TD n$^{\text{o}}$5 : Formule de Feynman-Kac

1 La loi de l'arcsinus

Formule de Feynman-Kac.– La formule de Feynman-Kac[1] permet d'étudier la distribution de fonctionnelle du mouvement brownien du type : $T[x(\tau)] = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, U(x(\tau))$. Nous notons $P_t(T)$ la distribution de la fonctionnelle sur les processus de Wiener $(x(\tau)\,, 0 \leqslant \tau \leqslant t |\, x(0) = x_0)$. La double transformée de Laplace :

$$\int \mathrm{d}x\, Q(x,\alpha;p) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^\infty \mathrm{d}T\, \mathrm{e}^{-pT}\, P_t(T) \tag{1}$$

obéit à l'équation

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + pU(x) + \alpha \right) Q(x,\alpha;p) = \delta(x - x_0) \tag{2}$$

Comme application de la formule de Feynman-Kac nous allons retrouver la célèbre loi de l'arcsinus (Paul Lévy, 1939) qui exprime la distribution du temps passé sur $\mathbb{R}^+$ par un processus de Wiener issu de $x(0) = 0$.

1/ Quelle est la fonction $U(x)$ appropriée ?

2/ Résoudre l'équation (2) puis montrer que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^\infty \mathrm{d}T\, \mathrm{e}^{-pT}\, P_t(T) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(p+\alpha)}} \tag{3}$$

3/ Une première transformation de Laplace inverse sur la variable α conduit à :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}T\, \mathrm{e}^{-pT}\, P_t(T) = \int_0^p \frac{\mathrm{d}x}{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{x(p-x)}} \tag{4}$$

Déduire $P_t(T)$

Rappel : Transformation de Laplace inverse.– Soit $F(p) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-px}$. La transformation de Laplace inverse est donnée par $f(t) = \int_{p_0 - \mathrm{i}\infty}^{p_0+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\mathrm{i}\pi} F(p)\, \mathrm{e}^{px}$ où l'intégrale est prise dans le plan complexe sur le contour de Bromwich (la droite verticale, où x_0 est choisi pour que l'intégrand soit holomorphe $\forall p$ t.q. $\mathrm{Re}[p] > p_0$).

[1] M. Kac, *On the distribution of certain Wiener functionals*, Trans. Am. Math. Soc. **65**, 1 (1949).

2 Aire algébrique du mouvement brownien planaire

Nous donnons dans cet exercice une autre illustration de la formule de Feynman-Kac : nous allons étudier la distribution de l'aire algébrique enclose par une courbe brownienne planaire fermée[2] $(\vec{r}(\tau),\, 0 \leqslant \tau \leqslant t |\, \vec{r}(0) = \vec{r}(t))$. L'aire algébrique est donnée par la fonctionnelle :

$$\mathcal{A}[\vec{r}(\tau)] = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}\tau \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \right) \tag{5}$$

On note $P_t(\mathcal{A})$ sa distribution.

1/ À l'aide d'une intégrale de chemin, montrer que la transformée de Fourier de la distribution $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}B\mathcal{A}[\vec{r}(\tau)]}\rangle = \int \mathrm{d}\mathcal{A}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}B\mathcal{A}}\, P_t(\mathcal{A})$ est reliée à la fonction de partition d'un problème de mécanique quantique bien connu.

2/ À l'aide des formules données en annexe, déduire la distribution $P_t(\mathcal{A})$. On précisera également $\langle \mathcal{A}^2\rangle$.

Indications :

• Spectre de Landau bidimensionnel :

$$E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n \in \mathbb{N} \qquad \text{et } \omega_c = eB/m \tag{6}$$

$$\text{dégénérescence} = \frac{eB\mathrm{Surf}}{2\pi\hbar} \tag{7}$$

• Une intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\, \frac{x}{\mathrm{sh}\, x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} = \frac{\pi}{4\,\mathrm{ch}^2(\pi\xi/2)} \tag{8}$$

Annexe :

Ce TD illustre bien l'intérêt de l'intégrale de chemin :

1. Elle permet d'écrire naturellement des moyennes sur des courbes browniennes distribuées selon la mesure de Wiener $\mathcal{D}x(\tau)\, \exp - \int \mathrm{d}\tau\, \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$.
2. L'intégrale de chemin est calculée en utilisant la représentation opératorielle :

$$\int_{x(0)=x_0}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau)\, \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}\tau\, \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + V(x(\tau))\right]} = \langle\, x\, | \mathrm{e}^{-tH} |\, x_0\,\rangle \tag{9}$$

$$\text{avec } H = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \tag{10}$$

3. En pratique on utilise que $G_t(x|x_0) = \langle\, x\, |\mathrm{e}^{-tH}|\, x_0\,\rangle$ obéit à l'équation

$$\left[\partial_t - \frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x)\right] G_t(x|x_0) = 0 \quad \text{pour la condition initiale } \; G_0(x|x_0) = \delta(x - x_0)$$

[2]Ce problème a été étudié par Paul Lévy (1950). On en trouvera une étude dans :
B. Duplantier, *Areas of planar Brownian curves*, J. Phys. A. : Math. Gen. **22**, 3033 (1989).
M. Yor, *On stochastic areas and averages of planar Brownian motion*, J. Phys. A. : Math. Gen. **22**, 3049 (1989).
A. Comtet, J. Desbois & S. Ouvry, *Winding of planar Brownian curves*, J. Phys. A. : Math. Gen. **23**, 3563 (1990).