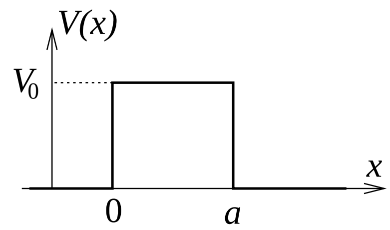
TD 6 : Franchissement d'une barrière de potentiel

États liés - états de diffusion. Dans le TD précédent nous nous sommes intéressés à des situations où la particule est confinée dans un domaine fini par le potentiel. La fonction d'onde est "concentrée" dans une région finie de l'espace : on parle d'états liés. Nous avons vu que de tels états n'existent que pour des valeurs discrètes de l'énergie et avons étudié le spectre discret des énergies.

Dans ce TD nous considérons une autre situation physique : celle où une particule est envoyée sur une barrière de potentiel de hauteur V_0 :



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{pour } a < x \end{cases} \tag{1}$$

L'énergie des états de diffusion n'est pas quantifiée et nous étudierons avec quelle probabilité la particule quantique d'énergie E est transmise à travers la barrière.

1 $E < V_0$: Effet tunnel

1. Décrire la dynamique d'une particule classique d'énergie $E < V_0$ envoyée sur la barrière depuis $x = -\infty$.

2. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les trois régions de l'espace. On introduira $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $K = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$.

3. On cherche une solution décrivant une onde incidente d'énergie E arrivant par la gauche. Montrer qu'une telle solution est de la forme :

$$\Psi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} & \text{pour } x < 0 \\ C\mathrm{e}^{-Kx} + D\mathrm{e}^{Kx} & \text{pour } 0 < x < a \\ F\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} & \text{pour } a < x \end{cases} \tag{2}$$

4. Calculer le courant associé à chacun des termes de la fonction d'onde. On rappelle que la densité de courant de probabilité associée à l'état Ψ est :

$$J_\Psi = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(\Psi(x)^* \frac{\mathrm{d}\Psi(x)}{\mathrm{d}x}\right) \tag{3}$$

5. Le potentiel restant fini, la fonction d'onde et sa dérivée sont continues partout. En déduire des relations entre les amplitudes A, B, C, D et F.

6. *Probabilités de transmission et de réflexion.* On définit les probabilités de transmission et de réflexion par : $T = \left|\frac{F}{B}\right|^2$ et $R = \left|\frac{A}{B}\right|^2$. Justifier ces définitions à l'aide de la question 4.

Pour calculer A/B et F/B, on commence par éliminer C et D dans le système d'équations obtenu à la question 5 (en exprimant C et D en fonction de F). Exprimer R et T en fonction de k, K et a, puis en fonction de E, V_0 et a.

Vérifier que $R+T=1$. Quel est le sens physique de cette équation (utiliser la question 4) ?

7. *Cas limites.* Donner T dans la limite de barrière fine ($Ka \ll 1$) et de barrière épaisse ($Ka \gg 1$). Pourquoi parle-t-on d'effet tunnel ? Expliquer pourquoi cet effet est purement quantique.

8. *Microscope à effet tunnel.* Le STM (scanning tunneling microscope) a été inventé par Gerd Binnig et Heinrich Rohrer (prix Nobel 1986) à IBM. Le principe consiste à faire balayer une surface conductrice par une pointe conductrice suivant le relief de la surface. Les électrons sautent de la pointe à la surface par effet tunnel. Le courant tunnel dépend exponentiellement de la distance d entre la pointe et la surface : $I_t = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha d}$. Lorsque la pointe balaie la surface, on enregistre le déplacement de la pointe permettant de garder le courant constant, ce qui fournit le relief de la surface. La résolution ainsi atteinte est de l'ordre de l'échelle atomique.

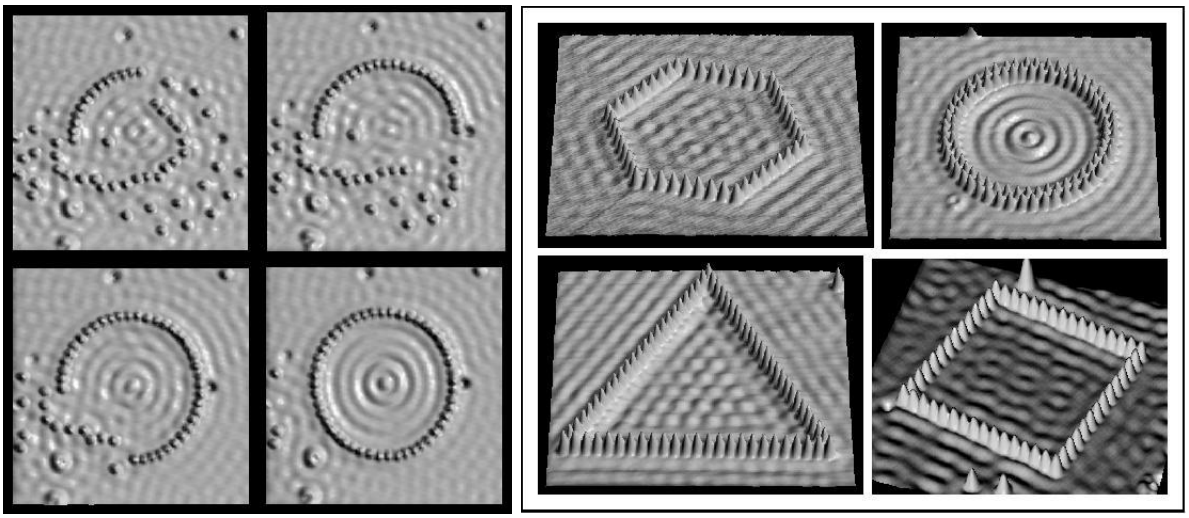


Figure 1: Atomes de fer sur une surface de cuivre. Non seulement on peut observer les atomes de fer déposés sur la surface de cuivre, mais aussi l'onde associée aux électrons de surface du cuivre, piégés par une barrière de potentiel. *cf.* http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/gallery.html

A.N. : Calculer la probabilité de tranmission d'une barrière de hauteur 2 eV et de largeur 3 Å pour des électrons d'énergie $E = 1$ eV.

2 $E > V_0$: Transparences

1. Décrire le comportement d'une particule classique envoyée de l'infini avec une énergie $E > V_0$.

2. Dans le cas quantique, donner la forme de la fonction d'onde décrivant une particule d'énergie E envoyée de $x = -\infty$. On introduit : $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$.

3. Quelle modification doit-on faire par rapport à la première partie ? En déduire l'expression de la probabilité de transmission T. L'exprimer en fonction de $\sin k'a$.

4. Tracer T en fonction de a. Que se passe-t-il pour $k'a = n\pi$?

5. *A.N.* : Si $a = 2$ Å et $V_0 = 8.5$ eV, déterminer les valeurs de E/V_0 pour lesquelles $T = 1$ pour un électron.