

**TD de Physique Statistique n° 1**  
*Rappels de Maths pour la Mécanique Statistique*

## 1 Formulaire utile

### 1/ Intégrale de Gauss ( $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ )

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/(4\alpha)}.$$

### 2/ Fonction gamma (ou intégrale eulérienne de seconde espèce)

pour  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ , on définit  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ , elle vérifie  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ .

Valeurs particulières :  $\Gamma(n) = (n-1)!$  et  $\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!!$

NB :  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = (2n)!/(2n)!!$  où  $(2n)!! = 1 \times 2 \times 4 \times \dots \times (2n) = 2^n n!$

### 3/ Intégrales de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x dx = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1) 2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} x dx = \frac{\Gamma(m+1) \sqrt{\pi}}{\Gamma(m + \frac{3}{2}) 2}$$

### 4/ Formule de Stirling

$$\log N! = N \log N - N + \frac{1}{2} \log 2\pi N + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

### 5/ Formule du binôme

$$(p+q)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n}$$

### 6/ Distribution gaussienne normalisée

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x g(x) dx = \langle x \rangle, \quad \int_{\mathbb{R}} (x - \langle x \rangle)^2 g(x) dx = \sigma^2.$$

## 2 Volume d'une hypersphère

Montrer que le volume d'une hypersphère de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^n$  est

$$V_n(R) = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n.$$

## 3 Distribution de Maxwell

La distribution des vitesses de Maxwell est donnée par :

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2k_B T}\right\},$$

où  $m$  est la masse de la particule considérée,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température et  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ .

1/ Interpréter  $f(\vec{v})$  en termes probabilistes. Montrer que  $f(\vec{v})$  est bien normalisée.

2/ Calculer les valeurs moyennes  $\langle v_x \rangle$ ,  $\langle v_y \rangle$ ,  $\langle v_z \rangle$ ,  $\langle v_x^2 \rangle$ ,  $\langle v_y^2 \rangle$ ,  $\langle v_z^2 \rangle$ ,  $\langle E_c \rangle$  et  $\langle v_x v_y \rangle$ .

3/ Dédire de  $f(\vec{v})$  la probabilité de trouver  $v_x$  entre  $v_x$  et  $v_x + dv_x$ , et ce  $\forall (v_y, v_z)$  (loi marginale pour  $v_x$ ).

4/ Dédire de  $f(\vec{v})$  la probabilité de trouver le module de la vitesse entre  $v$  et  $v + dv$  (on tirera partie de l'isotropie de  $f$  et on passera en "coordonnées sphériques"). Vérifier que la distribution de probabilités ainsi obtenue est bien normalisée. Comparer la valeur la plus probable de  $v$  et la valeur moyenne  $\langle v \rangle$ . Evaluer enfin l'écart quadratique moyen de  $v$ ,  $\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$ .

## 4 Marche au hasard

### 1/ Problème à une dimension

On considère une particule astreinte à se déplacer sur un axe  $Ox$ . Son déplacement est aléatoire et se fait par pas discrets identiques de longueur  $\ell$ . La probabilité d'un saut à droite (vers les  $x > 0$ ) est  $p$  et la probabilité d'un saut à gauche (vers les  $x < 0$ ) est  $q$ . On a évidemment  $p + q = 1$ . Chaque saut, à droite ou à gauche, est supposé indépendant du précédent (processus de Markov).

On note  $P_N(m)$  la probabilité qu'après  $N$  sauts la particule soit localisée en  $x = m \times \ell$ ,  $m$  entier compris entre  $-N$  et  $N$ .

(a) Soient  $n_+$  le nombre de sauts à droite et  $n_-$  le nombre de sauts à gauche. Exprimer  $m$  en fonction de  $n_+$  et  $N$  ou de  $n_-$  et  $N$ .

(b) On note  $\Pi_N(n_+)$  la probabilité que la particule ait effectué  $n_+$  sauts à droite parmi les  $N$  sauts. Déterminer  $\Pi_N(n_+)$  en fonction de  $p$ ,  $q$ ,  $N$  et  $n_+$ , puis vérifier que  $\Pi_N(n_+)$  est bien normalisée. En déduire  $P_N(m)$  en fonction de  $p$ ,  $q$ ,  $N$  et  $m$ .

(c) Calculer les valeurs moyennes  $\langle n_{\pm} \rangle$  et en déduire la valeur moyenne de la “position”  $\langle m \rangle$ . Calculer les écarts quadratiques moyens de  $n_{\pm}$  et en déduire  $\sigma_m$  celui de  $m$ . Discuter le cas particulier  $p = q = \frac{1}{2}$ . En général, comment se comporte  $\frac{\sigma_m}{\langle m \rangle}$  en fonction de  $N$  ?

## 2/ Limite thermodynamique

On se place dans cette partie dans le cas où  $N$  et  $n_{\pm}$  sont “grands”. On va montrer qu’alors  $P_N(m)$  prend l’allure d’une loi normale, très piquée autour de sa valeur moyenne.

(a) Déterminer  $\tilde{n}_+$  la valeur de  $n_+$  pour laquelle  $\Pi_N(n_+)$  (ou plutôt son log) est maximale. Développer au second ordre inclus  $\log(\Pi_N(n_+))$  au voisinage de  $\tilde{n}_+$ . En déduire une approximation de  $\Pi_N(n_+)$  puis la valeur de  $\Pi_N(\tilde{n}_+)$ . Calculer  $\langle n_+ \rangle$  et l’écart quadratique moyen de  $n_+$ , et comparer aux résultats du 1.c).

(b) A partir de ce qui précède, déterminer  $P_N(m)$  et donner  $\langle m \rangle$  et  $\sigma_m$ . Comparer aux résultats du 1.c).

## 3/ Passage au continu

Toujours sous les hypothèses du 2), en admettant de plus que  $P_N(m)$  varie lentement en fonction de  $m$ , déterminer  $P(x)dx$  la probabilité que la particule soit située entre  $x$  et  $x + dx$ . Vérifier que  $P(x)$  est bien normalisée. Donner  $\langle x \rangle$  et  $\sigma_x$  dans le cas général et dans le cas particulier  $p = q = \frac{1}{2}$ .

Nota bene : ce passage du cas discret au cas continu suppose que  $dx$  est “petit” devant les dimensions physiques du système (domaine macroscopique) et “grand” devant le pas discret  $\ell$  (“lissage” des détails microscopiques).

## 4/ Équation maîtresse

On peut obtenir les résultats précédents d’une manière très différente. Soit  $P(x, t)$  la probabilité d’être en  $x$  au temps  $t$  ( $t = \tau N$ ,  $\tau$  étant la “durée” d’un saut). Montrer que

$$P(x, t + \tau) = p P(x - \ell, t) + q P(x + \ell, t) .$$

En passant au continu, en déduire une équation aux dérivées partielles reliant  $\partial P / \partial t$ ,  $\partial P / \partial x$  et  $\partial^2 P / \partial x^2$ . Dans le cas  $p = q = 1/2$  montrer que l’on trouve l’équation de diffusion usuelle :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} . \tag{1}$$

Exprimer  $D$  en fonction des paramètres du problème. Lorsque  $p \neq q$  montrer qu’un changement de référentiel permet également de se ramener à l’équation (1).

Pour résoudre (1) on travaille avec la transformée de Fourier  $\hat{P}(k, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} P(x, t) \exp\{-ikx\}$ . Écrire l’équation vérifiée par  $\hat{P}(k, t)$  et donner sa solution. On se place dans le cas simple où  $P(x, 0) = \delta(x)$ . Donner l’expression de  $P(x, t)$ .