S4-MIAS. Physique 2002-2003
Université Paris-Sud

TD 7 : La mesure en mécanique quantique

1 Exercice 1

Un système physique est décrit par un espace de Hilbert de dimension 3, dont une base orthonormée est $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

1. Dans cette base, deux observables H et B s'expriment comme :

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où E_0 et b sont des constantes positives.

a) Montrer que H et B commutent.

b) Donner une base de vecteurs propres communs aux observables en fonction de la base initiale ; ces vecteurs seront notés $\{|v_0\rangle, |v_+\rangle, |v_-\rangle\}$. Exprimer les observables H et B dans la nouvelle base.

2. On considère maintenant deux observables L_z et S définies par leurs actions sur les vecteurs de la base :

$$\begin{cases} L_z|1\rangle = |1\rangle \\ L_z|2\rangle = 0 \\ L_z|3\rangle = -|3\rangle \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S|1\rangle = |3\rangle \\ S|2\rangle = |2\rangle \\ S|3\rangle = |1\rangle \end{cases}. \tag{2}$$

a) Écrire ces deux observables en représentation matricielle.
b) On peut également écrire ces opérateurs à l'aide des bras et kets de Dirac : $L_z = |1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|$. Écrire S sous cette forme.
c) Calculer le commutateur $[L_z, S]$.
d) Calculer L_z^2 et S^2.
e) Donner la matrice la plus générale représentant un opérateur qui commute (*i*) avec L_z, (*ii*) avec L_z^2, (*iii*) avec S.

2 Mesures

Dans une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, l'hamiltonien H et une grandeur physique D sont représentés par les matrices suivantes :

$$H = \Delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où Δ et d sont des constantes positives.
1. *a*) Si on procède à une mesure de l'énergie, quels résultats de mesure peut-on obtenir ? Quel est l'état du système après la mesure ?
b) Même question concernant une mesure de D.

2. On prépare le système dans l'état

$$|\,\psi_1\,\rangle = \mathcal{N}\left(|\,1\,\rangle + |\,2\,\rangle + |\,3\,\rangle\right)\ . \tag{4}$$

a) Quelle est la valeur de $\mathcal{N}$?
b) Quelle est la probabilité pour qu'une mesure de l'énergie donne 0 ?
c) Le résultat d'une telle mesure est en effet 0. Quel est l'état $|\,\psi_2\,\rangle$ du système après la mesure ?
d) Une mesure de D donnerait alors quel(s) résultat(s) ? Avec quelle(s) probabilité(s) ?

3. *a*) Quelle est la probabilité pour que l'énergie mesurée soit $+\Delta$ si le système est initialement dans l'état $|\,\psi_1\,\rangle$? Quel est l'état $|\,\psi_3\,\rangle$ du système après la mesure ?
b) Quels sont alors les résultats possibles d'une mesure de D, avec leurs probabilités associées ?
c) On suppose que la mesure de D a donné $-d$. Quel est est l'état $|\,\psi_4\,\rangle$ du système après la mesure ?

4. Valeur moyenne. On procède à un grand nombre de mesures de l'énergie sur le système préparé dans l'état $|\,\psi_1\,\rangle$. Quelle est la valeur moyenne de l'énergie pour toutes ces mesures ?

3 Mesure et évolution temporelle

Dans l'exercice précédent nous avons négligé l'évolution temporelle de l'état du système entre chaque mesure. L'évolution du vecteur d'état du système est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\psi(t)\,\rangle = H|\,\psi(t)\,\rangle\ . \tag{5}$$

1. L'hamiltonien possède une base d'états propres $\{|\,\varphi_n\,\rangle\}$, *i.e.* $H|\,\varphi_n\,\rangle = E_n|\,\varphi_n\,\rangle$, où E_n sont les énergies propres du système. On peut décomposer le vecteur d'état dans cette base :

$$|\,\psi(t)\,\rangle = \sum_n c_n(t)|\,\varphi_n\,\rangle\ . \tag{6}$$

Quelle est la dépendance temporelle des coefficients $c_n(t)$?

2. Dans une base orthonormée $\{|\,1\,\rangle, |\,2\,\rangle, |\,3\,\rangle\}$, l'hamiltonien est :

$$H = \hbar\omega\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{7}$$

a) On suppose que le système est initialement dans l'état : $|\,\psi(0)\,\rangle = |\,2\,\rangle$. Donner l'expression de $|\,\psi(t)\,\rangle$ dans la base $\{|\,\varphi_0\,\rangle, |\,\varphi_+\,\rangle, |\,\varphi_-\,\rangle\}$ des états propres de H, puis dans la base initiale $\{|\,1\,\rangle, |\,2\,\rangle, |\,3\,\rangle\}$.
b) Quelle est la probabilité $\mathcal{P}_2(t)$ pour que le système soit dans l'état $|\,2\,\rangle$ à t ?

3. On reprend la question 2 avec : $|\,\psi(0)\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,1\,\rangle + |\,2\,\rangle\right)$.
a) Calculer $|\,\psi(t)\,\rangle$ dans la base de départ.
b) À $t = t_0$ on mesure l'énergie. On mesure 0. Avec quelle probabilité ? Que vaut $|\,\psi(t)\,\rangle$ pour $t > t_0$?
c) Au lieu de trouver 0 on mesure $+\hbar\omega$ à $t = t_0$. Que vaut cette fois $|\,\psi(t)\,\rangle$ pour $t > t_0$?