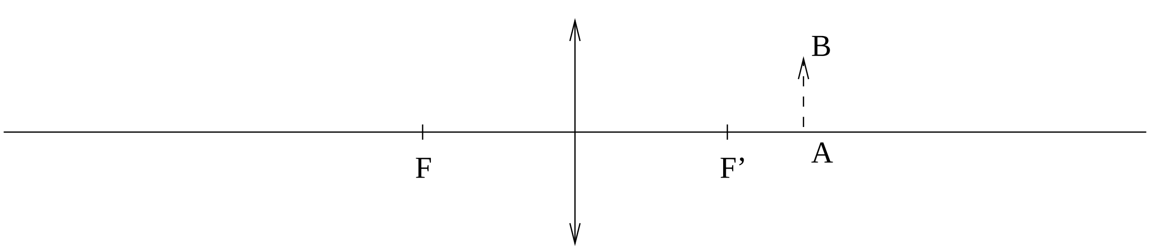
cas 2



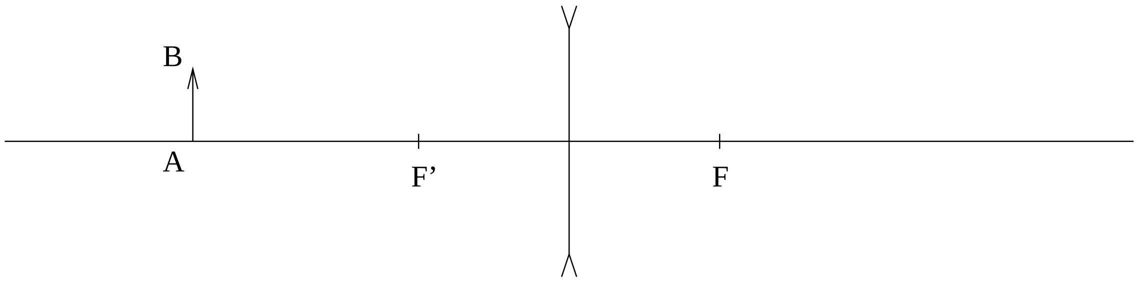
cas 3



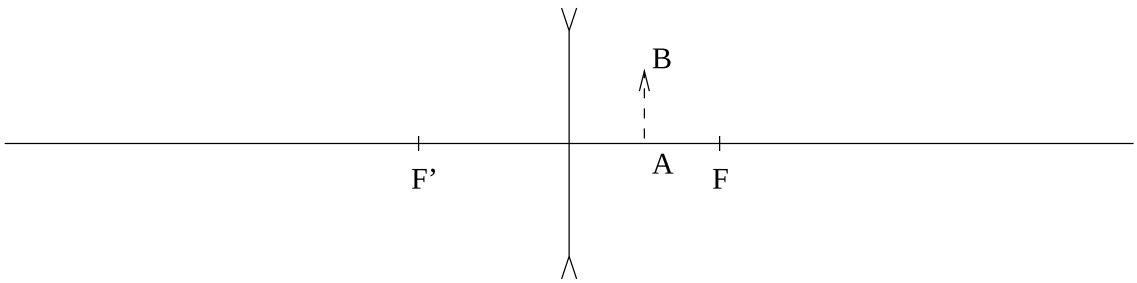
cas 4



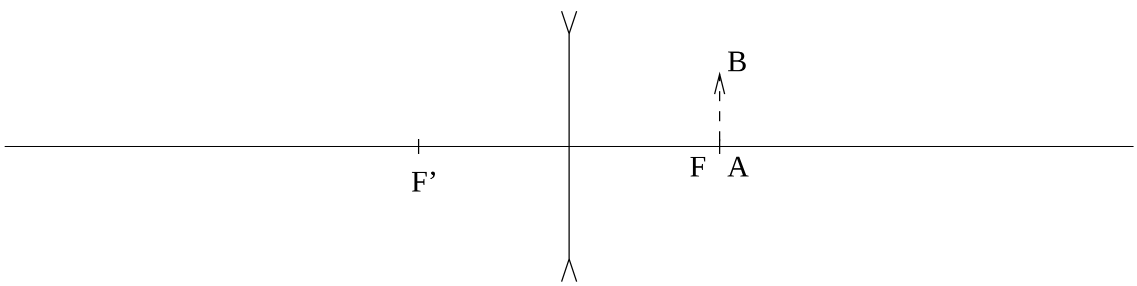
cas 5



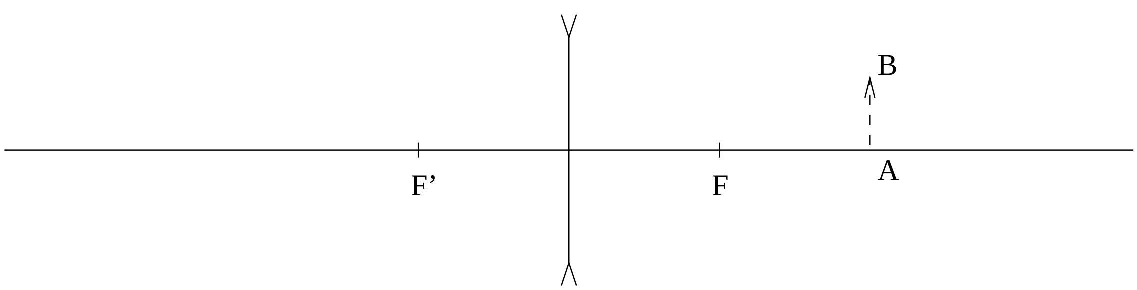
cas 6



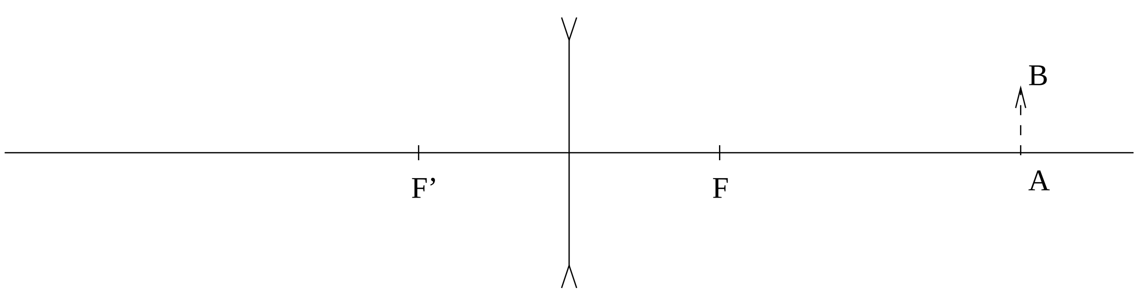
cas 7



cas 8



cas 9



cas 10

T.D. n^o 3 - Cinématique

1- Exercice simple pour lequel il est recommandé de **ne pas utiliser de calculatrice**.
On considère une particule qui se déplace le long d'un axe $x'Ox$ (sa trajectoire est rectiligne). L'équation horaire du mouvement est donnée par :

$$x(t) = \mu t^2 + \nu$$

où x, μ, ν et t sont exprimés en unités SI.

a) Donner les dimensions de μ et ν.

b) On donne $\mu = 4$ SI et $\nu = 3$ SI. Calculer la vitesse moyenne de la particule entre les instants t_0 et t_1 dans les cas suivants :

$t_0 = 4$ s et $t_1 = 5$ s ;
$t_0 = 4$ s et $t_1 = 4{,}1$ s ;
$t_0 = 4$ s et $t_1 = 4{,}001$ s ;
$t_0 = 4$ s et $t_1 = 4{,}00001$ s.

c) Déterminer la vitesse instantanée de la particule à $t = 4$ s.

2- De votre fenêtre, vous voyez tomber un pot de fleurs. Vous estimez qu'il met un dixième de seconde pour passer devant la fenêtre haute de 1,40 m. Quelle était la vitesse du pot de fleurs lorsqu'il est passé en bas de la fenêtre ? Estimer l'étage duquel il provient.

3- Des flocons de neige tombent verticalement par rapport au sol, en parcourant 8 m par seconde. A quelle vitesse les passagers d'une voiture, roulant à 50 km.h^{-1} sur une route droite, les voient-ils frapper le pare-brise du véhicule ?

4- Dans tous les raisonnements de cet exercice, il importe de préciser le référentiel choisi. La norme de la vitesse du courant d'une rivière de 40 m de large est 2 m.s^{-1}.

a) La norme de la vitesse d'un bateau en l'absence de courant est 4 m.s^{-1}. Quel est le temps minimal que mettra le bateau pour traverser la rivière ? Quel sera son trajet ? Donner son orientation pendant la traversée.

b) Le pilote du bateau veut arriver en un point situé en face de sa position de départ sur l'autre rive. Quel temps mettra-t-il pour faire la traversée en ligne droite ? Faire un dessin en indiquant les différentes vitesses intervenant dans le problème. Calculer les angles qu'elles font entre elles.

c) Une barque dérive au milieu de la rivière. Au moment où elle passe devant un nageur assis sur la rive, celui-ci décide de rattraper la barque. La norme de sa vitesse de nage en piscine est 1 m.s^{-1}. En combien de temps peut-il atteindre la barque ?

d) Un enfant sur la barque lance une pierre en direction de la rive, en visant un arbre situé en face de lui. Où la pierre atterrira-t-elle ?

5- On néglige la résistance de l'air.

a) Un avion vole horizontalement à une altitude de 5 km. La norme de sa vitesse (v_0) est 500 km.h^{-1}. Il lâche une boîte de vivres. Quelle distance horizontale a parcouru la boîte lorsqu'elle atteint le sol ?

b) On suppose que la vitesse initiale, maintenant à partir du sol, a toujours v_0 pour norme. Déterminer l'angle entre cette vitesse initiale et le sol horizontal pour que la portée d'un canon soit maximale.

6- Un kangourou peut sauter 8 m en longueur si le saut fait un angle de 45^o avec l'horizontale. Quelle est sa vitesse de départ ?

7- Un mouvement plan est donné par ses équations horaires : $x(t) = a\cos(kt^2)$ et $y(t) = a\sin(kt^2)$, où a et k sont des constantes positives.

a) Quelles sont les dimensions de a et k ?

b) Quelle est la trajectoire ? La dessiner.

c) Calculer les composantes et la norme de la vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?

d) Calculer les composantes tangentielles et normales de l'accélération.

8- En quel point de la trajectoire d'un objet, lancé avec un certain angle par rapport à l'horizontale, l'accélération normale sera-t-elle maximale ?

9- Soit un mobile M se déplaçant dans un plan Oxy, dont la position à chaque instant t est donnée en coordonnées cartésiennes par les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

a) Définir les coordonnées cartésiennes et la norme des vecteurs vitesse et accélération instantanées de M à tout instant t.

b) On donne la représentation paramétrique $x(t) = a\cos\omega t$ et $y(t) = b\sin\omega t$. Donner l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile et préciser la nature de cette trajectoire. Montrer que l'accélération est centrale et dirigée vers O.

c) On s'intéresse à présent au repère intrinsèque (ou de Fresnet) associé à la trajectoire de M. Dans le cas général, définir le repère intrinsèque $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$. Donner les expressions de $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. En déduire une relation entre ces vecteurs et leurs dérivées respectives par rapport au temps.

Donner les expressions des composantes tangentielles et normales de la vitesse et de l'accélération de M dans le repère intrinsèque.

d) Mêmes questions pour le repère polaire $(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ associé au mobile.

e) Pour quel mouvement simple retrouve-t-on, aux signes près, des expressions semblables pour la vitesse et l'accélération dans les deux repères ?

10- L'équation en coordonnées polaires de la trajectoire de M est $\rho = 2b\cos(\theta)$, avec $\theta = (\omega t)/2$, où b et ω sont des constantes positives.

a) Dessiner les points correspondants à $\theta = 0, \pi/4, -\pi/4, \pi/2, -\pi/2$. Tracer qualitativement la trajectoire.

b) Calculer $\vec{v}$ et $||\vec{v}||$.

c) Calculer les coordonnées cartésiennes x et y en fonction de l'angle $\alpha = 2\theta$. En déduire simplement l'équation cartésienne de la trajectoire. La définir précisément.

d) Décrire le mouvement. Quelle est l'accélération ?

11- Le mouvement du point M dans le plan est tel que l'angle polaire θ est égal à ωt (où ω est constante) et que le vecteur vitesse $\vec{v}$ fait un angle constant α avec $\overrightarrow{OM}$: $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \vec{v})$. Calculer $\rho(t)$ puis l'équation polaire de la trajectoire $\rho(\theta)$.

a) Tracer la trajectoire.

b) Déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération :

- dans le repère polaire ;
- dans le repère intrinsèque.

c) On se place dans le cas où $\omega = 1$ rad.s^{-1} et $\tan\alpha = 2$. Représenter, sur la courbe de la trajectoire, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{a}$ et leurs composantes pour $\theta = \pi/4$.

d) Déterminer les composantes du repère intrinsèque $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ dans le repère polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

12- On considère trois chiens non alignés A, B et C, à la même distance $a = 30$ m les uns des autres à l'instant initial. Le chien A court constamment vers le chien B, B vers C, et C vers A, avec des vitesses de normes constantes et égales à $v = 4$ m.s^{-1}.

a) Quelles sont les positions respectives des trois chiens à un instant quelconque ?

b) En utilisant les coordonnées polaires, établir les équations différentielles de leurs mouvements. Quelles sont leurs trajectoires ?

c) Au bout de combien de temps les chiens se rencontrent-ils, et quelle distance auront-ils parcourue ?

13- Un mobile ponctuel M décrit une courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + \cos\theta)$$

où ρ_0 désigne une longueur constante. La trajectoire est décrite avec une vitesse angulaire constante ω, telle que $\theta = 0$ à $t = 0$, ce qui correspond à $\theta = \omega t$.

a) Déterminer, en fonction du temps, les composantes radiale v_ρ et orthoradiale v_θ, puis le module v de la vitesse $\vec{v}$ du mobile. En déduire que v est proportionnel à $\sqrt{\rho}$.

b) Déterminer, en fonction du temps, les composantes radiale a_ρ et orthoradiale a_θ, puis le module a de l'accélération $\vec{a}$ du mobile. En déduire que a est donné en fonction de ρ par :

$$a = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\sqrt{1 + 8\frac{\rho}{\rho_0}}$$

c) Dresser un tableau dans lequel seront consignées, aux instants correspondant à $\theta = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ et 2π, les valeurs prises par les grandeurs ρ/ρ_0, $v_\rho/\rho_0\omega$, $v_\theta/\rho_0\omega$, $a_\rho/\rho_0\omega^2$ et $a_\theta/\rho_0\omega^2$.

d) A chacun de ces instants, représenter sur un graphe les positions prises par le mobile M, et les vecteurs de la base polaire locale en M.

e) A chacun de ces instants, représenter sur ce même graphe les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$, et en déduire l'allure de la trajectoire du point M.

f) Que peut-on dire de la vitesse de M à son premier passage par l'origine O ? Le mobile s'y arrête-t-il ?

14- On considère l'hélice d'équation en coordonnées cartésiennes $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = h\theta$, parcourue par un point animé d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}_0$. (R et h sont des constantes).

a) Calculer les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques, puis en coordonnées intrinsèques.

b) Montrer que $\vec{v}$ fait un angle constant avec l'axe horizontal, et que $\vec{a}$ est toujours dirigée vers l'axe Oz.

c) Calculer le rayon de courbure.

d) Calculer l'abscisse curviligne que parcourt le point pendant un tour, θ variant de 0 à 2π.

15- On désigne par t le temps et on considère le mouvement ponctuel défini par :

$$x(t) = A(\cos\omega t - \frac{2}{3}\cos^3\omega t)$$

$$y(t) = \frac{2}{3}A\sin^3\omega t$$

$$z(t) = A\sin\omega t$$

On prendra $A > 0$ et $\omega = 1$ rad.s^{-1}.

Etudier ce mouvement : vitesse et accélération. Montrer que ce mouvement est uniforme. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps. Tracer la projection, sur le plan xOy, de l'hodographe relatif à l'origine, du mouvement de ce point, en indiquant dans quel sens il est décrit tout le long de la courbe.

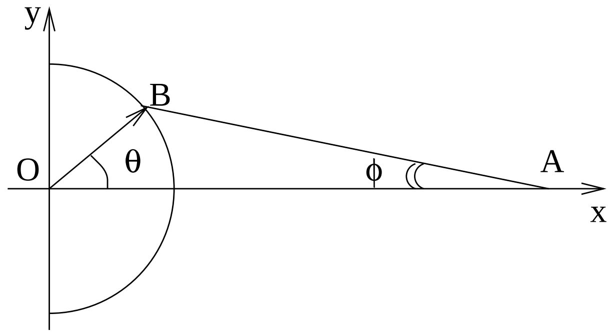
Un hodographe est le lieu des points M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \vec{v}(M)$, O étant un point fixe.

16- Une **manivelle** $\overrightarrow{OB}$, de longueur r, est mobile autour d'un axe de rotation passant par O, normal au plan de la figure (OBA). Le point B décrit un cercle de rayon $r = ||\overrightarrow{OB}||$ à la vitesse angulaire constante $\omega = d\theta/dt$, θ étant l'angle entre Ox et $\overrightarrow{OB}$.

La **bielle** BA, de longueur l, articulée en B et dont l'extrémité A décrit une trajectoire rectiligne suivant l'axe Ox, est repérée par l'angle ϕ que forme BA avec Ox. On posera $\lambda = r/l$.

a) Déterminer la relation liant r, θ, ϕ et l.

b) Calculer l'élongation $OA = x$ en fonction de l, θ et λ, soit $x = f(l, \theta, \lambda)$.



c) λ est une caractéristique de ce système, comprise entre les valeurs 0,20 et 0,33 : dans ces conditions, il est possible de considérer un développement limité de l'expression de x en fonction de λ, qu'on mettra sous la forme :

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t$$

Calculer A_0, A_1 et A_2.

d) Calculer la vitesse du point A.

e) Calculer l'accélération du point A. Représenter sur un graphe les variations de l'accélération en fonction de θ pour :

$0,20 < \lambda_1 < 0,25$

$0,25 < \lambda_1 < 0,33$

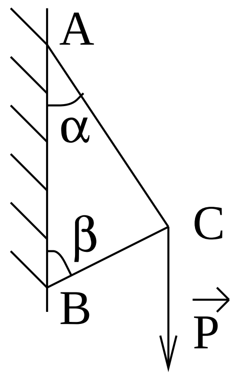
f) A.N. : $r = 49$ mm, $l = 186$ mm, $n = 3400$ tours.min^{-1}.

Calculer l'accélération pour les valeurs suivantes de θ, en radians : $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \theta_0$ et $\theta = 2\pi \pm \theta_0$, θ_0 étant la valeur de θ donnant à l'accélération sa valeur maximale.

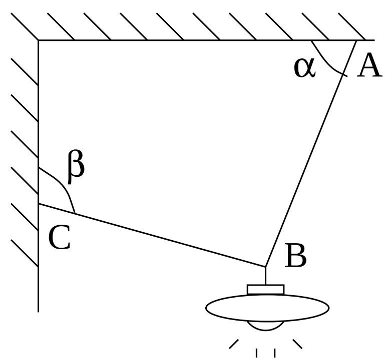
17- Une voiture roulant à 72 km/h est suivie par une voiture roulant dans le même sens à une célérité double. Le poursuivant, ne pouvant doubler, freine brusquement avec une accélération constante de module 4 m.s^{-2}, alors que la première voiture se met à accélérer avec une accélération uniforme de module 1.5 m.s^{-2}. A quelle distance minimale du pare-choc de la première voiture doit freiner la seconde pour éviter le choc ? Préciser la célérité des 2 véhicules et leurs positions respectives.

T.D. n^o 4 - Dynamique

1- a) Les barres AC et BC sont articulées en un point C, ainsi que sur un mur vertical aux points A et B. La force verticale $P = 1000$ N agit au point C. On néglige le poids des barres. Déterminer les réactions des barres sur le boulon d'articulation C, si, à l'équilibre de C, les angles formés par les barres avec le mur sont respectivement $\alpha = \pi/6$ et $\beta = \pi/3$.



b) Une lampe électrique pesant 20 N est suspendue au plafond par un cordon AB et tirée vers le mur par une corde BC. Déterminer les tensions T_A du cordon AB et T_C de la corde BC, si $\alpha = \pi/3$ et $\beta = 3\pi/4$.



2- Une fusée emporte un rat de masse 100 g. Elle est envoyée verticalement. Quand la fusée atteint l'altitude de 50 km, le carburant est épuisé. Sa vitesse est alors de 990 m.s^{-1}. On supposera que l'accélération de la fusée est uniforme pendant toute la montée et que l'accélération de la pesanteur ($\vec{g}$) est constante.

a) Quel est le poids apparent du rat pendant la montée, avant que le carburant ne soit totalement épuisé ?

b) Quel est le poids apparent du rat quand la fusée, après avoir atteint l'altitude maximale sur sa lancée, retombe vers la Terre ?

3- Une bille de masse m est attachée au point O fixe par un fil de longueur L. On la fait tourner autour de l'axe vertical Oz avec une vitesse angulaire constante ω. On note θ l'angle constant que fait le fil avec la verticale, et θ dépend de ω.

a) Quelle est la trajectoire de la bille ? Quel est son mouvement ?

b) Faire le bilan des forces. Donner la norme et la direction de la force résultante.

c) En déduire la relation entre θ et ω.

d) Montrer que si ω est plus petit qu'une valeur ω_1, le fil reste vertical ($\theta = 0$).

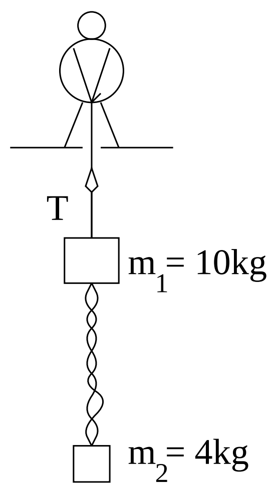
e) Tracer le graphe de θ en fonction de ω. Que vaut θ quand ω tend vers l'infini ?

f) Calculer la tension T du fil pour $\omega < \omega_1$ et $\omega > \omega_1$. Tracer le graphe de T en fonction de ω.

g) On suppose ω très grand. On coupe le fil. Décrire le mouvement ultérieur.

4- Pour chercher les clés de sa voiture, le conducteur pose son porte-documents sur le toit de celle-ci où, distrait, il l'oublie. Il démarre. A quelle condition conserve-t-il l'espoir de retrouver son porte-documents sur le toit ?

5- Un système de deux masses, reliées par une chaîne homogène de masse m égale à 2 kg, est soulevé par une personne qui exerce sur ce système une force $\vec{T}$ de norme 200 N. On utilise $||\vec{g}|| = 10$ m.s^{-2}.



a) Quelle est l'accélération du système ?

b) Quelle est la tension en haut de la chaîne ? Même question au milieu de la chaîne. Pourquoi cette tension n'est-elle pas partout la même ?

6- Une goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à l'action de l'air. En négligeant la poussée d'Archimède, l'action de l'air peut se réduire à une résistance proportionnelle à la vitesse $\vec{F}_v = -k\vec{v}$.

On abandonne une goutte d'eau, sans vitesse initiale et en atmosphère calme.

a) Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la goutte.

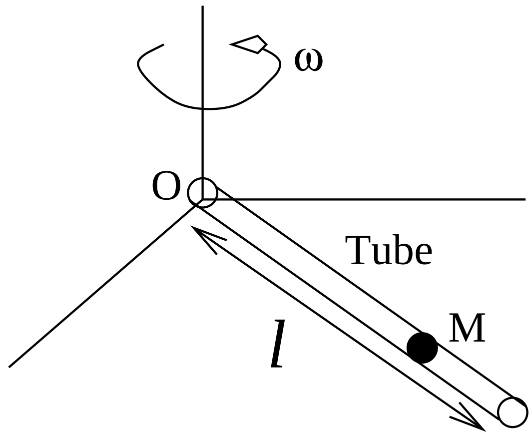
b) Montrer que la goutte atteint une vitesse limite de norme v_l, à exprimer en fonction de m, k et $g = ||\vec{g}||$.

c) Trouver l'expression de la vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps.

d) Calculer la durée de la chute pour que la vitesse limite soit atteinte à 1% près. Comparer cette durée à un temps caractéristique τ à définir.

On donne : $m = 1{,}00\ 10^{-6}$ kg, $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, $v_l = 5{,}00\ 10^{-3}$ m.s^{-1}.

7- Un tube cylindrique creux, de longueur l, tourne autour d'un point O fixe, dans un plan horizontal, à la vitesse angulaire ω constante (voir figure suivante). On place dans ce tube une petite bille M, de masse m, qui peut coulisser sans frottement.



a) Déterminer le mouvement de la bille dans le tube, en donnant en particulier l'évolution temporelle de la distance $\rho(t) = OM$, sachant que la bille est placée à l'instant initial, sans vitesse, à la distance d ($d < l$) de O.

b) Au bout de combien de temps la bille est-elle éjectée du tube ?

c) On attache maintenant la bille (toujours à l'intérieur du tube) à un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0, dont l'autre extrémité est fixée en O.

Montrer que la bille peut effectuer des oscillations harmoniques dans le tube, autour d'une position d'équilibre A, sous réserve que la raideur du ressort obéisse à une condition à préciser. Déterminer la position A.

8- On considère, dans un repère fixe $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le mouvement d'une particule de charge q ($q > 0$) placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ parallèle à $\vec{k}$. Au temps $t = 0$, la particule se trouve à l'origine O et possède une vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenue dans le plan xOz et faisant un angle α avec $\vec{k}$. On néglige l'action de la pesanteur, et on pose $qB/m = \omega$ (fréquence angulaire cyclotron).

a) Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit le mouvement de la particule.

b) Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire en coordonnées cartésiennes : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

c) En déduire la nature du mouvement de la particule dans le plan xOy et sur l'axe Oz.

d) On se place dans le cas où $\alpha = \pi/2$. Que devient le mouvement de la particule ? Etudier en particulier l'intersection de la trajectoire avec l'axe Oy. Pourrait-on sélectionner des particules de vitesse donnée ?

e) *Effet Hall.* La particule se déplaçant dans le plan xOy est soumise à un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{\imath}$, en plus du champ magnétique. Résoudre les équations du mouvement.

9- Une courbe d'autoroute horizontale a un rayon de 200 m.

a) Une voiture prend ce virage avec une célérité égale à 80 km/h. Quel est le coefficient de frottement minimum qui permet d'éviter tout glissement de la voiture ?

b) Si le virage est relevé et "ajusté" pour une célérité égale à 80 km/h, quel serait le coefficient de frottement nécessaire pour éviter tout glissement à une voiture qui prendrait ce virage à 120 km/h ?

10- Un ballon atmosphérique de masse totale M descend verticalement, à célérité constante. Outre son poids, ce ballon est soumis à la poussée d'Archimède, ainsi qu'à la résistance de l'air, supposée ne dépendre que de sa vitesse. Quelle est la masse de lest qu'il faut jeter par dessus bord pour que le ballon prenne un mouvement ascendant uniforme de même célérité ?

11- Le même homme monte sur un pèse-personne en divers points de la Terre. L'indication est-elle toujours la même ? Comparer les indications aux pôles, à Paris, à l'équateur.

12- Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

a) Un corps ne peut se déplacer sans qu'une force agisse sur lui ;

b) Toute variation de vitesse d'un corps exige l'action d'une force ;

c) Si l'énergie cinétique d'un corps est constante, aucune force ne s'exerce sur lui ;

d) Si la force exercée sur un corps devient et reste nulle, le corps s'arrête.

13- Un bateau avance en ligne droite, face au vent. Dans le référentiel fixe lié à la rive, la vitesse du bateau est v, celle du vent est V. Le vent exerce sur le bateau une force proportionnelle à la vitesse relative v_r du vent par rapport au bateau, de norme $||\overrightarrow{F}_1|| = k_1|v_r|$. L'eau exerce sur le bateau une force de frottement de norme $||\overrightarrow{F}_2|| = k_2|v|$.

a) Ecrire des formules algébriques pour F_1 et F_2, valables quel que soit le sens de v.

b) Calculer la force du moteur quand v est constante et positive.

c) Quelle est la vitesse limite du bateau quand le moteur est arrêté ? Même question si la force du moteur est une constante.

d) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par v. Dans quel(s) cas savez-vous la résoudre ?

14- Quand un corps tombe en chute libre dans le champ de pesanteur constant et uniforme :

a) Est-il soumis à une force constante ?

b) Son accélération est-elle d'autant plus grande que sa masse est plus grande ?

c) Sa vitesse augmente-t-elle proportionnellement à sa distance de chute ?

15- a) Dans le vide, on lâche simultanément de deux points à la même altitude deux balles de ping-pong, l'une remplie d'air et l'autre de sable.

Quelle est celle qui touche le sol la première ?

b) Même question dans l'air.

16- Dans un avion, un passager pose une bille sur la tablette horizontale devant lui. Décrire le mouvement de la bille tel qu'il est vu par le passager si :

a) l'avion a un mouvement rectiligne uniforme.

b) l'avion accélère en ligne droite.

c) l'avion tourne dans un plan horizontal vers la droite ou vers la gauche.

17- Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 est fixé au plafond d'un ascenseur. A son extrémité est attachée une masse m. On rappelle que la force qu'exerce un ressort est proportionnelle à l'allongement : $||\overrightarrow{F}|| = k|\Delta l|$. On s'intéresse uniquement à l'état d'équilibre de m pour un observateur situé dans l'ascenseur. Calculer l'allongement Δl du ressort dans les différents cas suivants :

a) L'ascenseur est arrêté et m est en équilibre.

b) L'ascenseur monte avec une vitesse uniforme.

c) L'ascenseur descend avec une vitesse uniforme.

d) L'ascenseur monte avec une accélération constante de norme $g/10$.

e) L'ascenseur descend avec une accélération constante de norme $g/10$.

18- Soit un ressort horizontal en train d'osciller. Quelles sont les positions du ressort pour lesquelles l'accélération du mouvement est nulle ? Celles où elle est la plus importante ? Répondre d'abord intuitivement, puis en utilisant le principe fondamental de la dynamique.

19- On fait tourner une pierre au bout d'une ficelle de longueur d dans un plan vertical. Quelle est la valeur minimum que peut prendre la vitesse de la pierre au point le plus haut du cercle, c'est-à-dire pour que la ficelle reste tendue en ce point ?

T.D. n^o 5 - Travail et énergie

1- On s'intéresse à la dynamique d'une particule se déplaçant sur un axe xx' et soumise au potentiel $V(x)$ représenté sur la figure suivante. On veut étudier qualitativement le mouvement de la particule pour différentes valeurs de son énergie mécanique E_m.
Lorsque $x \to +\infty$, le potentiel décroît en loi de puissance : $V(x) \simeq C/x^{2\alpha}$.

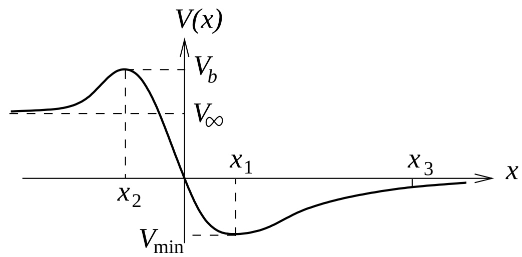


FIG. 1:

Pour chacun des cas ci-dessous, décrire qualitativement le mouvement, puis tracer l'allure de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$:

a) Lorsque $E_m < 0$, avec les conditions initiales : $x(0) = x_1$ et $\dot{x}(0) > 0$.

Exprimer la période du mouvement comme une intégrale d'une fonction du potentiel.

Dans les cas suivants, on pourra rechercher le comportement de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$ pour $t \to \infty$ par intégration de l'équation de conservation de l'énergie par rapport au temps.

b) Lorsque $0 < E_m < V_b$, avec les conditions initiales $x(0) = x_3$ et $\dot{x}(0) < 0$.

c) Lorsque $E_m = 0$, avec les conditions initiales $x(0) = x_1$ et $\dot{x}(0) < 0$.

d) Lorsque $E_m > V_b$, avec les conditions initiales $x(0) = x_3$ et $\dot{x}(0) < 0$.

2- Si une force de 100 N est nécessaire pour allonger de 0,5 cm un ressort ayant une longueur au repos de 25 cm, calculer le travail effectué pour l'allonger de 27 cm à 30 cm.

3- Quel travail doit-on fournir pour, à vitesse constante, élever une masse M d'une même hauteur h, soit verticalement, soit en tirant sans frottement sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale ?

Quelle puissance doit-on développer pour effectuer ce travail ?

Quel est le travail du poids pendant ce mouvement ? Est-il positif ou négatif ? Comment le travail à fournir serait-il modifié s'il existait des forces de frottement sur l'air ou sur le plan incliné ?

4- Déterminer le travail effectué par la force $\overrightarrow{F}$ quand celle-ci déplace une particule depuis l'origine $O(0,0,0)$ jusqu'au point $C(1,1,1)$:

- le long des segments de droite OA, puis AB, puis BC, avec $A(1,0,0)$ et $B(1,1,0)$;
- le long du segment de droite OC ;

dans chacun des deux cas suivants et dire à chaque fois si la force $\vec{F}$ est conservative.

a) $\vec{F} = K\left(x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + 3z\vec{k}\right)$

b) $\vec{F} = K\left[(y+z)\vec{\imath} + (x+z)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}\right]$

De quelles énergies potentielles ces forces derivent-elles ?

5- Un réservoir conique possède une section supérieure de 4 m de diamètre et une profondeur de 5 m. Il contient un liquide de poids volumique ω N/m^3. La surface du liquide est à 3 m du fond. Calculer le travail nécessaire pour élever le liquide à 1 m au dessus du réservoir.

6- a) Quel travail doit-on fournir pour élever une masse M, initialement au repos, d'une hauteur h selon un mouvement uniformément accéléré ?

b) Quelle puissance doit-on développer pour faire effectuer ce mouvement à la masse ? Est-elle constante au cours du temps ?

c) Quelles sont alors les variations d'énergie potentielle et cinétique correspondantes ?

d) Si, à la fin de l'accélération, on lâche la masse M, jusqu'à quelle hauteur va-t-elle monter ? Quelles sont alors son énergie potentielle et son énergie cinétique ?

7- a) Calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique totale d'un satellite en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Commenter les valeurs et les signes de ces différentes quantités. On donne le rayon de la Terre $R_T = 6370$ km, sa masse $M_T = 5,97\,10^{24}$ kg, et $G = 6,672\,10^{-11}$ SI.

b) Comment ces quantités, ainsi que la vitesse orbitale, varient-elles avec le rayon de l'orbite ? De combien varieraient-elles si r variait d'une faible distance dr ?

c) Pour quelle altitude la vitesse orbitale est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ?

d) Quelle est l'orbite d'un satellite géostationnaire (immobile, vu de la Terre) ? Quelle est sa vitesse orbitale ? Quel peut être son intérêt ?

8- Un positron de charge e, de masse m, est lancé en direction d'un ion lourd, de charge e, supposé immobile en O. Le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox. La vitesse initiale quand le proton est à l'infini est $-v_0\vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$. La force qui s'exerce sur le proton est $\vec{F} = ke^2\vec{u}_x/x^2$ où k est une constante positive.

a) Décrire qualitativement le mouvement.

b) Ecrire l'équation différentielle pour x. Sait-on la résoudre ?

c) Calculer le travail de $\vec{F}$ sur le segment AB, A d'abscisse $a > 0$, B d'abscisse $b > a$. Que devient ce travail quand b tend vers l'infini ?

d) Calculer l'énergie potentielle $U(x)$ avec $U(\infty) = 0$. Vérifier le théorème de l'énergie potentielle. Tracer le graphe de $U(x)$.

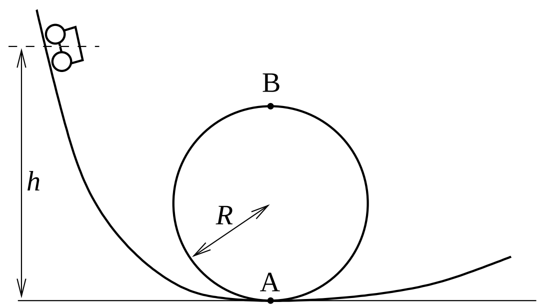
e) Exprimer l'énergie mécanique E en fonction de x, de $\dot{x}$ et des constantes. Expliquer pourquoi elle se conserve. Donner sa valeur en fonction de m et v_0.

f) Montrer que x ne peut pas prendre des valeurs trop petites. Calculer x_{min}.

g) A.N. : On donne $k = 9\,10^9$ N.m^2.C^{-2}, $v_0 = 2\,10^6$ m.s^{-1}, $e = 1,6\,10^{-19}$ C, $m = 9,1\,10^{-31}$ kg. Calculer x_{min}.

h) Le proton passe deux fois au même point. Comparer les deux vitesses. Exprimer la vitesse en fonction de v_0, x et x_{min}. Calculer la vitesse quand le proton est à l'abscisse $2x_{min}$.

9- Un chariot roule sans frottement sur un rail faisant une boucle de rayon R, comme représenté sur la figure suivante. Il est laché d'une hauteur h sans vitesse intiale. On souhaite déterminer la hauteur minimale $h_{\min}$ de laquelle le chariot doit être laché, pour qu'il reste en contact avec le rail tout en tournant à l'intérieur de la boucle.



a) Faire le bilan des forces.

b) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans le repère intrinsèque. Que devient-elle en particulier lorsque le chariot est au sommet de la boucle, en B ? Déduire une condition sur v_B, la vitesse du mobile en B, pour que le chariot reste en contact avec le rail.

c) A l'aide de la question précédente, déduire quelle est la hauteur minimale $h_{\min}$ en fonction de R.

10- Le point M se déplace dans le plan Oxy. Il est soumis à la force $\vec{F} = Ky\vec{u}_x + Kx\vec{u}_y$, où K est une constante positive. On considère les points $A(a, 0)$, $C(0, 2a)$ et $B(a, 2a)$.

a) Calculer le travail de $\vec{F}$ sur les segments OA, AB, OC et CB. En déduire le travail sur les chemins OAB et OCB. Peut-on en conclure que la force est conservative ?

b) Démontrer que la force est conservative.

c) Calculer l'énergie potentielle $U(x, y)$ en prenant comme origine $U(0, 0) = 0$. Vérifier que les travaux calculés en a) obéissent au théorème de l'énergie potentielle.

d) Sur un même schéma, tracer quelques lignes équipotentielles et la force en quelques points.

11- Le point M se déplace dans le plan Oxy. Il est soumis à la force $\vec{F} = 2Kxy\vec{u}_x + Kx^2\vec{u}_y$, où K est une constante positive.

a) Démontrer que la force est conservative.

b) Calculer l'énergie potentielle $U(x, y)$ en prenant comme origine $U(0, 0) = 0$.

c) Quel est le travail de $\vec{F}$ sur un cercle de centre O, de rayon R ? sur un demi-cercle allant de O au point $A(a, 0)$?

d) Sur un même schéma, tracer deux lignes équipotentielles correspondant l'une à $U > 0$, l'autre à $U < 0$.

12- Une particule M se déplace dans le plan Oxy sous l'action d'une force unique $\vec{F} = -k\vec{u}_r/r^2$, où $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ et k est une constante positive. Les coordonnées polaires de M sont r et θ.

a) Calculer le travail de $\vec{F}$ sur un cercle de centre O de rayon R.

b) Calculer le travail de $\vec{F}$ sur un segment de l'axe Ox, x variant de x_1 à x_2, avec $0 < x_1 < x_2$.

c) $\vec{F}$ est conservative. Calculer son énergie potentielle $U(r, \theta)$. On donne en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U(r,\theta) = \frac{\partial U}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta$$

d) A $t = 0$, M est sur Ox à la distance r_0 de O, sa vitesse est v_0 quelconque. Calculer la norme de sa vitesse à un instant t_1 où $OM = 2r_0$.

13- Un champ de force $\vec{F}$ est donné dans le plan Oxy par ses composantes cartésiennes : $F_x = -ky$ et $F_y = kx$, où k est une constante positive. Soit A et B deux points de l'axe Ox d'abscisses respectives a et $-a$.

a) Calculer le travail de $\vec{F}$ lors d'un déplacement de A à B suivant l'axe Ox.

b) Montrer que $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$.

c) Calculer le travail de $\vec{F}$ lors d'un déplacement de A à B suivant un demi-cercle de centre O et de rayon a.

d) $\vec{F}$ dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

14- On donne $g = 9,8$ m.s^{-2}.

a) Quelle est l'énergie potentielle d'une masse de 1 kg à 1 km d'altitude ? L'énergie potentielle est supposée nulle à la surface du sol.

b) Quelle est l'énergie cinétique quand cette masse, lâchée à 1 km d'altitude, touche le sol ? Négliger le frottement.

c) Quelles sont les énergies cinétique et potentielle au milieu de la chute ? Commentaire.

15- Une particule chargée est soumise uniquement à un champ magnétique.

a) A quelle force est-elle soumise ?

b) Celle-ci dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

c) Que peut-on dire de la vitesse de la particule ?

16- On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini.

a) Quelle est l'énergie potentielle d'une masse de 1 kg à la surface de la Terre ? On donne le rayon de la Terre : $R = 6370$ km.

b) Quelle est l'énergie potentielle d'une masse de 1 kg à 10^5 km du centre de la Terre ?

c) Quel est le travail nécessaire pour déplacer cette masse de 1 kg depuis la surface de la Terre jusqu'à 10^5 km du centre de la Terre ?

17- Un point matériel M se déplace en frottant sur un rail rectiligne horizontal. La norme de la force de frottement solide est constante, égale à kmg. La position du point est repérée par son abscisse x. A $t = 0$, M est en $x = 0$ et il est lancé avec la vitesse v_0.

a) La force de frottement est-elle conservative ?

b) Calculer son travail quand x varie de 0 à x.

c) En déduire la vitesse de M en fonction de x.

d) M s'arrête-t-il ? Si oui, où ?

18- Un point matériel M se déplace en frottant sur un rail circulaire horizontal de rayon R. La norme de la force de frottement solide est constante, égale à kmg. La position du point est repérée par l'angle polaire θ. A $t = 0$, M est en $\theta = 0$ et il est lancé avec la vitesse v_0.

a) La force de frottement est-elle conservative ?

b) Calculer son travail quand θ varie de 0 à θ.

c) En déduire la vitesse de M en fonction de θ.

d) M s'arrête-t-il ? Si oui, où ?

19- Un champ de forces est donné par ses composantes cartésiennes :

$$F_x = kz \quad F_y = kz \quad F_z = k(x + y)$$

a) Montrer que $\vec{F}$ est conservative.

b) Calculer l'énergie potentielle associée.

T.D. n^o 6 - Oscillateur harmonique
Equations différentielles

1- Un point M de masse m se déplace sur un axe Ox. Son abscisse est fonction du temps, de la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

a) Définir les termes : amplitude, pulsation, période, fréquence, phase, phase à l'origine. Donner leurs dimensions et leurs unités.

b) Calculer la vitesse $v(t)$, la quantité de mouvement $p(t) = mv(t)$, et l'énergie cinétique en fonction de p.

c) Calculer l'accélération, la force résultante en fonction de x et l'énergie potentielle en fonction de x.

d) En déduire l'énergie mécanique E_m en fonction de p et de x. Est-elle constante au cours du temps ?

2- Une masse ponctuelle m est suspendue à un ressort dont l'autre extrémité O est fixe. On appelle k la raideur du ressort et l_0 sa longueur vide. L'axe Oz est vertical descendant.

a) Ecrire l'équation du mouvement vertical de la masse sous l'action conjuguée de la pesanteur et du ressort.

b) Trouver l'abscisse z_{eq} de la position d'équilibre. Est-elle stable ?

c) Calculer l'énergie potentielle totale. Tracer son graphe en fonction de z. Retrouver les résultats de b).

d) On pose dans la suite $Z = z - z_{eq}$. Exprimer l'énergie potentielle en fonction de Z, l'énergie cinétique en fonction de $\dot{Z}$, et l'énergie mécanique.

e) A partir du théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement pour $Z(t)$. La résoudre et en déduire la solution $z(t)$. Tracer le graphe de $Z(t)$ et celui de $z(t)$.

f) Quels sont les paramètres qui modifient z_{eq} et la période des oscillations ?

3- Une particule est libre de se déplacer dans le plan (x, y) sous l'action d'une force $\vec{F} = -C(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = -C\vec{r}$ dirigée vers l'origine (avec $C > 0$). En supposant que la masse de la particule est M, déterminer les équations du mouvement en x et y et les résoudre.

a) A quelle(s) condition(s) le mouvement est-il un cercle ? Quelle est alors la période ?

b) Mêmes questions si le mouvement a lieu le long d'une direction à 45^o de l'axe des x.

4- Un bouchon flotte verticalement dans un liquide de masse volumique ρ. On considère que le bouchon est un cylindre de hauteur h, de section droite S et de masse m. On pose $\rho_c = m/Sh$.

a) Déterminer la position d'équilibre du cylindre, c'est-à-dire la hauteur h_{eq} immergée. Exprimer h_{eq} en fonction de h.

b) Le bouchon est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale. Déterminer les caractéristiques du mouvement dans le cas où on néglige les frottements.

5- Pour l'étude de ses oscillations verticales, une automobile est modélisée par un point matériel de masse $M = 715$ kg en contact avec la route par l'intermédiaire d'un système ressort-amortisseur fluide.

a) En l'absence de fluide, on observe que l'automobile descend de $a = 3$ cm lorsqu'un passager de masse $m = 80$ kg monte à l'intérieur. Déterminer la raideur du ressort. La présence de fluide changerait-elle quelque chose à la mesure ?

b) Pour tester le ressort, le garagiste appuie verticalement sur l'automobile de façon à ce qu'elle descende encore de la longueur a par rapport à sa position d'équilibre avec passager.

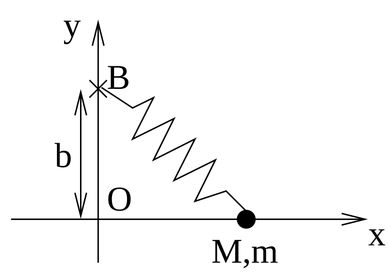
- Quel travail doit-il fournir pour cette opération ?

- On appelle z le déplacement de l'automobile mesuré à partir de la position d'équilibre, positif si le déplacement est vers le haut. Donner l'énergie potentielle $U(z)$ du système en prenant $U(0) = 0$ à l'équilibre.

- En écrivant la conservation de l'énergie mécanique du système, décrire le mouvement de l'automobile après que le garagiste l'a lâchée. Déterminer la période propre des oscillations.

c) Le garagiste introduit dans l'amortisseur un fluide tel qu'apparaît une force de freinage des oscillations de la forme $\overrightarrow{F_f} = -f\vec{v}$. Ecrire la variation d'énergie mécanique du système pendant le temps dt. En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'automobile lorsqu'elle est à nouveau descendue de a puis lâchée. Déterminer la pseudo-période des oscillations et la valeur de f pour que l'amplitude a_2 de la deuxième oscillation soit $a_2 = a/e$.

6- Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sur un axe horizontal Ox. Il est attaché à un ressort dont l'autre extrémité B est fixe sur l'axe vertical Oy à la distance b de O. On note k la constante de raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide et x l'abscisse de M. On se place dans le cas où $b > l_0$ et on néglige les frottements.



a) Donner l'expression de l'énergie potentielle $U(x)$ de M. Calculer l'abscisse de la position d'équilibre stable. Tracer qualitativement le graphe de $U(x)$.

b) On s'intéresse uniquement aux petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre. Ecrire le développement limité de $U(x)$ au deuxième ordre en x au voisinage de 0. Vérifier qu'on peut mettre $U(x)$ sous la forme : $U(x) = U_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ où U_0 et ω sont des constantes. Donner ω en fonction de k, m, b et l_0. Il est inutile de calculer U_0.

c) Calculer en fonction de x la force qui s'exerce sur M. Etablir l'équation différentielle du mouvement en x. La résoudre en général puis dans le cas particulier où les conditions initiales à $t = 0$ sont $x = x_0$ et la vitesse est nulle.

d) Quelle condition doit remplir x_0 pour que l'approximation faite à la question b) soit justifiée ?

e) Comment évolue le système lorsque b diminue ? Que peut-on dire si $b = l_0$?

7- Une particule de masse m se déplace le long d'un axe $\overrightarrow{Ox}$ sous l'action d'une force $F(x)$ à circulation conservative, dérivant de l'énergie potentielle :

$$U(x) \;=\; 2\,a\,U_0\,\frac{x}{x^2+a^2}$$

où a et U_0 sont des constantes positives.

a) Quelles sont les dimensions et les unités de a et U_0 ?

b) Donner l'expression de la force $\vec{F}$ à laquelle est soumise la particule en une position x quelconque. Etudier son signe.

c) Tracer soigneusement le graphe de $U(x)$ pour x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

d) Trouver la ou les positions d'équilibre de M et discuter leur stabilité.

e) Exprimer l'énergie mécanique de M en fonction de x et de sa vitesse v.

f) La particule est lâchée à un instant $t = 0$ depuis la position $x_0 = a/2$, sans vitesse initiale. Dans quelle direction se dirige-t-elle ? Quelle est sa vitesse v_e lorsqu'elle atteint la position d'équilibre stable ? Quel est son mouvement ultérieur ? Quelle est sa vitesse à l'infini ?

g) La particule est maintenant lâchée à l'instant $t = 0$ depuis une position proche de la position x_e d'équilibre stable, et on étudie les petits mouvements autour de cet équilibre.

- Donner le développement en série, limité au second ordre, de l'énergie potentielle $U(x)$ autour de la position $x = x_e$. Montrer qu'il s'écrit :

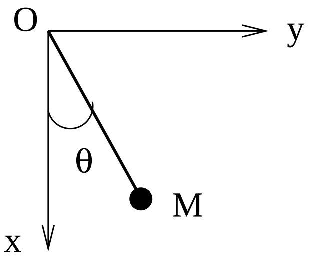
$$U(x) \;=\; U_0\,[\,-1\,+\,\frac{(x-x_e)^2}{2a^2}\,]$$

- On pose $u = x - x_e$. Ecrire l'énergie mécanique de la particule, en fonction de u et de sa dérivée $\dot{u} = du/dt$. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
- Quelle est la nature du mouvement ? Donner sa période propre T_0.

h) A un autre instant $t = 0$, la particule est lâchée sans vitesse initiale du point O. Calculer sa vitesse en fonction de x. Décrire qualitativement le mouvement : sens, accéléré ou freiné, points d'arrêt, etc...

8- Un pendule simple est formé par une tige rigide OM de masse négligeable, de longueur R et à l'extrémité de laquelle est fixée une bille M supposée ponctuelle, de masse m. La tige OM peut se déplacer dans le plan vertical Oxy, et sa position est repérée par son angle polaire $\theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, où $\overrightarrow{Ox}$ est l'axe polaire formé par la verticale descendante. L'ensemble "tige-bille" plonge dans un liquide qui introduit une force de frottement visqueux $\vec{f} =$

$-\mu\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse de la bille et μ une constante positive, appelée coefficient de viscosité du liquide.



a) Définir clairement la base locale $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ des coordonnées polaires, liée au point M. Donner dans cette base l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, puis de la vitesse $\vec{v}(t)$ et de l'accélération $\vec{a}(t)$ du point M.

b) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, déduire les équations différentielles vérifiées par θ. Que devient l'équation différentielle du second ordre si on suppose que θ reste petit à tout instant ?

c) On suppose θ petit dans toute la suite de l'exercice. La bille est abandonnée à l'instant initial $t = 0$ depuis la position $\theta(0) = 0$, avec une vitesse initiale $v(0) = V_0$. On s'intéresse exclusivement au cas où la particule revient le plus rapidement possible à sa position d'équilibre.

- Quelle valeur R_c faut-il donner à la longueur de la tige pour être dans ce régime particulier ?

- Dans ces conditions, montrer que la loi horaire du mouvement est donnée par :

$$\theta(t) = \frac{V_0}{R_c} t \, \exp[-\left(\frac{\mu t}{2m}\right)]$$

- Donner l'expression de la vitesse $v(t)$ du mobile.

- Donner l'allure du graphe de $\theta(t)$ en fonction de t. A quel instant t_0 le pendule atteint-il son élongation maximale θ_{max} ? Donner la valeur de θ_{max}.

d) Pour $t > t_0$, déterminer la valeur maximale de la vitesse, $v_1 = v(t_1)$, ainsi que l'instant t_1 correspondant et donner l'allure du graphe de $v(t)$ en fonction de t.

e) En utilisant un développement limité au second ordre en θ, donner l'expression de la tension $N(t)$ de la tige, en fonction de $\theta(t)$ et $v(t)$.

f) Déterminer la valeur N_0 de la tension à l'instant t_0 défini ci-dessus et donner son expression en fonction des constantes m, g, μ et V_0.

9- On considère les oscillations forcées d'un oscillateur mécanique à une dimension, soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω. L'oscillateur est amorti par un frottement fluide.

a) Etudier les variations en fonction de ω de l'amplitude de l'oscillateur et du déphasage entre l'amplitude et l'excitation ? Représenter ces variations sur un graphe. Le maximum de l'amplitude se produit-il à la pulsation propre de l'oscillateur ?

b) Etudier les variations en fonction de ω de l'amplitude de la vitesse de l'oscillateur et du déphasage entre la vitesse et l'excitation ? Représenter ces variations sur un graphe. Le maximum de la vitesse se produit-il à la pulsation propre de l'oscillateur ?

c) Représenter l'analogue électrique de cet oscillateur et proposer un montage qui permette d'étudier l'équivalent de la résonance d'amplitude et de la résonance de vitesse.

T.D. n^o 7 - Systèmes et chocs

1- Deux boules A et B formant un système isolé et assimilables à des points matériels de masses respectives m_A et m_B, subissent un choc frontal élastique. On désigne par $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ leurs vitesses respectives avant le choc, et par $\vec{v}'_A$ et $\vec{v}'_B$ leurs vitesses respectives après le choc.

a) Quelles équations de conservation peut-on écrire pour ce choc ?

b) Montrer que les valeurs algébriques v'_A et v'_B des vitesses après le choc s'écrivent :

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B$$

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B$$

c) On pose $k = m_A/m_B$ et $\alpha = v_B/v_A$. A quelle condition sur k et α la boule A est-elle arrêtée ?

2- On considère trois boules A, B et C pouvant se déplacer sur une horizontale Ox, avec un mouvement uniforme, et dont les masses sont telles que $m_A = m_C = km_B$ (avec $k \geq 1$). On supposera que tous les chocs sont élastiques.

a) *Cas où* $k = 3$ *:* Les boules A et C étant initialement au repos, la boule B, située entre A et C, est animée d'une vitesse $\vec{v}_0$.

- Déterminer la vitesse de chaque boule après la première collision de B sur C.

- Décrire la deuxième collision qui se produit, et donner les vitesses de chaque boule après ce choc.

- Quel est le nombre total de collisions entre les trois boules A, B et C ?

b) *Cas où* k *est quelconque :* Les trois boules, toujours alignées, sont maintenant initialement en contact, au repos, dans l'ordre A, C, B. Une autre boule D, de masse égale à celle de A et C ($m_A = m_C = m_D$), animée d'une vitesse $\vec{v}_0$, entre en collision parfaitement élastique avec la file du côté de A.

- Montrer qu'en général il est impossible que seule la masse B soit éjectée. Discuter le cas particulier où toutes les boules ont la même masse ($m_A = m_B = m_C = m_D$, soit $k = 1$).

- En supposant que seules les boules B et C sont éjectées, exprimer les vitesses finales de B et C, v'_B et v'_C, en fonction de v_0 et k.

Les boules B et C peuvent-elles, après cette éjection, subir une nouvelle collision ?

Pour quelle valeur de k l'énergie cinétique se répartit-elle à 50% entre B et C ?

3- Le curling ressemble au jeu de pétanque. Il s'agit de placer des "pierres" le plus près possible d'une cible. Les pierres, de forme à peu près ellipsoïdales (et considérées ici comme ponctuelles) sont lancées sur la glace d'une patinoire et les frottements sont faibles. Toutes les pierres ont la même masse m.

Pour chasser une pierre (2) de l'adversaire, un joueur lance sa pierre (1) qui arrive avec une vitesse $\vec{v}_1$, de norme $v_1 = 2$ m.s^{-1} au moment de l'impact. On note $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ les vitesses des deux pierres après le choc dans le référentiel (R) de la patinoire. On suppose le choc parfaitement élastique.

a) Calculer la vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse du système des deux pierres dans (R) avant le choc. Que vaut-elle après le choc ?

b) On appelle (R_G) le référentiel du centre de masse et la vitesse d'une pierre dans ce référentiel est notée $\vec{u}$. Calculer $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Ecrire une relation entre $\vec{u}_1'$ et $\vec{u}_2'$ et calculer leurs normes. Faire un schéma des vitesses dans (R_G).

c) Après le choc, on suppose que la vitesse $\vec{v}_2'$ a même direction et même sens que $\vec{v}_1$. Calculer $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$. Commentaire.

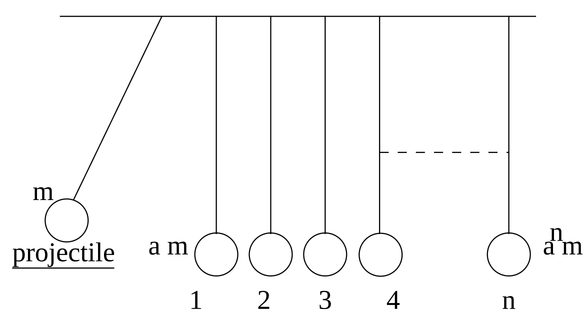
d) On suppose à présent qu'après le choc, $\vec{v}_1'$ fait l'angle θ avec $\vec{v}_1$. Calculer l'angle $(\vec{v}_1', \vec{v}_2')$ et les normes de $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ en fonction de $\vec{v}_1$ et θ.

Montrer que θ ne peut pas être supérieur à $\pi/2$. Faire un schéma à l'échelle représentant les vitesses $\vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'$, $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$.

Donner deux solutions aux questions posées, l'une algébrique et l'autre géométrique.

Application numérique : $\theta = \pi/3$.

4- Considérons le système de billes suspendues illustré ci-dessous. Les centres de masse des billes sont alignés suivant une droite et leur distance respective est petite par rapport à la longueur des fils de suspension.



Soit m la masse de la bille projectile, am la masse de la bille n^{o}1, et ainsi de suite, $a^n m$ la masse de $n^{\text{ème}}$ bille, avec a constante positive. La bille projectile se déplace avec la vitesse v suivant la direction reliant les centres de masse du système de billes. Elle percute la bille n^{o}1 en induisant une suite de chocs successifs.

a) En supposant que tous les chocs sont élastiques, calculer la vitesse et l'énergie cinétique de la $n^{\text{ème}}$ bille.

b) Comparer le résultat précédent avec le cas d'un choc direct entre la bille projectile et la $n^{\text{ème}}$ bille. Examiner en particulier le cas où a est proche de 1.