TD n°5

Exercice 1: Puits Infini

On considère un puits de potentiel à une dimension:

$$V(x) = 0 \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq L$$
$$V(x) = \infty \qquad \text{pour } x > L \text{ et } x < 0$$

1- Pour une particule de masse m, déterminer les niveaux d'énergie E_n et les fonctions propres normées φ_n.

2- Calculer la valeur moyenne de la quantité de mouvement pour tous les états φ_n.

3- Le principe d'incertitude d'Heisenberg est-il vérifié quantitativement pour tous les états? (on prendra $\Delta x = L$).

4- Une transition de $n = 3$ à $n = 1$ pour un électron piégé dans le puits produit un photon de 240 nm. Quelle est la largeur du puits?
On donne m =9,11 10^{-31} kg, h =6.63 10^{-34} J.s et c =3 10^8 m.s^{-1}.

5- Déterminer la probabilité P_n de trouver la particule à une distance d'au plus $\frac{L}{4}$ des parois:
a) lorsqu'elle est dans l'état n=1.
b) lorsqu'elle est dans l'état n=4.
c) Quelle est la prédiction classique?

Exercice 2: Dégénérescences

On considère à présent une boîte à deux dimensions:
$V(x, y) = 0$ pour $0 \leq x \leq L$ et $0 \leq y \leq L$
$V(x)$ est infini partout ailleurs.

1- Montrer que $\varphi_{n,m}(x, y) = A \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L}$ est solution stationnaire de l'équation de Schrödinger pour une énergie $E_{n,m}$ que l'on déterminera.

2- Montrer que n et m intervenant dans φ sont des entiers strictement positifs.

3- Déterminer la constante de normalisation A.

4- Quelle est la dégénérescence du niveau E et l'expression des fonctions propres correspondantes dans les cas suivants?

a) $E = 2C$
b) $E = 5C$
c) $E = 50C$
où C est une constante.
Comment peut-on faire disparaître cette dégénérescence?

Exercice 3: états liés

On étudie les états liés d'une particule de masse m dans un puits de profondeur $-U_0$ (avec $U_0 > 0$) et de largeur a:

$V(x) = \infty$	pour $x < 0$	région (1)
$V(x) = -U_0$	pour $0 \leq x \leq a$	région (2)
$V(x) = 0$	pour $x > a$	région (3)

La particule est piégée entre $x = 0$ et $x = a$, elle a une probabilité de présence nulle de se trouver dans la région (1) où le potentiel est infini. On notera $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ et $\Psi_3(x)$ la fonction d'onde dans les régions (1), (2) et (3).

1- Ecrire la valeur de $\Psi_1(x)$.

2- Expliquer simplement pourquoi les valeurs des énergies correspondant à la particule piégée sont comprises entre $-U_0$ et 0.

3- Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les régions (2) et (3).

4-

a) On pose k^2= $\frac{2m}{\hbar^2}(E + U_0)$ et K^2=-$\frac{2mE}{\hbar^2}$. Quels sont les signes de k^2 et K^2? Quelles sont les dimensions de k et K?

b) Ecrire les équations caractéristiques des équations différentielles (aux valeurs propres) de la question 3-, et les solutions de ces équations différentielles.

5- Expliciter les raisons physiques du problème qui permettent de simplifier l'expression de $\Psi_2(x)$ et de $\Psi_3(x)$ en étudiant $\Psi_2(x)$ pour x=0 et $\Psi_3(x)$ pour x=∞.

6-

a) Ecrire les relations de continuité de la fonction d'onde en $x = a$ et puis de la dérivée en $x = a$.

b) En déduire une expression de -cotg ka.

7- On pose $X = ka$ et $X_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}U_0a^2$. Résoudre graphiquement le problème aux valeurs propres de la particule piégée. Discuter le nombre d'états liés suivant la profondeur du puits. Que valent les énergies lorsque $U_0 \to \infty$.