S3-MIAS. Physique Statistique — 17 janvier 2005
Université Paris-Sud

TD 2 : Probabilités

0 Définitions

Probabilités

Considérons une expérience lors de laquelle deux évènements peuvent se produire aléatoirement (par exemple, si on jette une pièce, elle retombe soit du côté pile, soit du côté face). On note ces évènements e_1 et e_2. Si on réalise N fois l'expérience, e_1 se produit N_1 fois et e_2 N_2 fois ($N = N_1 + N_2$). La probabilité pour que l'évènement e_n se produise est notée p_n. Par définition :

$$p_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{N_1}{N} \text{ et } p_2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N_2}{N} .$$

Notons que

$$p_1 + p_2 = 1 ;$$

c'est la condition de *normalisation*.

Valeur moyenne

La discussion précédente se généralise sans peine au cas de M évènements $e_1, \cdots, e_M$.

Si on considère une quantité A prenant la valeur A_m lorsque e_m se produit, la valeur moyenne de A est :

$$\langle A \rangle = \sum_{m=1}^{M} p_m A_m .$$

Écart type

On définit l'écart type (ou variance) ΔA comme :

$$\Delta A^2 = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \sum_{m=1}^{M} p_m A_m^2 - \left(\sum_{m=1}^{M} p_m A_m \right)^2 .$$

ΔA indique l'ordre de grandeur des fluctuations de A autour de sa valeur moyenne $\langle A \rangle$.

1 Jeu de dés

On joue avec un dé à 6 faces. Quels sont les évènements possible lors d'un lancer ? Quelles sont les probabilités associées ?

a) Au jeu des petits chevaux, si on tire $n \in \{1, \cdots, 6\}$ on avance de $l = n$ cases. De combien de cases avance-t-on en moyenne à chaque fois ? Quel est l'écart type ?

b) On choisit maintenant d'avancer de $l = n^2$ si on tire n avec le dé. Quels sont la moyenne et l'écart type de l ?

c) On revient à la situation de la question *a* : à chaque lancer du dé on avance de $l = n$ cases. On appelle L_N la distance totale dont on a avancé aprés N lancers du dé : $L_N = \sum_{n=1}^{N} l^{(n)}$. Quelle est la distance minimale (resp. maximale) $L_{\min}$ (resp. $L_{\max}$) dont on pourrait avoir avancé aprés N lancers ? Calculer $\langle L_N \rangle$ et l'écart type ΔL. Comparer et interpréter leurs dépendances en fonction de N.

2 Distribution binomiale et marche au hasard

On considère deux évènements $\{e_1, e_2\}$ se produisant avec des probabilités p_1 et $p_2 = 1 - p_1$. On réalise N expériences parmi lesquelles e_1 est réalisé n fois avec une probabilité P_n^N.

Exemple d'une telle situation : un marcheur évolue sur une droite. À chaque pas, il fait un saut vers la droite (e_1) ou un saut vers la gauche (e_2). Après N pas, il aura fait n sauts vers la droite et $N - n$ sauts vers la gauche. Quelle distance a-t-il parcourue ?

1. Quelle est la valeur moyenne de n ? De quelle distance le marcheur aura-t-il avancé en moyenne après N pas ?

2. On considère une séquence de N évènements successifs choisis parmi e_1 et e_2. Quel est le nombre de séquences possibles ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'une séquence donnée $(e_1, e_1, e_2, \cdots, e_2, e_1)$ contenant n fois e_1 et $N - n$ fois e_2 se produise ?

3bis. Soient deux séquences contenant n fois e_1 : $(e_1, e_1, e_2, e_1 \cdots)$ et $(e_1, e_2, e_1, e_1 \cdots)$. Quelles sont les probabilités associées ?

4. *Loi binomiale.* Quelle est la probabilité P_n^N pour que parmi une séquence de N évènements, e_1 se produise n fois ? Vérifier que la distribution est normalisée.

5. *Moyenne et écart type de n.* On propose une méthode pour calculer facilement la moyenne et l'écart type.
a) On définit la fonction :

$$g^N(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} s^n \, P_n^N \ ,$$

appelée fonction génératrice. Montrer que $\left.\frac{\mathrm{d}g^N(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=1} = \langle n \rangle$ et que $\left.\frac{\mathrm{d}^2 g^N(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=1}$ est relié à $\langle n^2 \rangle$.
b) Calculer explicitement $g^N(s)$ à l'aide de l'expression de P_n^N trouvée à la question 4.
c) Déduire $\langle n \rangle$ et $\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$. Pour quelle valeur de p_1 les fluctuations sont-elles maximales ? Comparer les dépendances en N de $\langle n \rangle$ et σ.

6. *Application : marche aléatoire.* On considère un marcheur se déplaçant sur une ligne. Tous les Δt, il fait un saut de $\Delta x = a$ vers la droite (avec probabilité p_1) ou vers la gauche (avec probabilité $p_2 = 1 - p_1$).
a) Donner la probabilité $\mathcal{P}_m^N$ pour que le marcheur soit sur le site $m \in \mathbb{Z}$ après avoir fait N sauts (*i.e.* pour qu'il soit en $x = ma$ après un temps $t = N\Delta t$).
b) Calculer la vitesse moyenne du marcheur, définie comme :

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{\langle x(t) \rangle}{t} \ ,$$

puis la constante de diffusion

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{\langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2}{t} \ .$$

c) Pour simplifier on choisit de fixer $p_1 = 1/2$ jusqu'à la fin de l'exercice.
• Que valent alors V et D ?
• Dans la limite $N \to \infty$, montrer que $\mathcal{P}_m^N$ tend vers une distribution gaussienne. Pour cela calculer $\ln \mathcal{P}_m^N$ dans la limite $N \gg |m| \gg 1$ en utilisant la formule de Stirling $\ln N! \simeq N \ln N - N$.
• Justifier *a posteriori* l'hypothèse $N \gg |m|$.