

Thèse de doctorat de l'Université Paris 6

Spécialité :

PHYSIQUE THÉORIQUE

présentée par

Christophe TEXIER

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet :

Quelques aspects du transport quantique dans les systèmes désordonnés de basse dimension

Soutenue le 20 janvier 1999 devant le jury composé de

M. Alain COMTET	directeur de thèse
M. Bernard DERRIDA	président
M. Yan FYODOROV	
M. Jean-Marc LUCK	rapporteur
M. Gilles MONTAMBAUX	rapporteur
M. Stéphane OUVRY	directeur de thèse
M. Joe V. PULÉ	

Je me débats avec le hasard abstrait. Son versatile caprice m'intrigue : tantôt c'est la plus aimable serviabilité, tantôt une incroyable résistance.

Thomas Mann, *La montagne magique*.

Remerciements

C'est en rédigeant ce texte que je m'aperçois du grand nombre de personnes qui ont été impliquées de près ou de loin dans le bon déroulement de ce travail de thèse et que je voudrais remercier par ces quelques lignes.

Tout d'abord Alain Comtet et Stéphane Ouvry qui ont dirigé cette thèse avec hauteur de vue : une direction bicéphale qui m'a permis d'apprécier deux styles différents et offert un vaste éventail de thèmes. Ils ont toujours su me consacrer un temps précieux en nombreuses et enrichissantes discussions. Je dois également les remercier pour la patience qu'ils ont déployée à l'occasion des multiples relectures de mon manuscrit ; leurs critiques m'ont été précieuses pour améliorer ce document. Enfin c'est leurs grandes qualités humaines que je voudrais saluer : je souhaite à tout thésard d'avoir au moins la moitié de la chance que j'ai eue.

Toute ma reconnaissance va à Jean Desbois. Le plaisir de partager son bureau pendant ces années a grandement contribué à rendre agréable mon séjour au laboratoire. J'ai beaucoup appris de l'étroite collaboration que nous avons eue Jean, Stéphane et moi-même, mais avant toute chose j'ai surtout pu apprécier son humanité et sa gentillesse. Je le remercie chaleureusement de tous ces bons moments -privés ou scientifiques.

J'ai effectué, au tout début de ma thèse, mes premiers pas dans un espace à courbure négative avec Cécile Monthus, que je souhaite ici remercier de cette collaboration. Pour ne pas quitter encore le plan hyperbolique, je tiens à remercier Charles Schmit pour sa contribution (exposée au paragraphe 4.4.1. α).

Je remercie profondément Bernard Derrida d'avoir présidé le jury. Jean-Marc Luck et Gilles Montambaux ont accepté la charge de rapporteur, je ne saurais trop les en remercier. Je leur suis particulièrement reconnaissant pour la pertinence de leurs remarques au cours des discussions que nous avons eues avant et après le jour J . Je remercie sincèrement Yan Fyodorov et Joe Pulé qui ont apporté une touche internationale au jury. Ils m'ont tous fait beaucoup d'honneur en participant au jury.

Grâce à Dominique Vautherin et Xavier Campi, les deux directeurs de la division de physique théorique de l'IPN qui se sont succédés, puis à Alain Comtet, directeur du jeune laboratoire de physique théorique et modèles statistiques, j'ai pu bénéficier de conditions de travail excellentes pendant ces années orcéennes.

J'ai profité de nombreux et sympathiques échanges avec Serguei Nechaev. Je tiens également à remercier Eugène Bogomolny, Oriol Bohigas, Serguei Brazovski, Claude Jacquemin, Hubert Krivine, Patricio Lebœuf, Olivier Martin, Nicolas Pavloff et Denis Ullmo pour leur bienveillance. J'ai commencé à goûter aux joies de l'enseignement avec Jacques Treiner et Dominique Mouhanna. Merci encore à Samuel Wallon, le "coureur fou", pour nos fréquentes et agréables dis-

cussions.

J'adresse également tous mes remerciements à Leonid Pastur, Gleb Oshanin et Marc Yor pour d'enrichissantes discussions.

Parmi les nombreux visiteurs du laboratoire j'ai été particulièrement heureux de rencontrer Eric Akkermans, David Dean, Serguei Isakov, Gustavo Lozano et Constantino da Silva Santos.

L'atmosphère agréable du laboratoire doit beaucoup à la présence de nombreux compagnons de thèse : Cyril Furtlehner -avec lequel j'ai souvent discuté-, Ulrich Gerland, Christine Heinemann, Jérôme Houdayer -bon courage pour la fin!-, Étienne Hugues, Guglielmo Iacomelli, Alexandro Monastra, Daniel Rouben, Nicolas Sator, Georg Schreiber. Amaury Mouchet m'a fourni une aide précieuse face aux inévitables problèmes \LaTeX iens, pour cela et son amitié, je le remercie chaleureusement. Enfin je voudrais souhaiter bonne chance à Alexis Prévost, ami et cothésard des premières années (*La dame blanche*).

Une bonne partie des jolies courbes (j'espère que le lecteur sera d'accord) qui parsèment ma thèse est due à l'efficacité et à la gentillesse de Marie-Thérèse Commault.

Merci infiniment à Nadine Rohart, la bonne fée grâce à qui j'ai passé ces années sans apercevoir l'ombre d'un souci administratif ou logistique. Je remercie également Suzanne Robert, Martine Thouvenot et Michèle Verret.

L'issue de ce travail m'offre l'opportunité de remercier mes professeurs de l'Université Paris 7 pour leur excellent enseignement. J'éprouve une reconnaissance toute particulière envers Bernard Diu, mon premier professeur de physique à l'Université, dont les cours m'ont fait percevoir les beautés cachées de la physique. J'ai souvent pensé qu'il était à l'origine de certains de mes choix ultérieurs. J'adresse également tous mes remerciements à Françoise Balibar pour son cours lumineux de mécanique quantique et son intérêt bienveillant. Je garde un vif souvenir des cours magnifiques qu'Alain Comtet, Jean Dalibard et Serge Haroche nous ont dispensés au DEA de physique quantique.

Si ce travail est dédié à quelqu'un, il doit l'être à Marie-Flore et Michel pour leur engagement constant et la totale liberté qu'ils m'ont toujours laissée. Bon Papa est pour beaucoup dans l'aboutissement de ce travail : il a toujours entretenu en moi une curiosité pour les sujets scientifiques. La présence de Laurence a été un atout majeur. Sa confiance indéfectible a contribué à passer ces années plus légèrement.

Avertissement

Quelques modifications (minimales) ont été apportées dans le but d'améliorer le document initial : un certain nombre de coquilles (inévitables, hélas !) ont été corrigées. L'annexe de la première partie a été légèrement complétée afin de la rendre plus fonctionnelle. Enfin, quelques références bibliographiques ont été ajoutées.

Orsay, Mars 2005.

Table des matières

Principales notations	1
Introduction générale	3
I Quelques propriétés de la diffusion quantique dans les systèmes désordonnés unidimensionnels	5
1 Introduction	7
2 Le modèle gaussien	13
2.1 Définition du modèle	13
2.2 Le formalisme de phase : spectre et localisation	14
2.3 Distribution stationnaire de la phase et densité d'états	15
2.4 Localisation	18
2.4.1 Distribution de ξ à haute énergie ; fluctuations de la longueur de localisation d'un système de taille finie	19
2.5 Diffusion dans la région désordonnée	20
2.6 2 canaux de diffusion	22
2.7 Distribution du temps de Wigner	23
2.7.1 Régime localisé ($L \gg \lambda$)	24
2.7.2 Régime balistique ($L \ll \lambda$)	27
3 Modèle supersymétrique désordonné	29
3.1 Introduction	29
3.2 Propriétés spectrales et localisation	31
3.2.1 Formalisme de phase	31
3.2.2 Propriétés statistiques de la fonction d'onde d'énergie nulle	32
3.2.3 Distribution stationnaire de la phase (déphasage)	33
3.3 Temps de Wigner	33
3.3.1 Le problème de diffusion	33
3.3.2 Distribution du temps de Wigner à haute énergie ($k \gg \varsigma$)	34
3.3.3 Distribution du temps de Wigner à énergie nulle	34
3.4 Bilan	35

4	Le modèle d'impuretés δ	37
4.1	Introduction	37
4.2	Formalisme de phase	38
4.3	Spectre, localisation et distribution du déphasage	40
4.3.1	Haute énergie : $k \gg v, \rho$	41
4.3.2	Grande densité d'impuretés $v \ll \rho$	42
4.3.3	Faible densité d'impuretés $\rho \ll v$	44
4.3.4	Tableau récapitulatif	52
4.3.5	Le poids des impuretés est négatif : $v < 0$	52
4.4	Temps de Wigner	53
4.4.1	Résonances	53
4.4.1. α	Diffusion sur le tore hyperbolique	54
4.4.1. β	Moments du temps de Wigner : un argument heuristique.	56
4.4.2	Distribution du temps de Wigner	59
4.a	Fonction de corrélation de la phase	66
4.b	Le potentiel périodique	67
5	Représentations fonctionnelles	71
5.1	Approximation semi-classique	71
5.2	Représentations fonctionnelles à partir des équations du formalisme de phase	71
5.3	Pourquoi la distribution de τ est-elle universelle?	73
6	Transition de délocalisation	75
6.1	Introduction	75
6.2	Définition du modèle	75
6.3	Mise en évidence de la transition	76
6.4	Corrélations de la fonction d'onde	79
6.5	Temps de Wigner à la transition de délocalisation	82
A	Équations différentielles stochastiques	87
A.1	Position du problème	87
A.2	Ito et Stratonovich - FPE	88
Article 1		91
Article 2		109
Article 3		121
II	Transport électronique dans un milieu bidimensionnel à champ magnétique aléatoire	127
1	Introduction	131

2	Hamiltoniens magnétiques	135
2.1	Hamiltoniens magnétiques : définitions, propriétés	135
2.2	Aimantation et courant permanent	136
2.3	Conductivités	139
2.4	Transformations non unitaires	140
2.4.1	Formalisme \tilde{H}	140
2.4.2	Formalisme \tilde{H}'	141
3	Champ magnétique homogène	143
3.1	La jauge de Landau	143
3.2	La jauge symétrique	144
3.2.1	Opérateurs de création et annihilation	144
3.2.2	Construction du spectre	145
3.2.3	Courant permanent	146
3.2.4	Propagateur et projecteurs de Landau	147
3.3	Translations magnétiques	150
3.4	Conductivité pour le problème de Landau	151
3.5	“Landau counting”	153
4	Électron couplé à un tube de flux Aharonov-Bohm	155
4.1	Le problème Aharonov-Bohm	155
4.1.1	Spectre	155
4.1.2	Courant permanent	157
4.1.3	Aimantation	159
4.1.4	Conductivité	160
4.2	Champ magnétique et tube de flux Aharonov-Bohm	163
4.2.1	Spectre	163
4.2.2	Conductivité	164
5	Le modèle d’impuretés magnétiques	167
5.1	Définition du modèle et propriétés spectrales	167
5.2	Théorie de perturbation	169
5.3	Aimantation	173
5.4	Restriction de l’espace de Hilbert à celui d’un niveau Landau	174
5.5	Analyse perturbative de la conductivité Hall	175
A	Conductivité : formalisme général	179
A.1	Théorie de la réponse linéaire	179
A.2	Conductivités locales	182
A.3	Conductivités globales	183
B	Régularisation harmonique	185
	Article 4	187
	Article 5	215

Article 6	219
Bilan, perspectives	241
Bibliographie	243

Principales notations

$\stackrel{\text{def}}{=}$	égal par définition
$\stackrel{(\text{loi})}{=}$	égal en loi
\simeq	approximativement égal
\propto	proportionnel
$\langle \rangle$	moyenne sur le désordre
$\langle\langle X^n \rangle\rangle$	cumulant d'ordre n de la variable aléatoire X
$\langle \ , \ \rangle$	bra et ket de Dirac
$\text{E}[\]$	partie entière
$\text{Y}(\)$	fonction de Heaviside
$\text{Re}(\)$	partie réelle
$\text{Im}(\)$	partie imaginaire
\bar{z} ou z^*	complexe conjugué de z
$\text{Tr} \{ \}$	trace
$\delta_{i,j}$	symbole de Kronecker
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
$\Gamma(z)$	fonction Gamma d'Euler
$\psi(z)$	dérivée logarithmique de la fonction Gamma
$\mathbf{C} = 0.577215\dots$	constante d'Euler
$\zeta(z)$	fonction zeta de Riemann
$\zeta(z, q)$	fonction zeta de Hurwitz
$H_n(z)$	polynôme d'Hermite
$L_n^\alpha(z)$	polynôme de Laguerre ($L_n(z) \equiv L_n^0(z)$)
$J_\nu(z)$	fonction de Bessel de première espèce
$N_\nu(z)$	fonction de Neumann ou Bessel de seconde espèce
$H_\nu^{(1)}(z)$	fonction de Hankel ou Bessel de troisième espèce
$I_\nu(z)$	fonction de Bessel modifiée de première espèce
$K_\nu(z)$	fonction de McDonald ou Bessel modifiée de seconde espèce
$\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)$	fonctions d'Airy

$Ei(z)$	fonction exponentielle-intégrale
$F(a, b; c; z)$	fonction hypergéométrique (${}_2F_1(a, b; c; z)$)
$\Phi(a, b; z)$	fonction hypergéométrique dégénérée (${}_1F_1(a; b; z)$)
$\Psi(a, b; z)$	fonction de Tricomi ou fonction hypergéométrique dégénérée de seconde espèce
$W_{\mu, \nu}(z)$	fonction de Whittaker

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, les progrès dans la recherche de nouveaux matériaux ont amené des développements importants dans la physique des systèmes de basse dimension. En particulier des avancées significatives dans le domaine du magnétisme quantique ont été accomplies. Par exemple, la synthèse de matériaux magnétiques aux propriétés unidimensionnelles marquées a amené un renouveau dans le domaine des chaînes de spins quantiques. D'autre part la fabrication de couches électroniques bidimensionnelles a permis une floraison de travaux sur l'effet Hall quantique entier et fractionnaire.

Sur le plan théorique, ces développements ont suscité un regain d'intérêt pour certaines questions qui, en dehors de ce contexte expérimental, pouvaient être considérées comme académiques. Une des questions les plus débattues concerne le rôle respectif des interactions et de la dimensionnalité. Le fait que la théorie des liquides de Fermi ne soit pas pertinente pour décrire les systèmes unidimensionnels de fermions en interaction intervient notamment dans le contexte de l'effet Hall quantique fractionnaire où les excitations de bord, décrites comme les excitations d'un fluide unidimensionnel, jouent un rôle crucial.

Une autre question a trait au désordre : les systèmes réels contiennent des imperfections sous la forme d'impuretés ou de désordre de type structurel. Leur description théorique exige d'introduire des variables gelées associées au désordre. Un échantillon donné est caractérisé par une certaine configuration du désordre. Lorsqu'on s'intéresse à des informations statistiques, on doit donc non seulement effectuer les moyennes statistiques et/ou quantiques usuelles sur les variables dynamiques, mais aussi des moyennes sur les variables gelées du désordre. Le désordre peut parfois jouer un rôle essentiel pour certains phénomènes. Un exemple particulièrement frappant est fourni par le phénomène de localisation quantique (Anderson 1958), (Abrahams, Anderson, Licciardello & Ramakrishnan 1979) : alors que les fonctions d'onde d'un cristal parfait sont étendues dans tout le cristal, elles peuvent être localisées par le désordre dans une région de taille finie. L'effet est particulièrement net dans les systèmes unidimensionnels où tous les états sont localisés par le désordre (Mott & Twose 1961). Il faut également mentionner l'effet Hall quantique entier où le désordre joue un rôle central (Aoki 1987). La quantification de la conductivité Hall peut s'expliquer par différents arguments, dont certains de nature topologique, (Aoki & Ando 1981), (Laughlin 1981), (Štředa 1982), (Thouless, Kohmoto, Nightingale & den Nijs 1982), (Avron & Seiler 1985), auxquels doit être ajoutée l'hypothèse de la localisation d'une partie des états sous l'effet du désordre.

Nous nous intéresserons dans cette thèse à différentes propriétés de transport de systèmes désordonnés de basse dimension. L'aspect quantique sera important car les effets de localisation forte seront présents. Dans la première partie, nous étudierons une propriété de la diffusion

quantique par un potentiel désordonné unidimensionnel. Le temps de Wigner, qui est relié à la matrice S , sera au cœur de cette étude. Cette notion a été introduite par Eisenbud (1948) et Wigner (1955) lorsque le problème de diffusion est décrit par un unique canal ; le temps de Wigner est alors donné par la dérivée du déphasage par rapport à l'énergie et s'interprète comme un temps de retard dû à l'interaction. Smith (1960) a donné une généralisation pour plusieurs canaux de diffusion : il faut alors introduire plusieurs temps, ou plutôt une matrice de temps de retard. Avant d'être un objet d'intérêt pour la diffusion dans les systèmes chaotiques ou désordonnés, le temps de Wigner a joué un rôle important en physique statistique. On doit en effet remonter à la première moitié du siècle pour rencontrer les premiers travaux visant à relier les propriétés thermodynamiques d'un gaz de particules en interaction aux propriétés de diffusion : E. Beth et G. E. Uhlenbeck, en 1937, exprimèrent le second coefficient du viriel du gaz en fonction des déphasages intervenant dans le problème de diffusion à deux corps (*cf.* (Ma 1985, §14.4) et (Landau & Lifchitz 1966b, §77)). Plus précisément, ce sont les dérivées des déphasages qui interviennent, ou encore la matrice des temps de retard introduite par Smith (1963). Notons qu'il existe une formulation classique de ce résultat (Ma 1985, §14.3). La relation entre le temps de Wigner et les propriétés thermodynamiques du gaz ne se limite pas au second coefficient du viriel, mais se manifeste dans un développement systématique du grand potentiel dans la formulation de la mécanique statistique en terme de matrice S (Dashen, Ma & Bernstein 1969) (formulation nécessaire pour l'étude des gaz quantiques relativistes). Ces questions ont connu de nombreux développements parmi lesquels on peut citer (Tsang & Osborn 1975), (Bollé & Osborn 1976). Lorsqu'on considère la diffusion dans des systèmes chaotiques (Fyodorov & Sommers 1997) ou désordonnés, les propriétés de diffusion deviennent irrégulières et il faut alors considérer des propriétés statistiques. Nous nous intéresserons aux propriétés statistiques du temps de Wigner dans le contexte des systèmes désordonnés.

La deuxième partie aura pour objet l'étude du transport électrique bidimensionnel en présence d'un champ magnétique aléatoire. Comme on l'a évoqué, les systèmes désordonnés avec champ magnétique interviennent dans le contexte de l'effet Hall quantique entier. Le désordre peut être introduit dans un potentiel scalaire en présence d'un champ magnétique homogène (Wegner 1983), (Brézin, Gross & Itzykson 1984), (Macris & Pulé 1992) (*cf.* (Janßen, Viehweger, Fastenrath & Hajdu 1994) pour une revue). Dans d'autres cas, le champ magnétique lui-même est aléatoire, par exemple il peut être produit par des tubes de flux pénétrables répartis aléatoirement (Khaetskii 1991), (Nielsen & Hedegård 1995). Expérimentalement, cette situation est réalisée lorsque le gaz électronique est piégé à l'interface avec un supraconducteur de type II laissant pénétrer le champ magnétique à travers des vortex portant des flux quantifiés $\phi = n\phi_0/2$ (Bending, von Klitzing & Ploog 1990), (Geim, Bending & Grigorieva 1992), (Geim, Bending & Grigorieva 1994). Dans ces conditions l'effet principal du champ magnétique sur le gaz électronique résulte de l'interaction avec le champ à l'intérieur des tubes de flux (ce qui permet notamment une description semi-classique). Nous étudierons une situation différente pour laquelle les tubes de flux sont singuliers et impénétrables, porteurs d'une fraction du quantum de flux. L'interaction entre les électrons et les tubes de flux est alors à longue portée, décrite par le potentiel vecteur Aharonov-Bohm.

Première partie

Quelques propriétés de la diffusion quantique dans les systèmes désordonnés unidimensionnels

Chapitre 1

Introduction

Un problème de diffusion est habituellement caractérisé par la matrice S ou de manière équivalente par la donnée des déphasages $\delta_\nu(E)$ pour les différents canaux de diffusion ; les valeurs propres de la matrice S s'expriment en fonction des déphasages des ondes partielles comme $e^{i\delta_\nu}$. Le temps de Wigner est une quantité importante de la théorie de la diffusion, introduit par Eisenbud (1948) et Wigner (1955) dans une situation à un canal de diffusion, puis généralisé au cas à plusieurs canaux par Smith (1960). Il est défini comme : $\tau(E) = -i\hbar \text{Tr}_E \left\{ S^\dagger \frac{\partial S}{\partial E} \right\}$ où la trace porte sur la couche d'énergie E .

Les systèmes unidimensionnels sont traités en théorie de la diffusion comme des systèmes à deux canaux de diffusion, cependant nous restreindrons le champ de notre étude au cas d'un seul canal de diffusion. Les propriétés de diffusion sont alors entièrement données par le déphasage $\delta(E)$, et le temps de Wigner prend la forme :

$$\tau(E) \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \frac{d\delta(E)}{dE} . \quad (1.1)$$

Dans la géométrie qui nous intéresse (cf. figure 1.1), il correspond au temps passé par un paquet

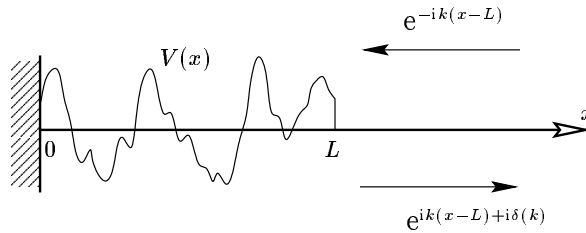


FIG. 1.1:

d'onde centré sur l'énergie E dans la région où s'exerce le potentiel. Afin de nous en convaincre, considérons un hamiltonien de Schrödinger¹ :

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) , \quad (1.2)$$

où le potentiel $V(x)$ a son support sur l'intervalle $[0, L]$. La fonction d'onde d'énergie $E = k^2$, dans la région où $V(x) = 0$, peut être séparée en une onde incidente et une onde réfléchie :

$$\psi_k(x) = e^{-ik(x-L)} + e^{ik(x-L)+i\delta(k)} \quad (1.3)$$

¹Le système d'unités est tel que $\hbar = 1$ et $2m_e = 1$.

de même pour un paquet d'onde d'énergie centrée sur l'énergie k_0^2 :

$$\phi(x, t) = \int dk g(k) \left(e^{-ik(x-L)} + e^{ik(x-L)+i\delta(k)} \right) e^{-ik^2 t} = \phi_i(x, t) + \phi_r(x, t) \quad (1.4)$$

où la fonction $g(k)$ est une fonction étroite, centrée sur k_0 . Si on développe le déphasage au voisinage de k_0 on obtient pour l'onde réfléchie :

$$\phi_r(x, t) = e^{ik_0(x-L)+i\delta(k_0)-ik_0^2 t} \int d\kappa g(k_0 + \kappa) e^{i\kappa[x-L-2k_0(t-\tau(k_0))]+O(\kappa^2)} . \quad (1.5)$$

La position du centre du paquet d'onde est donc donnée par $x_c(t) = L + v_{k_0}(t - \tau(k_0))$. $v_k = \frac{dE}{dk} = 2k$ est la vitesse de groupe. Si on place un mur en $x = L$ le déphasage est simplement $\delta = \pi$ et la position du centre du paquet d'onde est donnée par $x_c^{(0)}(t) = L + v_{k_0} t$. Il est donc manifeste que le potentiel introduit un retard dans l'onde réfléchie. Ce retard est défini par rapport à une situation de référence pour laquelle il y a un mur en $x = L$. En ce sens, le temps de Wigner correspond au temps passé par l'onde dans la région de potentiel non nul.

Cette présentation que nous venons de donner est extrêmement simplifiée. De nombreux travaux ont introduit différents temps caractérisant les problèmes de diffusion, en particulier dans les problèmes d'effet tunnel; je renvoie le lecteur aux articles de revue (Büttiker 1990), (Hauge & Støvneng 1989), (Landauer & Martin 1994) qui offrent un panorama complet sur ces questions. Certaines approches privilégient des temps définis par rapport aux déphasages à la réflexion et à la transmission; cependant Büttiker & Landauer (1982), (Büttiker 1983) ont montré qu'à basse énergie ces temps posaient quelques problèmes d'interprétation et ont insisté sur le fait que l'obtention de ces temps par une méthode de phase stationnaire (comme nous avons fait) les rend inappropriés pour décrire des situations mettant en jeu des paquets d'onde assez localisés spatialement et dispersés en énergie; si on considère la réflexion sur un mur d'un paquet d'onde étroit spatialement, les forts effets d'interférences à la réflexion rendent inopérante la méthode qui consiste à suivre le pic du paquet d'onde (que donne la méthode de la phase stationnaire). Ces auteurs ont proposé d'autres définitions des temps associés à la transmission ou à la réflexion; par exemple une de leurs approches repose sur l'étude de la précession du spin de l'électron traversant une barrière de potentiel à laquelle est superposé un champ magnétique. Un autre temps qui peut être défini est le "dwell time" introduit par Smith (1960) : $\tau_D = \frac{1}{v_k} \int_0^L dx |\psi(x)|^2$ (cette relation est obtenue en faisant le choix de normalisation de la fonction d'onde pour que l'onde incidente soit $\psi_{in} = e^{ikx}$ à une phase près). Cette expression intègre le temps passé par un paquet d'onde de vitesse de groupe v_k dans l'intervalle dx : dx/v_k , pondéré par la probabilité de présence $|\psi|^2$. Il ne distingue pas la direction finale de l'onde, contrairement aux temps à la réflexion et à la transmission. La définition de temps caractérisant la diffusion par un potentiel est un problème en soi qui sort du cadre de ce travail. Notre objectif sera d'étudier les propriétés statistiques du temps de Wigner dans la géométrie de la figure 1.1 lorsque le potentiel $V(x)$ est désordonné.

Ce problème a été abordé selon différentes approches. La première, dans le cadre de laquelle nous nous placerons, s'intéresse aux systèmes strictement unidimensionnels. Plusieurs auteurs ont utilisé la méthode du plongement invariant afin d'étudier différentes propriétés des systèmes unidimensionnels telles que les fluctuations de la résistance, du coefficient de transmission, le déphasage, ... (Rammal & Douçot 1987), (Douçot & Rammal 1987), (Heinrichs 1986),

(Heinrichs 1988), (Heinrichs 1989), nous renvoyons également à l'article très complet d'Antsygina, Pastur & Slyusarev (1981). La distribution du temps de Wigner a attiré l'attention de différents auteurs en relation avec l'étude du bruit du courant de surface pour lequel on observe une dépendance proportionnelle à la fréquence f correspondant à un bruit de tension en $1/f$ (Pendry, Kirkman & Castano 1986), (Sornette 1987). Azbel a proposé de relier ce bruit en $1/f$ à l'existence d'un effet tunnel résonnant (Azbel 1983), les résonances correspondant à des états localisés au sein du conducteur désordonné. Jayannavar et *al.* ont été les premiers à obtenir la distribution stationnaire du temps de Wigner qui présente une décroissance algébrique (Jayannavar, Vijayagovindan & Kumar 1989), (Heinrichs 1990). Celle-ci leur a permis de calculer le bruit électrique de surface. Ces auteurs ont étudié d'autres aspects du problème : ils ont notamment montré que de l'absorption dans le milieu entraîne une suppression de la queue algébrique dans la distribution du temps de Wigner (Joshi, Gupta & Jayannavar 1997). Ils se sont également intéressés à un hamiltonien avec un potentiel qui est, non pas un bruit blanc comme nous l'étudierons au chapitre suivant, mais un mouvement brownien (Joshi & Jayannavar 1997) ; la distribution du temps de Wigner obtenue à haute énergie est analogue à celle qui sera obtenue pour le potentiel gaussien.

À la frontière entre l'approche des systèmes unidimensionnels et celle de la théorie des matrices aléatoires (RMT), on doit également mentionner les travaux de Mucciolo, Jalabert & Pichard (1997) sur les systèmes quasi-unidimensionnels.

Une autre approche qui a été abondamment utilisée dans l'étude de la diffusion quantique dans les systèmes chaotiques est celle de la RMT. Nous ne mentionnons dans ce paragraphe que les travaux liés au temps de Wigner. Fyodorov & Sommers (1996) ont étudié le cas des systèmes à N canaux de diffusion avec brisure de la symétrie par renversement du temps ($\beta = 2$) (pour une revue sur la RMT pour les systèmes avec brisure de symétrie par renversement du temps, voir (Fyodorov & Sommers 1997)). À chaque canal de diffusion a est associé un temps $\tau_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\delta_a}{dE}$; le temps de Wigner est $\tau = \sum_{a=1}^N \tau_a$. Par une méthode supersymétrique, les auteurs obtiennent (Fyodorov & Sommers 1997, §5.B) dans un régime de fort recouvrement des résonances ($\Gamma \gg \Delta$) le résultat suivant :

$$P_{\beta=2,N}^{\text{FS}}(\tau_s) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{a=1}^N \delta \left(\tau_s - \frac{\tau_a}{\tau_H} \right) \right\rangle = \frac{1}{N! \tau_s^{N+2}} e^{-\frac{1}{\tau_s}} . \quad (1.6)$$

Le temps de Heisenberg $\tau_H = \frac{2\pi}{\Delta}$ est relié à la valeur moyenne du temps de Wigner : $\langle \tau \rangle = \tau_H$. Γ désigne la largeur moyenne des résonances et Δ l'écart moyen entre niveaux ($1/\Delta$ est donc la densité d'états). Ce régime de fort recouvrement des résonances correspond à un régime de haute énergie.

Simultanément, Gopar, Mello & Büttiker (1996), dans une étude sur la capacité de systèmes mésoscopiques ont montré que la capacité de tels systèmes (qui est distincte de la capacité géométrique d'un conducteur macroscopique) est reliée au temps de Wigner. Ces auteurs obtiennent dans ce travail la distribution du temps de Wigner pour le cas à un canal, pour différentes classes d'universalité (GOE, GUE ou GSE correspondant respectivement à $\beta = 1, 2, 4$) :

$$P_{\beta,N=1}^{\text{GMB}}(\tau_s) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \frac{1}{\tau_s^{(\beta+4)/2}} e^{-\frac{\beta}{2\tau_s}} . \quad (1.7)$$

Dans le cas $\beta = 2$, cette dernière distribution est en accord avec l'expression (1.6) de Fyodorov et Sommers pour le cas à un seul canal. Enfin, plus récemment, Brouwer, Frahm & Beenakker (1997), (Brouwer, Frahm & Beenakker 1999) ont donné la solution générale pour le cas à plusieurs canaux et pour les différentes classes d'universalité. Ils ont montré que la distribution jointe pour les N temps τ_n associés aux N canaux de diffusion est donnée par l'ensemble de Laguerre de la théorie des matrices aléatoires :

$$P_\beta^{\text{BFB}}(\gamma_1, \dots, \gamma_N) \propto \prod_{i < j} |\gamma_i - \gamma_j|^\beta \prod_k \gamma_k^{\beta N/2} e^{-\beta \gamma_k/2} \quad (1.8)$$

où $\gamma_n \equiv \frac{\tau_n}{\tau_n}$. Le fait qu'on s'attende à une certaine universalité pour la distribution du temps de Wigner justifie l'approche par la RMT ; la distribution est uniquement caractérisée par le nombre de canaux et la classe d'universalité β . De manière générale, elle présente des queues algébriques avec comme conséquence particulière la divergence des moments à partir d'un certain ordre.

Cependant, une telle approche par la théorie des matrices aléatoires est une approche effective qui ne remplace pas une description microscopique. D'autre part il nous a semblé intéressant d'identifier les mécanismes physiques responsables de la divergence des moments.

On doit également insister sur le fait que l'approche de la théorie des matrices aléatoires ne peut être utilisée pour des systèmes strictement unidimensionnels. Pour un système désordonné unidimensionnel, tous les états sont localisés (*cf.* (Mott & Twose 1961) et (Goldsheidt, Molchanov & Pastur 1977), (Pastur & Figotin 1978) pour une preuve rigoureuse). La théorie des matrices aléatoires décrit des systèmes dans un régime diffusif dans lesquels la particule subit un grand nombre de collisions sans toutefois être localisée par l'effet des interférences. Il faut donc respecter la condition $\ell \ll L \ll \lambda$ où ℓ est le libre parcours moyen, λ la longueur de localisation et L la dimension caractéristique du système. Il est possible de montrer que dans les systèmes désordonnés unidimensionnels à haute énergie, il existe une relation entre la longueur de localisation et la longueur de diffusion qui interdit l'existence d'un tel régime. La longueur de diffusion ℓ est obtenue dans l'approximation de Born en calculant la "self energy"

$\Sigma^{(2)}(p; E) = \overset{\star}{\underset{q}{\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array}}} \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \bullet \\ \xrightarrow{p} \end{array} = -\frac{i}{2\tau_e(E)} \quad (G_0^+(p; E) = \frac{1}{E - p^2 + ic} \text{ est la fonction de Green libre}).$
 Dans cette approximation la fonction de Green moyennée sur le désordre s'écrit $\langle G^+(p; E) \rangle = \frac{1}{E - p^2 + i\frac{1}{2\tau_e}}$, ou dans une représentation spatiale : $\langle G^+(x, x'; k^2) \rangle = \frac{1}{2(ik - 1/4k\tau_e)} e^{(ik - \frac{1}{4k\tau_e})|x - x'|}$ (on a utilisé que $\tau_e^{-1} \ll k^2$ à haute énergie). La longueur de diffusion est donc donnée d'après l'expression précédente par $\ell = 4k\tau_e$. D'autre part, la relation de Thouless (Thouless 1972) $\frac{1}{L} \int dx \langle G^+(x, x; E) \rangle = \frac{d}{dE} \gamma(E) - i\rho(E)$ montre que la longueur de localisation est reliée à la "self energy" par : $\frac{d}{dE} \gamma(E) = -\frac{1}{8k^3\tau_e}$. Pour un potentiel nul en moyenne, le calcul du diagramme conduit à $\Sigma^{(2)}(p; E) = \frac{1}{L} \sum_q \tilde{B}(q - p) G_0^+(q; E)$ où $\tilde{B}(q) = \int dx \langle V(x)V(0) \rangle e^{iqx}$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du désordre. Lorsqu'on se place à haute énergie, seuls les petits transferts d'impulsion par l'impureté contribuent de sorte que $\Sigma^{(2)} \simeq -i\frac{\tilde{B}(0)}{2k}$; la longueur de diffusion est alors : $\ell \simeq \frac{4E}{\tilde{B}(0)}$ et la longueur de localisation $\lambda \simeq \frac{8E}{\tilde{B}(0)}$ ce qui montre que $2\ell \simeq \lambda$. L'argument peut être vérifié aisément dans le cas du désordre gaussien pour lequel $\tilde{B}(q) = \sigma$ est une constante.

Cette relation implique qu'à haute énergie, lorsqu'on s'attend à une certaine universalité, les systèmes désordonnés unidimensionnels ne présentent que deux régimes : le régime balistique ($L \ll \lambda$) et le régime localisé ($L \gg \lambda$), mais pas de régime diffusif qui serait décrit par la

théorie des matrices aléatoires ; pour une discussion de cet aspect nous renvoyons à (Fyodorov & Mirlin 1994). Les systèmes désordonnés unidimensionnels et la théorie des matrices aléatoires décrivent donc deux situations physiques différentes. Malgré cela nous constaterons qu'il existe certaines similarités entre les distributions du temps de Wigner prévues par les deux théories.

Dans ce travail, nous considérons le problème de la diffusion d'ondes dans un milieu désordonné dans le contexte de la diffusion quantique d'une particule non relativiste, cependant il a d'autres réalisations, par exemple pour des ondes électromagnétiques. Notons l'existence de travaux dans ce contexte (Frisch, Froeschle, Scheidecker & Sulem 1973), (Sulem 1973). Récemment des expériences ont été réalisées dans ce cadre pour l'étude de la transmission d'ondes à travers un milieu désordonné constitué de billes de polystyrène (Sebbah, Legrand, van Tiggelen & Genack 1997). Ces expériences ont permis de mesurer des temps analogues à ceux introduits précédemment (Sebbah & Genack 1996), (Genack, Sebbah, Stoytchev & van Tiggelen 1999), (Sebbah, Legrand & Genack 1999).

Par la suite nous étudierons les propriétés statistiques du temps de Wigner pour différents modèles désordonnés.

Dans le chapitre 2 nous nous intéresserons à un modèle à désordre $V(x)$ distribué selon une loi gaussienne : $P[V(x)] \propto \exp -\frac{1}{2\sigma} \int dx V(x)^2$. La fonction de corrélation de ce potentiel est donnée par une distribution δ : $\langle V(x)V(x') \rangle = \sigma\delta(x-x')$. Ce type de potentiel est représentatif d'une classe de potentiels désordonnés présentant des corrélations à très courte portée à l'échelle des autres distances caractéristiques du problème.

Dans le chapitre 3, le modèle que nous considérerons est décrit par un hamiltonien supersymétrique pour lequel le potentiel est donné par $V(x) = \phi'(x) + \phi^2(x)$ où la fonction ϕ sera distribuée par une loi gaussienne. Alors qu'une version discrétisée du modèle gaussien serait un hamiltonien d'Anderson avec désordre diagonal (les énergies affectées aux sites sont aléatoires), l'hamiltonien supersymétrique aurait pour version discrétisée un hamiltonien d'Anderson avec désordre non diagonal (les probabilités de transitions entre sites sont aléatoires). Le modèle supersymétrique et le modèle gaussien ont des propriétés spectrales et de localisation assez différentes. L'étude des propriétés statistiques du temps de Wigner dans les deux cas constituera donc un bon test de l'universalité de la distribution du temps de Wigner.

Dans le chapitre 4, nous reviendrons ensuite à un hamiltonien à désordre diagonal à travers l'étude du modèle d'impuretés δ . Nous verrons que ce modèle, plus riche que le modèle gaussien, doit reproduire les résultats de ce dernier dans une certaine limite. Il nous offrira des possibilités intéressantes pour mener une étude numérique permettant de valider les résultats analytiques. Au-delà du régime de haute énergie considéré jusqu'alors, nous pourrions étendre l'étude de la distribution du temps de Wigner à des régimes de basse énergie.

Dans le chapitre 5, nous remarquerons que les différents modèles conduisent naturellement à des représentations du temps de Wigner en termes de fonctionnelles exponentielles d'un mouvement brownien. Nous montrerons qu'à haute énergie, il est possible d'aboutir à une telle représentation de manière générale pour les systèmes désordonnés unidimensionnels. Cette approche permet de comprendre pourquoi les propriétés statistiques du temps de Wigner sont indépendantes du modèle à haute énergie.

Le chapitre 6 aura pour objet l'étude d'un modèle unidimensionnel qui présente une transition de délocalisation pour certaines valeurs de l'énergie : le modèle des dimères, introduit dans une version discrète (hamiltonien d'Anderson) par Dunlap, Wu & Phillips (1990) et Florès (1989). Nous étudierons différents aspects du modèle, et notamment comment la distribution du temps de Wigner est affectée par la transition de délocalisation.

Pour chacun des modèles considérés, nous donnerons une présentation détaillée des propriétés spectrales et de localisation, éléments nécessaires à l'étude du temps de Wigner.

Chapitre 2

Le modèle gaussien

2.1 Définition du modèle

Considérons l'hamiltonien

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) , \quad (2.1)$$

où $V(x)$ désigne un potentiel désordonné supposé nul en moyenne : $\langle V(x) \rangle = 0$. La nature du désordre est notamment décrite par la fonction de corrélation du potentiel : $B(x - x') \stackrel{\text{def}}{=} \langle V(x)V(x') \rangle$, supposée s'annuler sur une distance typique x_c qui définit la longueur de corrélation du désordre. Une deuxième échelle, qui caractérise l'intensité du désordre, est $\sigma = \int dx B(x)$ (par analyse dimensionnelle on trouve que la dimension de σ est $[\sigma] = \text{longueur}^{-3}$). Si l'on dresse l'inventaire des différentes échelles de longueur que l'on rencontre dans le problème ainsi défini, on trouve respectivement : la taille du système L , la longueur d'onde k^{-1} (pour un état d'énergie $E = k^2$), la longueur de corrélation x_c et enfin la longueur $\sigma^{-1/3}$. Nous considérerons des systèmes dont la taille est grande devant toutes les autres longueurs, d'autre part on choisit $k^{-1} \gg x_c$ pour maximiser les effets d'interférences quantiques dus au désordre. Un régime de haute énergie $k \gg \sigma^{1/3}$ semble *a priori* intéressant parce qu'il sera moins sensible à la nature précise du désordre qui apparaît comme une perturbation par rapport au problème libre. Les différentes échelles respectent alors la hiérarchie : $L \gg \sigma^{-1/3} \gg k^{-1} \gg x_c$. Dans ce contexte, il paraît assez naturel, afin de simplifier le problème, d'éliminer la plus petite distance : $x_c \rightarrow 0$. Différents modèles sont caractérisés par des corrélations $\langle V(x)V(x') \rangle \propto \delta(x - x')$, parmi lesquels le modèle d'impuretés δ qui sera étudié au chapitre 4, et également le modèle gaussien, dit modèle de Halperin. Le spectre de cet hamiltonien a été obtenu par Halperin (1965). On peut trouver dans (Lifshits, Gredeskul & Pastur 1988, §6.2 et §10.2) et (Itzykson & Drouffe 1989, ch.10) une étude détaillée des propriétés spectrales de ce modèle par différentes approches (méthode des répliques, ...). Notons que Berezinskiĭ (1974) a développé une technique de resommation des diagrammes de la série de perturbation propre au modèle gaussien. Ceci permet d'étudier des objets tels que les fonctions de corrélation densité-densité ou courant-courant (conductivité) (Berezinskiĭ 1974), (Gogolin, Melnikov & Rashba 1976).

Le modèle est défini par la loi de probabilité caractérisant le potentiel $V(x)$: $P[V(x)]\mathcal{D}V(x) = \mathcal{D}V(x) \exp -\frac{1}{2\sigma} \int dx V(x)^2$. Afin de caractériser la nature du désordre, introduisons une fonctionnelle génératrice $g[f] \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle e^{\int dx V(x)f(x)} \right\rangle$ dont le développement en puissances de f donne

les différents moments (ou plutôt fonctions de corrélations) du potentiel : $\langle V(x_1) \cdots V(x_n) \rangle = \left. \frac{\delta^n g[f]}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)} \right|_{f=0}$. Un développement analogue de la fonctionnelle $w[f] = \ln g[f]$ permet d'obtenir les cumulants.

Le cas du désordre gaussien est simple, la fonctionnelle génératrice vaut $g[f] = \exp \frac{\sigma}{2} \int dx f(x)^2$. Seul le second cumulant est différent de 0 :

$$\langle V(x) \rangle = 0 \quad (2.2)$$

$$\langle V(x)V(x') \rangle = \sigma \delta(x - x') . \quad (2.3)$$

2.2 Le formalisme de phase : spectre et localisation

Nous rappelons une technique due à Benderskii & Pastur (1970), (Pastur & Fel'dman 1974) ; on pourra également en trouver une présentation détaillée dans (Antsygina, Pastur & Slyusarev 1981), (Lifshits *et al.* 1988). Cette technique, adaptée aux systèmes unidimensionnels, permet d'étudier les propriétés spectrales et de localisation. Nous verrons plus loin qu'elle peut être utilisée pour étudier les propriétés statistiques des quantités caractérisant la diffusion (déphasage, temps de Wigner).

L'idée du formalisme de phase repose sur le fait que, dans un système unidimensionnel, le nombre de nœuds de la fonction d'onde d'énergie E correspond au nombre d'états d'énergie inférieure à E (par exemple, ceci est explicite pour le problème libre dans une boîte de longueur L : la fonction d'onde du n ième état se comporte comme : $\psi_n = \mathcal{N} \sin \frac{n\pi x}{L}$). Introduisons les variables polaires ρ et θ reliées à la fonction d'onde et à sa dérivée par :

$$\psi(x) = \rho(x) \sin \theta(x) \quad (2.4)$$

$$\psi'(x) = k \rho(x) \cos \theta(x) . \quad (2.5)$$

Le nombre d'états d'énergies inférieures à $E = k^2$ est donné par le nombre de nœuds de ψ , ou de manière équivalente par le nombre de fois que la variable θ franchit un multiple entier de π . On montre plus loin que la fonction $\theta(x)$ ne peut changer d'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ que pour $n \rightarrow n+1$ (elle ne peut pas reculer dans l'intervalle précédent). Il découle de cette propriété que le nombre de nœuds de la fonction d'onde pour un système de taille L est donné par $E \left[\frac{\theta(L) - \theta(0)}{\pi} \right]$. Si on est capable de calculer l'évolution de la phase accumulée θ , on détermine la densité d'états intégrée moyenne par unité de longueur $N(E)$:

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \theta(L) \rangle}{\pi L} . \quad (2.6)$$

La deuxième quantité à laquelle s'intéresse le formalisme de phase est l'exposant de Lyapunov. Dans un système désordonné unidimensionnel les fonctions d'onde sont toutes localisées, quelle que soit leur énergie, à condition que le potentiel soit un processus markovien (Goldsheidt *et al.* 1977), (Pastur & Figotin 1978)¹. Elles sont localisées autour d'un point et leur enveloppe décroît exponentiellement en fonction de la distance à ce point. L'exposant de Lyapunov, inverse

¹Nous verrons plus tard que l'introduction de corrélations dans le potentiel peut induire l'apparition d'états délocalisés à en certains points du spectre (*cf.* le modèle à désordre d'alliage corrélé).

de la longueur de localisation, est le coefficient qui caractérise le comportement exponentiel de l'enveloppe de la fonction d'onde : $\rho = \sqrt{\psi^2 + k^{-2}\psi'^2} \sim e^{\gamma x}$. Il est défini par :

$$\gamma(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \xi(L) \rangle}{L} \quad (2.7)$$

où l'on a introduit la variable $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln \rho$. Notons que $N(E)$ et $\gamma(E)$ sont auto-moyennants : les valeurs moyennes sont donc superflues dans la limite $L \rightarrow \infty$.

a) $E = +k^2$

Le changement de variables (2.4,2.5) permet de passer de l'équation de Schrödinger, mise sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre couplées :

$$\frac{d}{dx}\psi = \psi' \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dx}\psi' = (V(x) - k^2)\psi \quad (2.9)$$

aux deux équations :

$$\frac{d\theta}{dx} = k - \frac{V(x)}{k} \sin^2 \theta \quad (2.10)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{V(x)}{2k} \sin 2\theta . \quad (2.11)$$

L'équation (2.10) montre que θ ne peut décroître que sous l'effet du terme $-\frac{V(x)}{k} \sin^2 \theta$ qui s'annule pour les multiples entiers de $n\pi$: ceci implique effectivement que la phase ne peut que sauter d'un intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ à $[(n+1)\pi, (n+2)\pi]$ et jamais l'inverse.

b) $E = -k^2$

De manière analogue, lorsque l'énergie est négative, on trouve :

$$\frac{d\theta}{dx} = k \cos 2\theta - \frac{V(x)}{k} \sin^2 \theta \quad (2.12)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = k \sin 2\theta + \frac{V(x)}{2k} \sin 2\theta . \quad (2.13)$$

Dans ce cas non plus la phase ne peut reculer entre les intervalles $[n\pi, (n+1)\pi]$. La présence du terme $k \cos 2\theta$ montre que la phase est toujours ramenée vers $(n+1/4)\pi$. D'autre part le terme $-\frac{V(x)}{k} \sin^2 \theta$, qui peut faire décroître la phase, s'annule pour $\theta = n\pi$ dans une région où l'autre terme est positif. CQFD.

À titre d'exemple considérons un potentiel constant : $V(x) = -V_0$ ($V_0 > 0$). D'après (2.12), pour $E = -k^2 < -V_0$ la phase θ est bloquée dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ et la densité d'états est donc nulle. Pour $E = -k^2 > -V_0$, en intégrant l'équation (2.12) on trouve que $\tan \theta(L) = (V_0/k^2 - 1)^{-1/2} \tan(\sqrt{V_0 - k^2}L)$, ce qui montre que $\theta(L) = \sqrt{V_0 - k^2}L + (\text{fluctuations d'ordre } \pi)$. La densité d'états intégrée est alors donnée par $N(-k^2) = \frac{1}{\pi} \sqrt{V_0 - k^2}$. De même, pour $E = k^2$, l'intégration de (2.10) conduit à : $\tan \theta(L) = (V_0/k^2 + 1)^{-1/2} \tan(\sqrt{V_0 + k^2}L)$. Les deux équations (2.12,2.10) conduisent donc bien au résultat libre : $N(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{E + V_0}$ pour $E > -V_0$ et 0 sinon.

2.3 Distribution stationnaire de la phase et densité d'états

Le fait que $N(E)$ soit reliée à $\langle \theta(L) \rangle$ pour $L \rightarrow \infty$ suggère qu'il existe un lien entre la densité d'états intégrée et la distribution stationnaire de la phase. Compter le nombre de zéros (par unité de longueur) de la phase sur l'intervalle $[0, L]$ peut s'exprimer à l'aide de la relation :

$$N(E) = \frac{k}{L} \int_0^L dx \langle \delta(\sin \theta(x)) \rangle \quad (2.14)$$

(d'après (2.10), au voisinage de $n\pi$, $\theta \simeq n\pi + k(x - x_0)$; donc $k \int_{x_0^-}^{x_0^+} dx \delta(\sin \theta(x)) \simeq k \int_{x_0^-}^{x_0^+} dx \delta(k(x - x_0)) = 1$). On peut encore réécrire l'intégrand comme :

$$\langle \delta(\sin \theta(x)) \rangle = \sum_n \langle \delta(\theta(x) - n\pi) \rangle = \sum_n \tilde{P}(n\pi; x) \quad (2.15)$$

où $\tilde{P}(\theta; x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \delta(\theta(x) - \theta) \rangle$ est la distribution de probabilité de la phase accumulée. On introduit également la distribution de la phase périodique $P(\theta; x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \tilde{P}(\theta + n\pi; x)$ en terme de laquelle la densité d'états intégrée s'écrit :

$$N(E) = \frac{k}{L} \int_0^L dx P(0; x) . \quad (2.16)$$

Si on suppose que la phase atteint sa distribution stationnaire sur une distance très petite devant L (ou si on prend la limite $L \rightarrow \infty$) on pourra écrire

$$N(E) = k P_J(0) \quad (2.17)$$

où $P_J(\theta)$ est la distribution stationnaire de la phase.

Jusqu'à présent nous nous sommes attachés à donner une présentation générale du formalisme de phase sans faire appel à des hypothèses particulières sur la nature du désordre. Appliquons maintenant ces considérations au cas où le potentiel $V(x)$ est un bruit blanc. Les équations différentielles stochastiques précédentes sont interprétées dans le sens de Stratonovitch (*cf.* annexe A). (2.10,2.11) peuvent être associées à une équation de Fokker-Planck pour la distribution jointe $P(\theta, \xi; x)$ sur laquelle nous reviendrons. Dans ce paragraphe on s'intéresse à la distribution de la phase, qui obéit à l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial}{\partial x} P(\theta; x) = -k \frac{\partial}{\partial \theta} P(\theta; x) + \frac{\sigma}{2k^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta P(\theta; x) . \quad (2.18)$$

La solution stationnaire de cette équation est une solution à courant de probabilité J constant :

$$P_J(\theta) = \frac{2k^2 J}{\sigma} \frac{e^{-\frac{2k^3}{\sigma} (\cotg \theta + \frac{1}{3} \cotg^3 \theta)}}{\sin^2 \theta} \int_{\theta}^{\pi} d\theta' \frac{e^{\frac{2k^3}{\sigma} (\cotg \theta' + \frac{1}{3} \cotg^3 \theta')}}{\sin^2 \theta'} . \quad (2.19)$$

Par commodité on introduit la variable $\tilde{z} \equiv -\cotg \theta$. La distribution de cette dernière variable est :

$$W(\tilde{z}) = \frac{2k^2 J}{\sigma} \int_0^{\infty} d\tilde{z}' e^{-\frac{2k^3}{\sigma} (\tilde{z}'(1+\tilde{z}^2) + \tilde{z}\tilde{z}'^2 + \frac{1}{3}\tilde{z}'^3)} . \quad (2.20)$$

La limite $\theta \rightarrow 0$ correspond pour la variable \tilde{z} à $\tilde{z} \rightarrow -\infty$, le premier terme dans l'exponentielle domine et on obtient :

$$W(\tilde{z} \rightarrow -\infty) \simeq \frac{J}{k} \frac{1}{1 + \tilde{z}^2} = \frac{J d\theta}{k d\tilde{z}} . \quad (2.21)$$

On constate ainsi que $P_J(0) = \frac{J}{k}$ ce qui montre que le courant de probabilité de la phase est précisément égal à la densité d'états intégrée par unité de longueur :

$$N(E) = J \quad (2.22)$$

cette relation est vraie quel que soit le potentiel et s'interprète de la manière suivante : J mesure le flux de la phase à travers l'intervalle $[0, \pi]$, *i.e.* le nombre de fois que la phase traverse cet intervalle par unité de longueur, ce qui est précisément la définition de $N(E)$.

La condition de normalisation de $W(\tilde{z})$ conduit à l'expression de la densité d'états (Halperin 1965) (voir aussi (Lifshits *et al.* 1988, §6.2)) :

$$N(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(\sigma/2)^{1/3}}{\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-\left(\frac{y^3}{12} + \frac{E}{(\sigma/2)^{2/3}} y\right)}} = \frac{1}{\pi} \frac{(\sigma/2)^{1/3}}{\text{Ai}^2\left(\frac{-E}{(\sigma/2)^{2/3}}\right) + \text{Bi}^2\left(\frac{-E}{(\sigma/2)^{2/3}}\right)} \quad (2.23)$$

où $\text{Ai}(x)$ et $\text{Bi}(x)$ sont des fonctions d'Airy (*cf.* (Abramowitz & Stegun 1964)). À haute énergie on retrouve la densité d'états intégrée libre, tandis qu'à basse énergie, la méthode du col montre que la densité d'états décroît exponentiellement vite : si $|E| \gg \sigma^{2/3}$

$$N(E) \simeq \frac{\sqrt{E}}{\pi} \text{ pour } E > 0 \quad (2.24)$$

$$\simeq \frac{\sqrt{-E}}{\pi} e^{-\frac{8(-E)^{3/2}}{3\sigma}} \text{ pour } E < 0 . \quad (2.25)$$

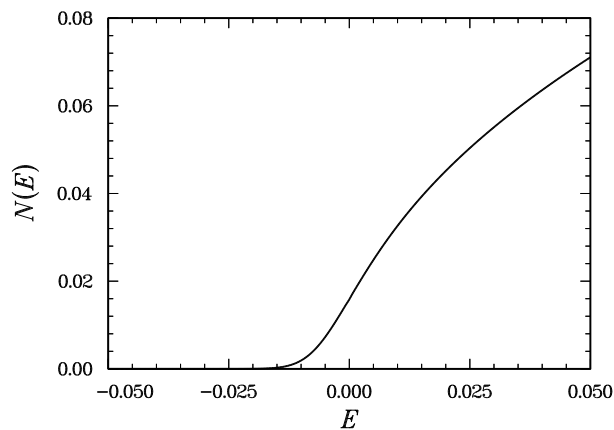


FIG. 2.1: Densité d'états intégrée pour $\sigma = 0.001$

L'expression de la distribution $W(\tilde{z})$ permet d'obtenir un développement de haute énergie (*i.e.* $k \gg \sigma^{1/3}$) de la distribution stationnaire. Dans

$$W(\tilde{z}) = \frac{2k^2 J}{\sigma} \int_0^\infty d\tilde{z}' e^{-K\tilde{z}'(1+\tilde{z}^2)} e^{-K(\tilde{z}\tilde{z}'^2 + \frac{1}{3}\tilde{z}'^3)} \quad (2.26)$$

la première exponentielle varie sur une échelle K^{-1} alors que la deuxième varie sur $(K\tilde{z})^{-1/2}$ (on a posé $K \equiv \frac{2k^3}{\sigma}$). Dans la limite $K \gg 1$ on peut utiliser le développement : $\int_0^\infty dx e^{-Kx} f(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{K^{n+1}}$. On aboutit à :

$$\begin{aligned} P_J(\theta) &= \frac{2k^2 J}{\sigma} \frac{1}{K} \left[1 + \frac{1}{K} \sin 2\theta \sin^2 \theta - \frac{2}{K^2} \sin^6 \theta (6 \sin^2 \theta - 5) + O(1/K^3) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[1 + \frac{1}{K} \sin 2\theta \sin^2 \theta + \frac{2}{K^2} \left(\frac{5}{64} - \sin^6 \theta (6 \sin^2 \theta - 5) \right) + O(1/K^3) \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ce développement montre que dans la limite de haute énergie la phase est uniformément distribuée.

On peut avancer un argument qualitatif basé sur l'analyse de l'équation (2.10) pour estimer la distance typique sur laquelle la distribution $P(\theta; x)$ atteint sa distribution stationnaire. À haute énergie le terme k de (2.10) domine, la phase évolue approximativement comme $\theta \sim kx$. Le second terme donne des fluctuations qu'on peut estimer en écrivant que : $-\int_0^x dx' \frac{V(x')}{k} \sin^2 \theta(x') \sim \frac{\sqrt{\sigma x}}{2k}$. $P(\theta; x)$ atteint sa distribution stationnaire lorsque les fluctuations sont grandes devant π , *i.e.* lorsque $\tilde{P}(\theta; x)$ est étalée sur un intervalle grand devant π : $\frac{\sqrt{\sigma x}}{2k} \gg \pi$, autrement dit lorsque $x \gg \pi^2 \frac{4k^2}{\sigma}$. Nous verrons par la suite que la deuxième partie de cette inégalité fait intervenir la longueur de localisation λ qui semble donc caractériser la distance sur laquelle la phase se décorrèle.

2.4 Localisation

De même qu'il existe un lien entre la densité d'états et la distribution stationnaire de la phase, on peut trouver une relation entre cette dernière et l'exposant de Lyapunov.

Dans le cas du bruit blanc, les deux équations stochastiques couplées pour θ et ξ , interprétées dans le sens de Stratonovich (*cf.* annexe A), conduisent à une équation de Fokker-Planck pour la distribution jointe $P(\theta, \xi; x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(\theta, \xi; x) = & \left[-k \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sigma}{2k^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \sin 2\theta \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \xi} \sin 2\theta \right) \right] P(\theta, \xi; x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

L'exposant de Lyapunov est donné par :

$$\gamma(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \xi(L) \rangle}{L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial L} \langle \xi(L) \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial L} \int d\theta \int d\xi \xi P(\theta, \xi; L). \quad (2.29)$$

En utilisant l'expression de $\frac{\partial}{\partial L} P(\theta, \xi; L)$ donnée par l'équation de Fokker-Planck on aboutit après intégrations par parties à la relation :

$$\gamma(E) = -\frac{\sigma}{2k^2} \int_0^\pi d\theta \cos 2\theta \sin^2 \theta P_J(\theta). \quad (2.30)$$

Notons au passage que Hansel & Luciani (1989) ont obtenu cette relation dans un contexte différent puisqu'ils se sont intéressés à la diffusion classique d'une particule soumise à une force aléatoire. Ils ont étudié la relation fondamentale de la dynamique pour une force $-Ex(t) + f(t)x(t)$ où $f(t)$ est un bruit blanc, problème équivalent au problème de localisation unidimensionnel.

Lifshits, Pastur et Gredeskul donnent (Lifshits *et al.* 1988, §10.2) :

$$\gamma(E) = \frac{(\sigma/2)^{1/3} \int_0^\infty dy \sqrt{y} e^{-(\frac{y^3}{12} + \frac{E}{(\sigma/2)^{2/3}} y)}}{2 \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-(\frac{y^3}{12} + \frac{E}{(\sigma/2)^{2/3}} y)}} \quad (2.31)$$

dont on peut extraire les comportements limites pour $|E| \gg \sigma^{2/3}$:

$$\gamma(E) \simeq \frac{\sigma}{8E} \text{ pour } E > 0 \quad (2.32)$$

$$\simeq \sqrt{-E} \text{ pour } E < 0. \quad (2.33)$$

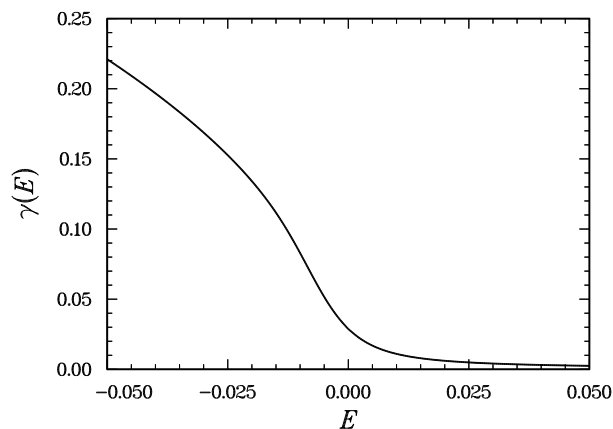


FIG. 2.2: Exposant de Lyapunov pour $\sigma = 0.001$

Notons une relation amusante propre au modèle gaussien : $\gamma(E) = \frac{\sigma}{4} \frac{d}{dE} \ln N(E)$ qui montre notamment que dans ce modèle, la densité d'états est proportionnelle au produit $N(E)\gamma(E)$.

À énergie nulle, on peut facilement obtenir les expressions suivantes de la densité d'états intégrée et de l'exposant de Lyapunov :

$$N(E=0) = \frac{6^{5/6}}{\sqrt{8\pi}\Gamma(1/6)} \sigma^{1/3} \quad (2.34)$$

$$\gamma(E=0) = \frac{6^{1/3}\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1/6)} \sigma^{1/3}. \quad (2.35)$$

La densité d'états reste finie : $\rho(0) = \frac{6^{7/6}}{\sqrt{2}\Gamma(1/6)^2} \sigma^{-1/3}$. Ces relations illustrent que les états du bord de bande ($k \ll \sigma^{1/3}$) sont beaucoup plus affectés par la présence du désordre que les états éloignés du bord de bande ($k \gg \sigma^{1/3}$) : la localisation des fonctions d'onde y est plus importante à faible désordre. En effet, à faible désordre la longueur de localisation se comporte comme $\lambda(E) \propto \frac{1}{\sigma}$ à énergie finie alors qu'elle diverge seulement comme $\lambda(0) \propto \frac{1}{\sigma^{1/3}}$ à énergie nulle. On peut trouver cette remarque appliquée au cas des systèmes discrets dans (Derrida & Gardner 1984), (Luck 1992) où l'on trouvera plus d'informations sur cette question.

2.4.1 Distribution de ξ à haute énergie ; fluctuations de la longueur de localisation d'un système de taille finie

À haute énergie nous avons montré que la phase est uniformément distribuée, ce qu'on peut espérer être la source de certaines simplifications, en particulier pour évaluer la distribution de la variable ξ qui donne l'exposant de Lyapunov. Il est en effet intéressant de connaître les fluctuations de ξ/L , qui sont reliées aux fluctuations de la longueur de localisation pour un système de taille finie.

D'autre part nous développerons des arguments utiles, par la suite, pour l'étude de la distribution du temps de Wigner. À haute énergie, la phase oscille sur une échelle caractéristique donnée par k^{-1} , et est uniformément distribuée. D'autre part la variable ξ évolue sur une échelle caractéristique $\gamma(E)^{-1}$, beaucoup plus grande que la longueur d'onde, ce qui suggère de faire l'hypothèse que la variable rapide θ se décorrèle de la variable lente ξ . Dans ce cas on peut moyenner sur θ dans l'équation de Fokker-Planck (2.28) et on obtient ainsi une équation de Fokker-Planck pour la variable ξ (Antsygina *et al.* 1981) :

$$\frac{\partial}{\partial x} P(\xi; x) = \gamma \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) P(\xi; x) \quad (2.36)$$

qui est l'équation de diffusion d'un mouvement brownien avec dérive². La solution de cette équation est :

$$P(\xi; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma x}} \exp -\frac{(\xi - \gamma x)^2}{2\gamma x} \quad (2.37)$$

où l'on a posé $\gamma \equiv \frac{\sigma}{8k^2}$ (valeur de l'exposant de Lyapunov à haute énergie). On retrouve que la valeur moyenne de ξ à haute énergie est $\langle \xi \rangle = \gamma L$. Les fluctuations de ξ sont gaussiennes avec un second cumulant $\langle \langle \xi^2 \rangle \rangle = \gamma L$ égal au premier³. Ceci montre que la variable ξ/L qui donne l'exposant de Lyapunov est auto-moyennante.

La construction des fonctions d'onde (Antsygina *et al.* 1981) suit la procédure suivante : on intègre l'équation de Schrödinger, mise sous la forme (2.10,2.11), depuis chaque bord du système ; le raccordement des solutions partant de chaque bord s'établit chaque fois que l'énergie k^2 correspond à une valeur propre de l'hamiltonien. À haute énergie, les résultats précédents nous conduisent à l'image physique suivante : la fonction d'onde est construite à partir de deux solutions oscillant rapidement sur une échelle k^{-1} , multipliées par des enveloppes exponentielles variant sur une échelle $\lambda \gg k^{-1}$. Un état particulier localisé autour d'un point x_0 a donc une forme approchée : $\psi_k \sim \sin(kx)e^{-\gamma|x-x_0|}$.

2.5 Diffusion dans la région désordonnée

Revenons à des considérations générales que nous appliquerons par la suite au modèle gaussien. Dans ce qui précède, nous avons rappelé le formalisme de phase ainsi que certains résultats qui en découlent, nécessaires à notre étude. Nous allons maintenant nous intéresser

² Soit $W(x)$ un processus de Wiener normalisé : $\langle W(x) \rangle = 0$ et $\langle W(x)W(x') \rangle = \min(x, x')$. Le mouvement brownien $B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\alpha x + \sqrt{2\alpha}W(x)$ est dit de dérive μ . L'équation (2.36) est donc l'équation de diffusion pour un mouvement brownien de dérive 2 : ξ est égal en loi au processus $\xi(x) \stackrel{(\text{loi})}{=} \gamma x + \sqrt{\gamma}W(x)$. Remarquons que $2\xi(x)$ est alors un mouvement brownien de dérive 1.

³ $\langle \langle X^n \rangle \rangle$ désigne le n ème cumulant de la variable aléatoire X .

plus spécifiquement au problème de diffusion. Nous donnons dans ce paragraphe une méthode générale pour calculer le déphasage et le temps de Wigner d'un système unidimensionnel.

On considère un état de stationnaire de diffusion qui s'exprime dans la région libre ($x \geq L$) comme :

$$\psi_k(x) = e^{-ik(x-L)} + e^{ik(x-L)+i\delta(k)} \quad (2.38)$$

et qui doit respecter la condition de bord $\psi_k(0) = 0$. Dans la région désordonnée $\psi_k(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi_k(x) = k^2 \psi_k(x) . \quad (2.39)$$

La variable de Ricatti $z = \frac{\psi'}{\psi}$ obéit à :

$$\frac{dz(x)}{dx} = V(x) - k^2 - z(x)^2 . \quad (2.40)$$

À l'interface entre la région désordonnée et la région libre ($x = L$) on a $z(L) = -ik \frac{1 - e^{i\delta(k)}}{1 + e^{i\delta(k)}}$. On introduit de ce fait une nouvelle variable ϕ telle que $z = -k \tan \frac{\phi}{2}$, pour laquelle on a :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = 2k - \frac{1}{k} (1 + \cos \phi(x)) V(x) . \quad (2.41)$$

La variable de Ricatti est continue en $x = L$ ce qui permet de relier le déphasage à la variable ϕ prise au bord de la région désordonnée : $\delta(k) = \phi(x = L, k)$. La condition $\psi_k(0) = 0$ se traduit pour ϕ par la condition initiale

$$\phi(x = 0) = \pi . \quad (2.42)$$

Notons que l'équation (2.41) est à rapprocher de l'équation (2.10) : on constate que $\phi = 2\theta + \pi$ à condition d'imposer $\theta(0) = 0$, ce que nous ferons dorénavant systématiquement. Ces considérations permettent de donner un sens physique plus clair à la variable θ puisqu'elle est reliée au déphasage par :

$$\delta(k) = 2\theta(x = L, k) + \pi . \quad (2.43)$$

La variable de Ricatti s'écrit $z = k \cotg \theta = -k\tilde{z}$. L'expression (2.19) est donc la distribution du déphasage (dans le régime localisé $L \gg \lambda$).

L'objet qui nous intéresse avant tout dans cette étude est le temps de Wigner $\tau(k) = \frac{d\delta(k)}{dk^2}$. De même qu'on a introduit une variable ϕ pour le déphasage on introduit une variable Z :

$$Z(x) = \frac{d}{dk} \phi(x) = 2 \frac{d}{dk} \theta(x) \quad (2.44)$$

reliée au temps de Wigner par

$$\tau(k) = \frac{1}{2k} Z(x = L, k) . \quad (2.45)$$

D'après (2.41), la variable $Z(x)$ obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dZ(x)}{dx} = 2 + \left[\frac{1}{k^2} (1 + \cos \phi(x)) + \frac{1}{k} Z(x) \sin \phi(x) \right] V(x) \quad (2.46)$$

qui peut encore s'écrire en termes de la variable θ comme

$$\frac{dZ}{dx} = 2 + \left(\frac{2}{k^2} \sin^2 \theta - \frac{1}{k} Z \sin 2\theta \right) V(x) \quad (2.47)$$

ou encore

$$\frac{dZ}{dx} = 2 + \frac{2V(x)}{k^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{d\xi}{dx} Z . \quad (2.48)$$

Il faut ajouter à ces équations une condition initiale pour la variable Z ; la condition initiale pour ϕ étant indépendante de l'énergie, il s'ensuit que :

$$Z(0) = 0 . \quad (2.49)$$

Par conséquent nous avons ramené le problème du calcul du déphasage et du temps de Wigner à l'intégration des deux équations différentielles non linéaires couplées du premier ordre (2.41,2.46).

2.6 Généralisation des équations au cas à deux canaux de diffusion

On indique dans cette partie comment étendre les considérations du paragraphe précédent au cas de la diffusion avec deux canaux. Le potentiel est toujours non nul sur $[0, L]$ mais on supprime la condition de bord en $x = 0$. L'état stationnaire de diffusion s'écrit (transmission droite-gauche) :

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= t e^{-ikx} && \text{pour } x \leq 0 \\ &= \alpha(x) e^{-ikx} + \beta(x) e^{ikx} && \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ &= e^{-ikx} + r e^{ikx} && \text{pour } L \leq x \end{aligned} \quad (2.50)$$

on choisit les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ de telle sorte que la dérivée de la fonction d'onde prenne la forme (sur $[0, L]$) :

$$\psi'_k(x) = -ik\alpha(x)e^{-ikx} + ik\beta(x)e^{ikx} . \quad (2.51)$$

Ce changement de variables impose que $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ satisfont les équations différentielles couplées :

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{V(x)}{2ik} (\alpha + \beta e^{2ikx}) \quad (2.52)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{V(x)}{2ik} (\alpha e^{-2ikx} + \beta) . \quad (2.53)$$

Compte tenu du choix des nouvelles variables $\alpha(x)$ et $\beta(x)$, les coefficients de réflexion et de transmission sont donnés par : $t = \alpha(0)$ et $r = \frac{\beta(L)}{\alpha(L)}$ en respectant les conditions aux limites $\alpha(L) = 1$ et $\beta(0) = 0$. Ces relations nous suggèrent qu'il est plus intéressant d'utiliser les variables $\Upsilon \equiv \frac{\beta}{\alpha}$ et α . Pour ces dernières on aboutit aux deux équations différentielles :

$$\frac{d\Upsilon}{dx} = \frac{V(x)}{2ik} (e^{-ikx} + \Upsilon e^{ikx})^2 \quad (2.54)$$

$$\frac{d \ln \alpha}{dx} = -\frac{V(x)}{2ik} (1 + \Upsilon e^{2ikx}) \quad (2.55)$$

pour des conditions aux limites $\alpha(L) = 1$ et $\Upsilon(0) = 0$. On a

$$t = \alpha(0) \quad (2.56)$$

$$r = \Upsilon(L) . \quad (2.57)$$

La première équation est découplée de la variable α et la deuxième équation s'intègre formellement pour donner le coefficient de transmission :

$$t = \exp \frac{1}{2ik} \int_0^L dx V(x) \left(1 + \Upsilon(x) e^{2ikx} \right) . \quad (2.58)$$

On sépare l'équation pour Υ en deux équations pour des variables réelles w et ϕ qui seront reliées au module et à la phase du coefficient de réflexion en posant $\Upsilon = e^{-w-2ikx+i\phi}$. On a :

$$\frac{d\phi}{dx} = 2k - \frac{V(x)}{k} (1 + \text{ch } w \cos \phi) \quad (2.59)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{V(x)}{k} \text{sh } w \sin \phi . \quad (2.60)$$

Le coefficient de réflexion est donné par $r = |r| e^{-2ikL+i\delta_r}$ où $|r| = e^{-w(L)}$ et $\delta_r = \phi(L)$. On peut vérifier que si l'on rétablit le mur en $x = 0$ (il faut alors imposer $w(x) = 0$), l'équation (2.59) redonne (2.41).

Si $V(x)$ est un bruit blanc, on peut associer à (2.60,2.59) une équation de Fokker-Planck pour la distribution jointe $Q(\phi, w; x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} Q(\phi, w; x) = & \left[-2k \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sigma}{2k^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (1 + \text{ch } w \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} (1 + \text{ch } w \cos \phi) \right. \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \phi} (1 + \text{ch } w \cos \phi) \frac{\partial}{\partial w} \text{sh } w \sin \phi - \frac{\partial}{\partial w} \text{sh } w \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} (1 + \text{ch } w \cos \phi) \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial w} \text{sh } w \sin \phi \frac{\partial}{\partial w} \text{sh } w \sin \phi \right) \right] Q(\phi, w; x) \quad (2.61) \end{aligned}$$

À haute énergie on peut supposer, comme on l'a fait pour déterminer la distribution de ξ , que la phase se décorrèle de la variable w . Dans ce cas on peut écrire que $Q(\phi, w; x) \simeq \frac{1}{\pi} Q(w; x)$, ce qui permet de moyenner sur ϕ et de ne garder que la variable w . On aboutit alors à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(w; x) \simeq 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial w^2} [\text{sh}^2 w Q(w; x)] \quad (2.62)$$

dont la solution est (Antsygina *et al.* 1981) :

$$Q(w; L) = \frac{1}{\text{sh}^2 w} \frac{e^{-\gamma L/2}}{\sqrt{\pi}(4\gamma L)^{3/2}} \int_v^\infty dv' \frac{v' e^{-\frac{v'^2}{8\gamma L}}}{\sqrt{\text{ch } v' - \text{ch } v}} \quad (2.63)$$

où la variable v est associée à w par la relation $\text{coth } w = \text{ch } v$ ($\text{sh } w = \text{sh}^{-1} v$). Notons que l'équation différentielle pour $Q(w; L)$ décrit la diffusion radiale sur le plan hyperbolique. Cette expression permet de calculer le coefficient de transmission : $1 - \langle |r|^2 \rangle \propto \frac{e^{-L/2\lambda}}{(L/\lambda)^{3/2}}$.

2.7 Distribution du temps de Wigner à haute énergie

Nous abordons le point central de ce chapitre qui est l'établissement de la distribution du temps de Wigner. Une fois le problème du calcul du déphasage formulé en termes de la résolution d'équations différentielles non linéaires couplées, il est apparu possible de relier ces équations à une équation pour la distribution jointe des variables stochastiques. Considérons les équations

(2.10,2.47) dans le sens de Stratonovich (*cf.* annexe A), l'équation de Fokker-Planck correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(\theta, Z; x) = & \left\{ -k \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\sigma}{2k^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \right. \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{2}{k} \sin^2 \theta - Z \sin 2\theta \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{2}{k} \sin^2 \theta - Z \sin 2\theta \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{2}{k} \sin^2 \theta - Z \sin 2\theta \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{2}{k} \sin^2 \theta - Z \sin 2\theta \right) \right] \right\} P(\theta, Z; x) . \quad (2.64) \end{aligned}$$

2.7.1 Régime localisé ($L \gg \lambda$)

Nous voulons étudier la distribution du temps de Wigner dans un domaine où l'on peut s'attendre à une certaine universalité, *i.e.* à haute énergie, ce qui se traduit pour le modèle gaussien par $k \gg \sigma^{1/3}$. On a déjà évoqué dans l'étude de la distribution stationnaire de la phase, que celle-ci se décorrèle sur une distance caractéristique de l'ordre de la longueur de localisation. À haute énergie la phase tourne très rapidement ($\theta \sim kx$) ce qui permet de supposer qu'elle se décorrèle de Z à partir d'une certaine distance; en d'autres termes la distribution jointe prend la forme approchée $P(\theta, Z; x) \simeq \frac{1}{\pi} P(Z; x)$. Cette hypothèse permet de moyenniser l'équation précédente par rapport à θ . Suivre cette procédure revient à ne garder que les termes dominants en σ/k^3 (*cf.* développement (2.27)); par cohérence on ne doit garder que les termes dominant en puissances de $1/k$ dans l'équation précédente. On aboutit finalement à l'équation de Fokker-Planck pour Z :

$$\frac{\partial}{\partial x} P(Z; x) = 2 \left(\gamma \frac{\partial}{\partial Z} Z \frac{\partial}{\partial Z} Z + \frac{\partial}{\partial Z} (\gamma Z - 1) \right) P(Z; x) ; \quad (2.65)$$

nous rappelons que $\gamma = \frac{\sigma}{8k^2} = \lambda^{-1}$ désigne la valeur de l'exposant de Lyapunov à haute énergie. Notons que que l'étude des propriétés statistiques des différentes quantités étudiées jusqu'à présent (ξ , $|r|$ et Z) conduit, dans la limite de haute énergie, à des équations de Fokker-Planck ne faisant intervenir qu'un seul paramètre qui est l'exposant de Lyapunov.

Cette équation de Fokker-Planck appartient à une classe d'équations apparaissant dans l'étude des processus stochastiques multiplicatifs. Elles ont été résolues par Schenzle & Brand (1979). Les solutions de cette classe d'équations décrivent la distribution de fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien, qui ont été étudiées aussi bien par les mathématiciens (Yor 1992), (Yor 1997), que par les physiciens (Monthus & Comtet 1994), (Monthus 1995), (Comtet, Monthus & Yor 1998). Cécile Monthus et Alain Comtet donnent dans leur travail la solution exacte de cette équation :

$$P(Z; L) = \frac{1}{\gamma Z^2} e^{-\frac{1}{\gamma Z}} + \frac{2}{\pi Z} e^{-\frac{1}{2\gamma Z}} \int_0^\infty ds e^{-\frac{\gamma L}{2}(1+s^2)} \frac{s}{1+s^2} \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2} W_{1, \frac{is}{2}} \left(\frac{1}{\gamma Z} \right) \quad (2.66)$$

où $W_{\mu, \nu}(z)$ est une fonction de Whittaker. Le premier terme correspond à la distribution limite ($L \rightarrow \infty$). On remarque que cette dernière possède une queue algébrique :

$$P_s(Z) \underset{Z \gg \lambda}{\simeq} \frac{\lambda}{Z^2} . \quad (2.67)$$

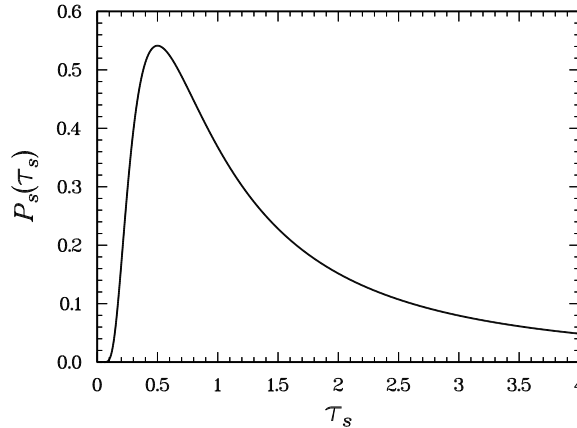


FIG. 2.3: Distribution stationnaire pour la variable $\tau_s = 2k\gamma\tau$

Écrivons la distribution limite ($L \rightarrow \infty$) du temps de Wigner :

$$P_s(\tau) = \frac{\lambda}{2k\tau^2} e^{-\frac{\lambda}{2k\tau}}. \quad (2.68)$$

La valeur typique correspondant à cette distribution est :

$$\tau_{\text{typ}} = \frac{\lambda}{4k}, \quad (2.69)$$

ce qui peut s'interpréter physiquement comme suit : la particule se meut à vitesse $v_k = 2k$, d'autre part la valeur typique peut s'écrire $\tau_{\text{typ}} = \frac{1}{4} \frac{2\lambda}{v_k}$ où $2\lambda/v_k$ est le temps nécessaire à une particule de vitesse v_k pour faire un aller-retour sur une distance λ . Cette valeur de τ_{typ} suggère que l'onde entre dans l'échantillon désordonné sur une distance typique de l'ordre de la longueur de localisation. Cependant la queue algébrique de la distribution indique l'existence de processus capables de piéger la particule pendant des temps beaucoup plus longs que la valeur typique, ce qui est manifeste sur la divergence de tous les moments de la distribution limite.

Notons que la normalisation des fonctions d'onde localisées dans le système infini ($L \rightarrow \infty$) est distribuée par une loi analogue à (2.68) (Lifshits *et al.* 1988, §13.3). On comprendra mieux cette relation au chapitre 5.

Remarquons que si l'échelle mise en jeu dans la distribution est ici la longueur de localisation, la théorie des matrices aléatoires fait intervenir la taille du système (à travers le temps de Heisenberg). Une autre différence avec la RMT a trait à l'exposant de la queue algébrique pour lequel la RMT prédit toujours des valeurs strictement supérieures à 2. L'exposant β décrivant la classe d'universalité de la RMT caractérise le comportement à l'origine de la distribution des écarts entre niveaux ($p(s) \sim s^\beta$). Pour des systèmes dans un régime localisé, cette distribution est poissonnienne, $p(s) = \frac{1}{\Delta} e^{-\frac{s}{\Delta}}$ ($p(s) \sim s^0$). Notons que si on pose $\beta = 0$ dans les expressions de la RMT, elles présentent alors une queue algébrique avec un exposant égal à 2.

Ces expressions montrent que, dans la limite $L \rightarrow \infty$, tous les moments de τ ou de Z sont infinis. Les expressions précises de ces derniers pour un système de taille finie sont données dans (Monthus & Comtet 1994) (une expression générale du n ème moment d'une fonctionnelle exponentielle d'un mouvement brownien de dérive μ y est donnée sous la forme d'une somme

de n termes. Notons que dans la limite $\mu \rightarrow 1$, les deux derniers termes de cette somme sont divergents séparément mais leur somme reste finie) :

$$\langle Z(L) \rangle = 2L \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \langle Z(L)^n \rangle &= \lambda^n \sum_{m=2}^n (-1)^{n-m} C_n^m (2m-1) \frac{(m-2)!}{(n+m-1)!} e^{2m(m-1)\frac{L}{\lambda}} \\ &\quad + \lambda^n \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(2n \frac{L}{\lambda} + n - 1 \right) \quad (2.71) \\ &\simeq \frac{(n-2)!}{(2n-2)!} \lambda^n e^{2n(n-1)\frac{L}{\lambda}} . \end{aligned}$$

Dans la limite du système de taille infinie, le premier moment diverge linéairement et les moments d'ordres supérieurs exponentiellement avec la taille du système. La première relation a une interprétation physique : elle correspond à $\langle \tau \rangle = \frac{L}{k}$. Le lien entre le déphasage accumulé et la densité d'états intégrée exige que soit respectée la relation $\langle \tau \rangle = 2\pi \rho_L(E)$ où $\rho_L(E)$ est la densité d'états du système de taille L . C'est précisément le sens de cette relation puisque dans la limite de haute énergie la densité d'états est égale à la densité d'états libre $\rho_0(E) = \frac{L}{2\pi\sqrt{E}}$. Pour reprendre les notations utilisées dans la théorie des matrices aléatoires, cette relation s'écrit $\langle \tau \rangle = \tau_H$. Nous sommes donc capables, par cette approche, de caractériser la nature des divergences des moments du temps de Wigner, ce sur quoi la RMT ne donne aucune information. Cependant, nous devons encore comprendre l'origine physique de ces comportements.

Effet de taille finie sur la distribution

Prendre la limite $L \rightarrow \infty$ dans l'expression (2.66) de la distribution conduit à la distribution limite (2.68) qui ne rend pas compte de l'existence de moments finis. Un examen superficiel des moments en $e^{2n(n-1)L/\lambda}$ suggère l'existence d'une queue log-normale pour la distribution de τ à L finie (*stricto sensu* la distribution log-normale possède des moments $e^{2n^2L/\lambda}$, cf. (3.37,3.39)). Un élément qui semble appuyer cette remarque est que la conductance $G(t)$ d'un échantillon désordonné a un comportement log-normal analogue à celui qui vient d'être évoqué (Altshuler & Prigodin 1988). Or Muzykantskiĭ & Khmelnitskiĭ (1997), en interprétant $G(t)$ comme la probabilité pour que la particule soit piégée dans le potentiel pendant un temps t , ont attribué le comportement log-normal à l'existence de configurations du désordre capables de piéger la particule pendant des temps très longs.

Afin d'étudier cet aspect, il se révèle commode d'introduire la fonction caractéristique (transformée de Laplace) $\phi(p, L) = \int_0^\infty dZ e^{-pZ} P(Z; L)$ donnée par (Monthus & Comtet 1994), (Comtet *et al.* 1998) :

$$\phi(p, L) = 2\sqrt{\frac{p}{\gamma}} K_1 \left(2\sqrt{\frac{p}{\gamma}} \right) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty ds e^{-\frac{\gamma L}{2}(1+s^2)} \frac{s \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2}}{1+s^2} K_{is} \left(2\sqrt{\frac{p}{\gamma}} \right) . \quad (2.72)$$

Le comportement asymptotique de la distribution $P(Z; L)$ est relié au comportement à l'origine de la fonction caractéristique. Dans la limite des grands systèmes : $\gamma L \gg 1$, on peut remplacer $\frac{s \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2}}{1+s^2}$ par son développement à l'origine ; puisque la variable conjuguée tend vers 0, le premier terme peut être remplacé par 1. Dans ce cas on peut écrire :

$$\phi(p, L) \simeq 1 - 2e^{-\frac{\gamma L}{2}} \operatorname{Im} \int_0^\infty ds e^{-\frac{\gamma L}{2}s^2} s I_{is} \left(2\sqrt{\frac{p}{\gamma}} \right) . \quad (2.73)$$

Cette expression montre qu'il existe une échelle exponentiellement petite avec L , $\gamma e^{-\sqrt{\gamma L}}$, à comparer avec p : la fonction gaussienne s'annule sur une échelle $s_1 \sim (\gamma L)^{-1/2}$ alors que la fonction de Bessel modifiée présente des oscillations à l'origine sur une échelle $s_2 \sim |\ln p/\gamma|^{-1}$. Cependant, le développement révèle l'existence d'une seconde échelle $\gamma e^{-\gamma L}$. Dans un régime intermédiaire pour lequel $\gamma e^{-\gamma L} \ll p \ll \gamma e^{-\sqrt{\gamma L}}$, on peut montrer que la fonction caractéristique présente le développement suivant :

$$\phi(p, L) \simeq 1 - \frac{2\sqrt{\pi}e^{-\frac{\gamma L}{2}}}{(2\gamma L)^{3/2}} \ln \gamma/p \left[1 + O\left(\frac{\ln \gamma/p}{\gamma L}\right) \right] e^{-\frac{\ln^2 \gamma/p}{8\gamma L}}. \quad (2.74)$$

Un tel comportement laisse en effet présager une queue log-normale pour la distribution :

$$P(Z; L) \sim \exp -\frac{1}{8\gamma L} \ln^2 \gamma Z \quad \text{pour} \quad \gamma^{-1}e^{\gamma L} \gg Z \gg \gamma^{-1}e^{\sqrt{\gamma L}}. \quad (2.75)$$

Au-delà de ce régime intermédiaire, il serait intéressant d'extraire le comportement de la distribution pour $Z \gg \gamma^{-1}e^{\gamma L}$.

2.7.2 Régime balistique ($L \ll \lambda$)

Nous avons utilisé précédemment l'hypothèse que le système était suffisamment grand pour que la phase atteigne sa distribution stationnaire et qu'elle se décorrèle de la variable Z . Si à l'inverse on s'intéresse au cas d'un système petit à l'échelle de la longueur de localisation, on s'attend à ce que le résultat soit très différent du cas précédent ($\lambda \equiv \frac{8k^2}{\sigma}$ est la longueur de localisation dans le système infini). On se place toujours dans un régime de haute énergie $k \gg \sigma^{1/3}$ avec un système grand à l'échelle de la longueur d'onde $kL \gg 1$. D'après (2.10) les fluctuations de la phase (d'ordre $\sqrt{\sigma L/k^2}$) restent petites devant π si bien que dans ce régime on peut considérer que dans tout l'échantillon $\theta(x) \simeq kx$. L'équation pour Z devient alors

$$\frac{dZ}{dx} \simeq 2 + \left(\frac{2}{k^2} \sin^2 kx - \frac{1}{k} Z \sin 2kx \right) V(x) \quad (2.76)$$

Le premier terme de l'équation produit une contribution à $Z(L)$ typiquement de l'ordre de $2L$ alors que le deuxième terme apporte une contribution d'ordre $\frac{1}{k^2} \sqrt{\sigma L} \sim \frac{1}{kL} \sqrt{\frac{L}{\lambda}} L$. Le troisième est d'ordre $\sqrt{\frac{L}{\lambda}} L$. Ceci montre que le deuxième terme est négligeable devant les deux autres. Après cette simplification, on intègre l'équation et l'on aboutit à :

$$Z(L) \simeq 2 \int_0^L dx e^{-\frac{1}{k} \int_x^L dx' V(x') \sin 2kx'}. \quad (2.77)$$

L'argument de l'exponentielle est d'ordre $\sqrt{L/\lambda}$ et reste petit devant 1 dans le régime balistique, ce qui permet d'écrire finalement :

$$Z(L) \simeq 2L - \frac{2}{k} \int_0^L dx \int_x^L dx' V(x') \sin 2kx' \quad (2.78)$$

c'est-à-dire :

$$\tau(k) \simeq \frac{L}{k} - \frac{1}{k^2} \int_0^L dx \int_x^L dx' V(x') \sin 2kx'. \quad (2.79)$$

On peut calculer les deux premiers cumulants du temps de Wigner :

$$\langle \tau(k) \rangle \simeq \frac{L}{k} \quad (2.80)$$

$$\langle \langle \tau(k)^2 \rangle \rangle \simeq \frac{\sigma}{6k^4} L^3 \quad (2.81)$$

$$\simeq \frac{4}{3\lambda k^2} L^3 . \quad (2.82)$$

(2.79) montre que τ est donnée par une fonctionnelle linéaire du désordre gaussien. Contrairement au cas du régime localisé pour lequel la distribution est une loi large, la distribution de τ est gaussienne dans le régime balistique.

Il faut noter que les propriétés statistiques de τ dans le régime balistique sont contenues dans les expressions (2.71). Nous constaterons en effet dans le chapitre 5 que l'hypothèse $L \gg \lambda$ n'est pas indispensable pour aboutir aux propriétés mentionnées pour le régime localisé. Cette remarque nous autorise à considérer un développement des moments (2.71) pour $L \ll \lambda$, qui conduit au développement des cumulants : $\langle Z \rangle = 2L$, $\langle \langle Z^2 \rangle \rangle = \frac{16}{3\lambda} L^3 + \dots$, $\langle \langle Z^3 \rangle \rangle = \frac{256}{5\lambda^2} L^5 + \dots$, $\langle \langle Z^4 \rangle \rangle = \frac{94208}{105\lambda^3} L^7 + \dots$, etc. Ces expressions montrent que les cumulants d'ordres supérieurs à 2 traduisent des fluctuations qui deviennent négligeables lorsque $L/\lambda \rightarrow 0$. Par conséquent, la distribution de Z tend vers une distribution gaussienne dans cette limite.

Les fluctuations de $\tau(k)$ croissent comme $L^{3/2}$, c'est-à-dire plus rapidement que la valeur moyenne. Comme le temps de Wigner est une quantité positive, ceci suggère que la distribution gaussienne du régime balistique commence à se déformer lorsque $\langle \tau(k) \rangle \sim \sqrt{\langle \langle \tau(k)^2 \rangle \rangle}$ *i.e.* pour $\frac{L}{k} \sim \frac{L}{k} \sqrt{\frac{\sigma}{6k^2}} L$ ou encore $L \sim \lambda$. On retrouve de cette manière que le domaine de validité de ce résultat est celui d'un système petit devant la longueur de localisation.

Nous reviendrons sur ce régime dans le chapitre 4, et en particulier on vérifiera numériquement ces résultats.

Chapitre 3

Modèle supersymétrique désordonné

3.1 Introduction

Considérons l'hamiltonien supersymétrique désordonné :

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \phi^2(x) + \phi'(x) . \quad (3.1)$$

Il a été introduit par Witten (1981) comme un modèle de mécanique quantique supersymétrique. Nous nous concentrerons par la suite sur le cas où la fonction $\phi(x)$ est distribuée par une loi gaussienne. Ce modèle possède des propriétés assez différentes du modèle étudié au chapitre précédent. L'étude du temps de Wigner permettra donc de tester l'universalité des résultats que nous avons obtenus.

Avant de considérer cette forme particulière de désordre, il est nécessaire de rappeler quelques propriétés de ces hamiltoniens supersymétriques. Pour une revue nous renvoyons à (Cooper, Khare & Sukhatme 1995), (Junker 1996).

L'hamiltonien (3.1) peut être factorisé sous la forme :

$$H = Q^\dagger Q \quad (3.2)$$

où l'opérateur Q est donné par $Q = -\frac{d}{dx} + \phi$. Cette expression montre que l'hamiltonien possède un spectre positif. En outre l'équation de Schrödinger pour une énergie k^2 peut se découpler en deux équations linéaires du premier ordre couplées pour la fonction d'onde u et la fonction $v = \frac{1}{k}Qu$:

$$\frac{du(x)}{dx} = \phi(x)u(x) - kv(x) \quad (3.3)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\phi(x)v(x) + ku(x) . \quad (3.4)$$

Ce système peut s'interpréter comme une équation de Dirac $H_D\psi = k\psi$ pour des fermions de masse nulle. u et v sont alors les deux composantes du spineur ψ .

$$H_D = \begin{pmatrix} 0 & Q^\dagger \\ Q & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.5)$$

Le carré de cet hamiltonien de Dirac fait apparaître les deux hamiltoniens auxiliaires $H_+ = Q^\dagger Q$ et $H_- = QQ^\dagger$ caractérisés par le même spectre pour $E > 0$. Notons que dans le point de vue de l'équation de Dirac, k joue le rôle d'énergie.

Différents types de potentiels désordonnés ont été étudiés. D'abord le cas où la fonction $\phi(x)$ est un bruit blanc :

$$\langle \phi(x) \rangle = \mu \varsigma \quad (3.6)$$

$$\langle \langle \phi(x) \phi(x') \rangle \rangle = \varsigma \delta(x - x') . \quad (3.7)$$

La densité d'états de ce modèle a été obtenue par Ovchinnikov & Erikmann (1977) (voir aussi (Lifshits *et al.* 1988, §8.2)) puis retrouvée indépendamment par Bouchaud, Comtet, Georges & Le Doussal (1987), (Bouchaud, Comtet, Georges & Le Doussal 1990) :

$$N(E) = \frac{2\varsigma}{\pi^2} \frac{1}{J_\mu^2(\kappa) + N_\mu^2(\kappa)} \quad (3.8)$$

$$\gamma(E) = -\frac{\varsigma\kappa}{2} \frac{d}{d\kappa} \ln (J_\mu^2(\kappa) + N_\mu^2(\kappa)) \quad (3.9)$$

où $\kappa \equiv \frac{\sqrt{E}}{\varsigma}$. $J_\mu(z)$ et $N_\mu(z)$ sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce. Ces expressions montrent l'existence de singularités spectrales en loi de puissance à basse énergie lorsque $\mu \neq 0$:

$$N(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} E^\mu \quad (3.10)$$

$$\gamma(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} E^{1-\mu} \quad (3.11)$$

et de singularités logarithmiques lorsque $\mu = 0$:

$$N(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\ln^2 E} \quad (3.12)$$

$$\gamma(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|\ln E|} . \quad (3.13)$$

Lorsque $\mu < 1$ on constate qu'il existe des états délocalisés à énergie nulle. Bouchaud *et al.* (1990) ont montré l'existence d'une autre échelle de longueur à basse énergie : la longueur de corrélation, qui diverge plus rapidement que la longueur de localisation : $\ell_c \sim \ln^2 E$.

Il est intéressant de remarquer qu'un comportement analogue à celui obtenu dans le cas où $\mu = 0$ apparaît dans le spectre d'une chaîne de ressorts désordonnée étudiée par Dyson (1953) (Lifshits *et al.* 1988, §5.2), qui peut être vue comme une version discrétisée du modèle. Ce type de singularités de la densité d'états est propre aux hamiltoniens à désordre non diagonal. La singularité de Dyson a été également mise en évidence dans un modèle de chaîne de spins à couplages aléatoires (Ziman 1982).

À haute énergie la densité d'états converge vers la densité d'états libre tandis que l'exposant de Lyapunov tend vers une constante, contrairement au cas du modèle gaussien pour lequel il s'annule à haute énergie :

$$\gamma(E) \simeq \frac{\varsigma}{2} \text{ pour } k \gg \varsigma . \quad (3.14)$$

Il faut noter le lien entre ces modèles de mécanique quantique supersymétrique et le problème de la diffusion classique (van Kampen 1992). L'étude de l'hamiltonien désordonné est reliée à celle de la diffusion classique dans un milieu aléatoire gelé ; dans ce contexte, les propriétés spectrales précédentes sont associées à des effets de diffusion anormale (Bouchaud *et al.* 1990), (Bouchaud & Georges 1990). Cet aspect du problème a également stimulé d'autres études, par exemple sur

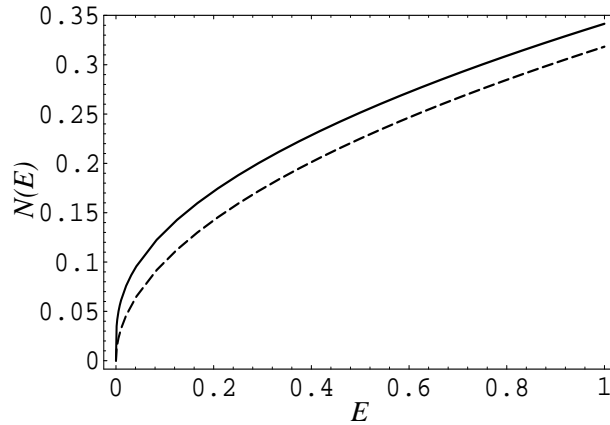


FIG. 3.1: Densité d'états intégrée du modèle supersymétrique pour $\zeta = 1$ ($\mu = 0$) et du problème libre (courbe pointillée).

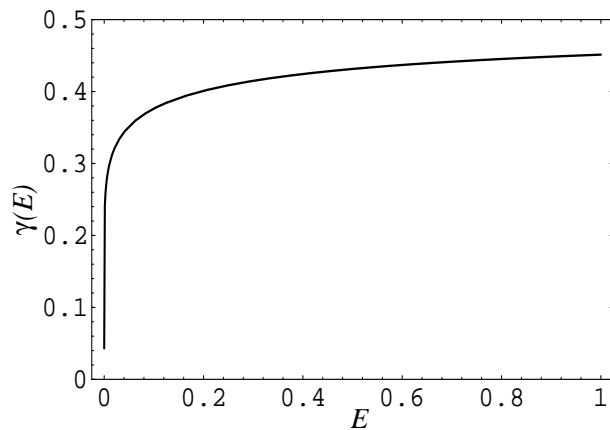


FIG. 3.2: Exposant de Lyapunov du modèle supersymétrique pour $\zeta = 1$ ($\mu = 0$).

la distribution du flux de particules (Oshanin, Mogutov & Moreau 1993*b*), (Oshanin, Burlatsky, Moreau & Gaveau 1993*a*), (Monthus & Comtet 1994). Il a également été prouvé que lorsque le système est contenu dans une boîte de taille finie, la supersymétrie est brisée, c'est-à-dire que l'énergie du fondamental n'est plus nulle mais possède une dépendance exponentiellement petite avec la taille du système ($E_0(L) \propto e^{-aL^{1/3}}$ pour le cas du bruit blanc) (Monthus, Oshanin, Comtet & Burlatsky 1996).

Un autre type de désordre qui a suscité un intérêt particulier est le cas où $\phi(x)$ est un bruit du télégraphe (Comtet, Desbois & Monthus 1995*a*). Le potentiel $\phi^2(x) + \phi'(x)$ présente alors une série de pics δ de signes alternés entre lesquels il est constant et prend alternativement deux valeurs différentes.

Ces résultats ont trouvé récemment une autre application en relation avec un problème de chaîne de spins en interaction (Fabrizio & Mélin 1997*a*), (Fabrizio & Mélin 1997*b*), (Steiner, Fabrizio & Gogolin 1998), (Balents & Fisher 1997).

3.2 Propriétés spectrales et localisation

3.2.1 Formalisme de phase

On trouvera une présentation du formalisme de phase adapté aux hamiltoniens supersymétriques dans (Comtet *et al.* 1995a). Les variables polaires naturelles sont :

$$u(x) = \rho(x) \sin \theta(x) \quad (3.15)$$

$$v(x) = -\rho(x) \cos \theta(x) \quad (3.16)$$

a) $E = +k^2$

u et v obéissent aux deux équations $Qu = kv$ et $Q^\dagger v = ku$. On a donc :

$$\frac{d\theta}{dx} = k + \phi(x) \sin 2\theta \quad (3.17)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -\phi(x) \cos 2\theta \quad (3.18)$$

où $\xi = \ln \rho$. Le spectre de H_+ est donné par $N_+(E) = k P_J(\theta = 0)$ et celui de H_- par $N_-(E) = k P_J(\theta = \pi/2)$ ($P_J(\theta)$ est la distribution stationnaire de la phase). $P_J(\theta = 0) = P_J(\theta = \pi/2)$ car les deux hamiltoniens ont même spectre.

b) $E = -k^2$

u et v satisfont $Qu = kv$ et $Q^\dagger v = -ku$. Les variables polaires obéissent alors aux équations :

$$\frac{d\theta}{dx} = k \cos 2\theta + \phi(x) \sin 2\theta \quad (3.19)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = k \sin 2\theta - \phi(x) \cos 2\theta . \quad (3.20)$$

Nous nous intéresserons par la suite au cas où $\phi(x)$ est un bruit blanc de valeur moyenne nulle : $\mu = 0$.

3.2.2 Propriétés statistiques de la fonction d'onde d'énergie nulle

Comme nous l'avons signalé le modèle possède des propriétés très particulières à énergie nulle qui traduisent l'existence d'un état délocalisé. Nous nous intéressons aux propriétés statistiques de la fonction d'onde de seuil (annihilée par Q : $Q\psi_0 = 0$) :

$$\psi_0(x) = \frac{e^{\int_0^x dx' \phi(x')}}{\left[\int_0^L dx' e^{2 \int_0^{x'} dx'' \phi(x'')} \right]^{1/2}} . \quad (3.21)$$

On peut poser $w(x) \equiv \int_0^x dx' \phi(x')$. L'étude des fonctions de corrélation

$$C_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \langle |\psi_0(x_1)|^2 \dots |\psi_0(x_n)|^2 \rangle \quad (3.22)$$

est reliée à l'étude de l'hamiltonien de Liouville en dimension 1 : $H_L = -2\varsigma \frac{d^2}{dw^2} + 2\varsigma e^{2w}$. Si on impose des conditions aux limites périodiques, on montre que la fonction de corrélation présente le comportement asymptotique suivant :

$$C_n(x_1, \dots, x_n) \simeq \frac{1}{(8\pi\varsigma)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(n)} \frac{\sqrt{L}}{[(L - x_1 + x_n)(x_1 - x_2) \cdots (x_{n-1} - x_n)]^{3/2}} \quad (3.23)$$

à condition que les distances soient toutes grandes devant ς^{-1} . Cette expression montre l'existence de corrélations à longue portée caractéristiques d'un comportement critique à $E = 0$. Pour les petites distances le comportement est régulier. En particulier, à point coïncidants, la fonction de corrélation correspond aux moments de la fonction d'onde :

$$\langle |\psi_0(x)|^{2n} \rangle \propto \frac{1}{L^n}. \quad (3.24)$$

Un tel comportement montre la nature assez particulière de l'état délocalisé. À titre de comparaison, le calcul d'une quantité équivalente pour un état délocalisé tel qu'une onde plane, montre que : $\langle |\psi|^{2n} \rangle \propto 1/L^n$.

Pour davantage de détails nous renvoyons à l'article 1.

3.2.3 Distribution stationnaire de la phase (déphasage)

On peut écrire l'équation de Fokker-Planck associée à l'équation différentielle stochastique pour la phase :

$$\frac{\partial}{\partial x} P(\theta; x) = \left(-k \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\varsigma}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin 2\theta \right) P(\theta; x) \quad (3.25)$$

qui admet la distribution stationnaire :

$$P_J(\theta) = \frac{2J}{\varsigma} \frac{e^{-\frac{k}{\varsigma} \cotg 2\theta}}{\sin 2\theta} \int_{\theta}^{\pi/2} d\theta' \frac{e^{\frac{k}{\varsigma} \cotg 2\theta'}}{\sin 2\theta'}. \quad (3.26)$$

Cette distribution tend à haute énergie ($k \gg \varsigma$) vers la distribution stationnaire :

$$\begin{aligned} P_J(\theta) &= \frac{J}{\varsigma} \frac{1}{K} \left[1 + \frac{1}{2K} \sin 4\theta + \frac{1}{K^2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 4\theta - \sin^4 2\theta \right) + O(1/K^3) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[1 + \frac{1}{2K} \sin 4\theta + \frac{1}{K^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \sin^2 4\theta - \sin^4 2\theta \right) + O(1/K^3) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

où $K \equiv \frac{k}{\varsigma}$.

Distribution de ξ à haute énergie

On peut reprendre l'analyse faite pour le modèle gaussien. On aboutit alors à la même équation (2.36) à condition de redéfinir correctement le paramètre γ ($\gamma = \frac{\varsigma}{2}$).

Notons que pour les deux modèles, ξ possède les mêmes propriétés statistiques (ceci est également vrai pour le coefficient de réflexion $|r|$) paramétré par γ . Ceci semble indiquer une certaine universalité des fluctuations de la longueur de localisation à haute énergie.

3.3 Temps de Wigner

3.3.1 Le problème de diffusion

La procédure qui permet d'obtenir des équations pour le déphasage et le temps de Wigner est analogue à celle que nous avons utilisée pour le modèle gaussien : on considère un état stationnaire de diffusion qui s'écrit pour $x \geq L$

$$u_k(x) = e^{-ik(x-L)} + e^{ik(x-L)+i\delta(k)} . \quad (3.28)$$

Lorsque la fonction ϕ subit une discontinuité, la dérivée de u n'est pas continue, c'est pourquoi la variable de Riccati naturelle n'est pas u'/u mais plutôt $\zeta(x) = \frac{v(x)}{u(x)}$ qui obéit, d'après (3.3,3.4), à l'équation :

$$\frac{d\zeta(x)}{dx} = k - 2\phi(x)\zeta(x) + k\zeta(x)^2 . \quad (3.29)$$

Sur le bord de la région désordonnée, la variable de Riccati prend la valeur $\zeta(L) = i\frac{1-e^{i\delta(k)}}{1+e^{i\delta(k)}}$ ce qui suggère le changement de variable $\zeta = \tan \frac{\psi}{2}$. L'équation différentielle pour la nouvelle variable se déduit aisément :

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 2k - 2\sin \psi(x) \phi(x) . \quad (3.30)$$

La variable ψ est donc reliée à la phase du formalisme de phase par $\psi(x) = 2\theta(x) + \pi$ et le déphasage est donné par $\delta(k) = 2\theta(x=L) + \pi$, comme dans le cas du modèle gaussien. On préférera dorénavant utiliser la variable θ plutôt que ψ . Le temps de Wigner est donné par la variable $Z = \frac{d}{dk}\psi = 2\frac{d}{dk}\theta$ qui obéit à l'équation :

$$\frac{dZ(x)}{dx} = 2 + 2\cos 2\theta(x) Z(x) \phi(x) . \quad (3.31)$$

Les conditions aux limites sont données par la condition de Dirichlet en $x = 0$, i.e. $\theta(0) = 0$ et $Z(0) = 0$. Remarquons que la condition de Dirichlet pour H_+ correspond à une condition de type Neumann pour H_- .

3.3.2 Distribution du temps de Wigner à haute énergie ($k \gg \varsigma$)

L'équation de Fokker-Planck pour la distribution jointe se déduit des équations différentielles stochastiques pour θ et Z , elle s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(\theta, Z; x) = & \left[-k \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\varsigma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin 2\theta + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial Z} \cos 2\theta Z \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial}{\partial Z} \cos 2\theta Z \frac{\partial}{\partial \theta} \sin 2\theta + 4 \frac{\partial}{\partial Z} \cos 2\theta Z \frac{\partial}{\partial Z} \cos 2\theta Z \right) \right] P(\theta, Z; x) \quad (3.32) \end{aligned}$$

À haute énergie la phase est uniformément distribuée, ce qui suggère de faire l'hypothèse que θ et Z se décorrèlent. On moyenne l'équation de Fokker-Planck sur la phase et on aboutit à l'équation (2.65) à condition de remplacer le paramètre γ par sa valeur $\frac{\varsigma}{2}$ du modèle supersymétrique. On peut donc reprendre l'analyse des propriétés statistiques de τ faite pour le modèle gaussien.

De même, dans le régime balistique, on peut reprendre la procédure expliquée dans le chapitre précédent pour arriver à un résultat identique à (2.82).

3.3.3 Distribution du temps de Wigner à énergie nulle

Le temps de Wigner mesure le temps passé par une particule dans la région désordonnée et doit donc être sensible à la dimension de la zone explorée par la particule. On s'attend par conséquent à ce que l'existence d'un état délocalisé affecte la distribution du temps de Wigner.

Dans ce paragraphe, on adopte le point de vue de l'équation de Dirac, par conséquent k joue le rôle d'énergie et le temps de Wigner est donné directement par la variable Z (Steiner, Chen, Fabrizio & Gogolin 1999).

À énergie nulle, le problème se simplifie considérablement ; en effet, compte tenu de la condition initiale pour la phase ($\theta(0) = 0$), l'équation différentielle montre que la phase reste nulle dans toute la région désordonnée. On aboutit ainsi à une équation différentielle pour la variable Z_0 :

$$\frac{dZ_0(x)}{dx} = 2 + 2Z_0(x) \phi(x) \quad (3.33)$$

qu'on peut associer à l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial}{\partial x} P(Z_0; x) = 2 \left(\varsigma \frac{\partial}{\partial Z} Z \frac{\partial}{\partial Z} Z - \frac{\partial}{\partial Z} \right) P(Z_0; x) . \quad (3.34)$$

Cette équation appartient à la même classe d'équations que (2.65). Elle décrit la distribution d'une fonctionnelle exponentielle du mouvement brownien sans terme de dérive. Elle a pour solution (Monthus & Comtet 1994), (Comtet *et al.* 1998) :

$$P(Z_0; L) = 2 \frac{e^{\frac{\pi^2}{8\varsigma L}}}{\pi \varsigma \sqrt{2L}} \frac{1}{Z_0^{3/2}} \int_0^\infty dt \operatorname{ch} t \cos \frac{\pi t}{2\varsigma L} e^{-\frac{t^2}{2\varsigma L} - \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\varsigma Z_0}} . \quad (3.35)$$

Contrairement à la situation à énergie finie, Z_0 ne possède pas de distribution limite. À grand L on a (Monthus & Comtet 1994) :

$$P(Z_0; L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varsigma L}} \frac{1}{Z_0} e^{-\frac{1}{\varsigma Z_0}} ; \quad (3.36)$$

pour $Z_0 \rightarrow \infty$, la distribution présente une queue log-normale :

$$P(Z_0; L) \underset{Z_0 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2\pi\varsigma L}} \frac{1}{Z_0} e^{-\frac{1}{8\varsigma L} \ln^2(\varsigma Z_0)} . \quad (3.37)$$

Mentionnons pour finir les moments du temps de Wigner (Oshanin *et al.* 1993b), (Monthus & Comtet 1994) :

$$\langle Z_0(L) \rangle = 2L \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \langle Z_0(L)^n \rangle &= \varsigma^{-n} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} C_{2n}^{m+n} e^{2m^2\varsigma L} + \varsigma^{-n} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &\simeq \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \varsigma^{-n} e^{2n^2\varsigma L} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.4 Bilan

Nous sommes arrivés à la conclusion que la distribution du temps de Wigner à haute énergie est la même pour les deux modèles étudiés jusqu'à présent. Insistons sur le fait qu'ils appartiennent à des classes d'hamiltoniens aléatoires différentes. Le modèle gaussien se veut le

représentant d'une classe de systèmes à désordre diagonal alors que le modèle supersymétrique appartient à une classe de systèmes à désordre non-diagonal. L'étude du spectre et de la localisation ont souligné les différences entre ces deux types d'hamiltoniens désordonnés. Cependant, à haute énergie, la distribution du temps de Wigner reste la même dans les deux cas et n'est caractérisée que par un seul paramètre : la longueur de localisation λ (qui dépend du modèle).

À basse énergie, on ne s'attend pas à ce que cette universalité soit préservée. On peut imaginer que le domaine de basse énergie sera beaucoup plus sensible aux détails du désordre, ce qu'on a déjà pu constater dans le cas supersymétrique. Il sera intéressant d'étudier ce régime pour un cas de désordre diagonal.

Il reste un point important à éclaircir qui est de comprendre l'origine physique de la queue algébrique de la distribution du temps de Wigner, ou de manière équivalente, de la divergence exponentielle des moments avec la taille du système.

Les arguments que nous avons développés jusqu'à présent sont purement analytiques et il serait tout à fait instructif de tester numériquement ces résultats.

Toutes ces considérations nous ont amenés à nous intéresser à un troisième modèle, le modèle d'impuretés δ . Cette étude fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 4

Le modèle d'impuretés δ

4.1 Introduction

Les propriétés spectrales du modèle d'impuretés δ (modèle de Kronig-Penney) ont été étudiées par différents auteurs (Schmidt 1957), (Lax & Phillips 1958), (Frisch & Lloyd 1960), (Bychkov & Dykhne 1966b), (Bychkov & Dykhne 1966a). Le modèle est défini par l'hamiltonien :

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{n=1}^N v_n \delta(x - x_n) \quad (4.1)$$

où les poids v_n des impuretés peuvent être aléatoires (désordre d'alliage) ainsi que les positions des impuretés x_n (désordre structural). Ce modèle est donc caractérisé par au moins deux paramètres :

- ★ l'intensité du potentiel v ,
- ★ la densité moyenne d'impuretés ρ .

On devra par conséquent considérer quatre échelles d'impulsion : v , ρ , k et L^{-1} . Nous serons amenés à étudier trois types de désordre :

– **désordre A**

le poids des impuretés est fixé $v_n = v$ et les positions des impuretés sont aléatoires. Le désordre choisi est poissonien, *i.e.* les impuretés sont jetées aléatoirement et de manière décorrélée sur l'intervalle $[0, L]$. Ce désordre est un désordre structural particulièrement fort : il permet à des impuretés de se trouver aussi proches que possible.

– **désordre B**

Les impuretés sont placées sur un réseau de pas $1/\rho$ et les poids des impuretés sont aléatoires, indépendants et distribués par une même loi $q(v_n)$. Nous choisirons une loi de Poisson $q(v_n) = \frac{1}{v} e^{-v_n/v}$ qui est particulièrement simple à simuler numériquement.

– **désordre C**

Ce dernier type de désordre est une simple variante du précédent : les impuretés sont également placées sur un réseau, et leurs poids sont aléatoires et indépendants, distribués par une loi binaire $q(v_n) = p \delta(v_n - v') + (1 - p) \delta(v_n - v)$. Cette loi modélise un désordre d'alliage : parmi les atomes (v) du réseau, une fraction p est remplacée par un autre type d'atomes (v').

Ce modèle est plus riche que le modèle gaussien, qu'il reproduit dans une certaine limite, d'où l'intérêt de l'étudier pour tester les résultats du chapitre 2. Pour étudier la re-

lation avec le modèle gaussien il est commode de considérer les fonctionnelles génératrices ($g[f] \stackrel{\text{def}}{=} \langle \exp \int dx f(x)V(x) \rangle$) pour le désordre A et le désordre B :

$$g_A[f] = \exp \rho \int dx \left(e^{vf(x)} - 1 \right) \quad (4.2)$$

$$g_B[f] = \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - vf(n/\rho)} . \quad (4.3)$$

Pour le désordre A, on peut extraire les fonctions de corrélation de cumulants en développant $\ln g_A[f]$:

$$\langle V(x) \rangle = \rho v \quad (4.4)$$

$$\langle \langle V(x_1) \cdots V(x_n) \rangle \rangle = \rho v^n \delta(x_1 - x_2) \cdots \delta(x_1 - x_n) . \quad (4.5)$$

L'expression des cumulants correspond à un développement de la fonctionnelle génératrice :

$$g_A[f] = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho v^n \int dx f(x)^n . \quad (4.6)$$

Ces expressions montrent que pour retrouver la fonctionnelle génératrice du modèle gaussien, il faut prendre la limite $v \rightarrow 0$ avec $\rho \rightarrow \infty$ de telle sorte que $\rho v^2 = \sigma$ reste fini. Dans cette limite, tous les cumulants d'ordre supérieur à 2 s'annulent et on retrouve la fonctionnelle génératrice pour le potentiel bruit blanc au premier terme $\rho v \int dx f(x)$ près. Bien que divergent dans la limite considérée, ce terme s'interprète comme un décalage de ρv des énergies qui ne change rien à la physique.

On peut également exponentier le dénominateur apparaissant dans $g_B[f]$ puis considérer à nouveau la limite $vf \ll 1$:

$$g_B[f] = e^{v \sum_n f(n/\rho) + \frac{1}{2}v^2 \sum_n f(n/\rho)^2 + \dots} \simeq e^{\rho v \int dx f(x) + \frac{1}{2}\rho v^2 \int dx f(x)^2 + \dots} \quad (4.7)$$

remplacer $\sum_n f(n/\rho)$ par $\rho \int dx f(x)$ est licite à condition que la fonction $f(x)$ qui sonde le désordre varie lentement à l'échelle de $1/\rho$. L'échelle sur laquelle le désordre est sondé est donnée par l'énergie, il faudra donc que $1/\rho \ll 1/k$. Le raisonnement s'applique également si $q(v_n)$ est la loi binaire.

Pour résumer, le modèle d'impuretés δ est équivalent au modèle gaussien à condition de se placer dans un régime tel que

$$v \ll k \ll \rho \quad (4.8)$$

la correspondance entre les deux modèles s'établit en décalant les énergies de $-\rho \langle v_n \rangle$, le paramètre σ du modèle gaussien étant donné par $\sigma = \rho \langle v_n^2 \rangle$.

4.2 Formalisme de phase

Dans la suite, nous choisirons par convention d'indexer les impuretés par ordre croissant : $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < \cdots$. On introduit les distances $l_n \equiv x_{n+1} - x_n$.

On introduit la notation :

$$\theta_i^\pm = \theta(x_i^\pm) \quad (4.9)$$

$$\xi_i^\pm = \xi(x_i^\pm) \quad (4.10)$$

$$Z_i^\pm = Z(x_i^\pm) \quad (4.11)$$

pour les 3 variables exprimées de part et d'autre de chaque impureté.

a) $E = k^2$

Concentrons-nous en premier lieu sur le cas où l'énergie est positive ($E = k^2$). Naïvement on peut penser réutiliser les équations (2.10,2.11) pour le potentiel d'impuretés δ . Entre deux impuretés, l'évolution de la phase et de ξ est donnée par :

$$\theta_{i+1}^- - \theta_i^+ = kl_i \quad (4.12)$$

$$\xi_{i+1}^- - \xi_i^+ = 0 \quad (4.13)$$

Une difficulté apparaît lorsqu'on traverse une impureté. Il s'agit d'un problème typique des équations différentielles stochastiques : faut-il interpréter le terme de l'équation différentielle $-\frac{v_i}{k} \sin^2 \theta(x) \delta(x - x_i)$ en $-\frac{v_i}{k} \sin^2 \theta_i^- \delta(x - x_i)$ ou $-\frac{v_i}{k} \sin^2 \theta_i^+ \delta(x - x_i)$ ou encore autrement ? Mentionnons deux possibilités pour lever cette difficulté dans le cas présent. La première consiste à remplacer le potentiel $\delta(x)$ de chaque impureté par un potentiel régularisé $\delta^\epsilon(x)$ à support $[-\epsilon, \epsilon]$, à intégrer (2.10, 2.11,2.47) autour de l'impureté (cette procédure est aisée car lors de la traversée de l'impureté, le terme k de $d\theta/dx$ est négligeable devant le terme $\frac{V(x)}{k} \sin^2 \theta \sim \frac{v}{\epsilon k}$).

L'autre possibilité, plus rapide, consiste à exprimer l'équation de continuité de la fonction d'onde en terme des variables polaires : $e^{\xi_i^+} \sin \theta_i^+ = e^{\xi_i^-} \sin \theta_i^-$ et l'équation de discontinuité de la dérivée : $\frac{\partial}{\partial x} \ln \psi(x) \Big|_{x_i^-}^{x_i^+} = v_i$ i.e. : $\cotg \theta_i^+ - \cotg \theta_i^- = \frac{v_i}{k}$ sans oublier que θ_i^- et θ_i^+ doivent appartenir au même intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$. On dérive par rapport à k les équations pour la phase afin d'obtenir celles de la variable $Z = 2 \frac{d}{dk} \theta$.

Le travail qui va suivre sera essentiellement basé sur l'analyse des six équations de récurrence :

$$\cotg \theta_i^+ - \cotg \theta_i^- = \frac{v_i}{k} \quad (4.14)$$

$$\theta_{i+1}^- - \theta_i^+ = kl_i \quad (4.15)$$

$$\xi_i^+ - \xi_i^- = \ln \frac{\sin \theta_i^-}{\sin \theta_i^+} \quad (4.16)$$

$$\xi_{i+1}^- - \xi_i^+ = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{Z_i^+}{\sin^2 \theta_i^+} - \frac{Z_i^-}{\sin^2 \theta_i^-} = \frac{2v_i}{k^2} \quad (4.18)$$

$$Z_{i+1}^- - Z_i^+ = 2l_i \quad (4.19)$$

complétées par les conditions initiales :

$$\theta_0^+ = 0 \quad (4.20)$$

$$\xi_0^+ = 0 \quad (4.21)$$

$$Z_0^+ = 0. \quad (4.22)$$

La densité d'états et l'exposant de Lyapunov sont donnés par :

$$N(E) = \frac{\rho}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\theta_{N+1}^-}{N} \quad (4.23)$$

$$\gamma(E) = \rho \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\xi_{N+1}^-}{N}. \quad (4.24)$$

Le déphasage et le temps de Wigner sont donnés par :

$$\delta(E) = 2\theta_{N+1}^- + \pi \quad (4.25)$$

$$\tau(E) = \frac{1}{2k} Z_{N+1}^- . \quad (4.26)$$

b) $E = -k^2$

La traversée d'une impureté met en jeu les mêmes équations. L'évolution de θ et ξ lors de la traversée d'un intervalle vide d'impureté est donnée par l'intégration de (2.12,2.13). On obtient finalement :

$$\cotg \theta_i^+ - \cotg \theta_i^- = \frac{v_i}{k} \quad (4.27)$$

$$\tan(\theta_{i+1}^- + \pi/4) = \tan(\theta_i^+ + \pi/4) e^{2kl_i} \quad (4.28)$$

$$\xi_i^+ - \xi_i^- = \ln \frac{\sin \theta_i^-}{\sin \theta_i^+} \quad (4.29)$$

$$\xi_{i+1}^- - \xi_i^+ = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos 2\theta_i^+}{\cos 2\theta_{i+1}^-} \quad (4.30)$$

$$\frac{Z_i^+}{\sin^2 \theta_i^+} - \frac{Z_i^-}{\sin^2 \theta_i^-} = \frac{2v_i}{k^2} \quad (4.31)$$

$$\frac{Z_{i+1}^-}{\cos 2\theta_{i+1}^-} - \frac{Z_i^+}{\cos 2\theta_i^+} = 2l_i . \quad (4.32)$$

Le temps de Wigner est donné par $\tau(E) = -\frac{1}{2k} Z_{N+1}^-$.

Un des intérêts du modèle réside dans la forme que prennent les équations du formalisme de phase en équations de récurrence couplées particulièrement adaptées à des calculs numériques.

Une remarque permettant d'accélérer les calculs numériques dans le cas du désordre A est d'observer que les distances l_n entre impuretés successives sont des variables indépendantes distribuées par la loi de Poisson $p(l_n) = Y(l_n) \rho e^{-\rho l_n}$. Une façon de construire le désordre pourra donc être de tirer les N longueurs l_n , ce qui évite d'avoir à classer par ordre croissant les positions des impuretés jetées sur $[0, L]$. Il faut cependant noter que cette façon de construire le potentiel désordonné introduit des fluctuations de la taille du système de l'ordre de $\frac{\sqrt{N}}{\rho} = \frac{\langle L \rangle}{\sqrt{N}}$ (N est le nombre d'impuretés). Cette procédure rapide de construction du désordre ne sera donc adaptée qu'à l'étude de quantités indépendantes de la taille du système (les distributions limites par exemple). Pour une simulation numérique, la limite d'un système de grande taille est atteinte lorsque $L \gg \lambda$ ($N \gg \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho}{\gamma}$).

4.3 Spectre, localisation et distribution du déphasage

Les arguments analytiques concernent le désordre de type A. Ils seront illustrés par des calculs numériques réalisés à partir des équations (4.14, ..., 4.19).

4.3.1 Haute énergie : $k \gg v, \rho$

Lorsque $v > 0$, les équations (4.14, 4.15) montrent que lorsqu'on traverse une impureté, la phase se rapproche du multiple entier de π juste inférieur, tandis que lors de la traversée d'un intervalle vide elle augmente de kl_i .

À haute énergie on peut s'attendre à ce que l'évolution de la phase soit dominée par l'évolution lors de la traversée des intervalles vides d'impuretés. Pour $v \ll k$, l'équation (4.14) montre que la phase varie très peu en traversant l'impureté i : $\theta_i^+ - \theta_i^- \simeq -\frac{v}{k} \sin^2 \theta_i^- \ll 1$ alors que $\theta_{i+1}^- - \theta_i^+ = kl_i \sim \frac{k}{\rho} \gg 1$. On peut écrire

$$\langle \theta(L) - \theta(0) \rangle = kL + \sum_{i=1}^N \langle \theta_i^+ - \theta_i^- \rangle = kL - \frac{v}{k} \sum_{i=1}^N \langle \sin^2 \theta_i^- \rangle + \dots \quad (4.33)$$

D'autre part comme $kl_i \gg \pi$ on peut faire l'approximation que la phase θ_i^- est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$ (RPA). À condition de considérer un système assez grand, afin de négliger le début de l'intervalle $[0, L]$ dans lequel la phase n'a pas atteint sa distribution d'équilibre, cette approximation permet de calculer facilement $\langle \sin^2 \theta_i^- \rangle$, on aboutit à :

$$N(E) = \frac{k}{\pi} + \frac{\rho}{\pi} \left(-\frac{v}{2k} + O(v^3/k^3) \right), \quad (4.34)$$

(on vérifie facilement que le terme d'ordre 2 est nul). L'approximation de la phase aléatoire dans le domaine perturbatif $k \gg v$ fournira un développement de la densité d'états ou de l'exposant de Lyapunov en termes ρv^n qu'on interprète en théorie de perturbation comme les interactions avec une impureté isolée. Le résultat donné par cette approximation doit donc être contenu dans le problème à une impureté. Physiquement, la correction précédente correspond à un simple décalage des énergies de ρv ($\frac{k}{\pi} - \frac{\rho v}{2k\pi} \simeq \frac{1}{\pi} \sqrt{k^2 - \rho v}$). Ce terme est donc inintéressant, seule la technique est à retenir pour calculer l'exposant de Lyapunov.

Avant d'établir une expression de γ à l'aide des équations (4.16, 4.17), mentionnons un argument heuristique qu'on pourra trouver dans (Antsygina *et al.* 1981). Le coefficient de transmission pour la diffusion sur une impureté isolée est $T = \frac{k^2}{k^2 + v^2/4}$. À haute énergie, ce coefficient est très proche de 1 et on peut négliger les effets d'interférences dus à la rétrodiffusion par chaque impureté. Le carré du module de la fonction d'onde est modifié pendant la traversée de l'impureté comme : $|\psi(x_i^+)|^2 \simeq |\psi(x_i^-)|^2 \left(1 - \frac{v^2}{4k^2}\right)$. Sur une distance x on traverse environ ρx impuretés, par conséquent le module de la fonction d'onde se comporte comme : $|\psi(x)| \sim |\psi(0)| \left(1 - \frac{v^2}{4k^2}\right)^{\rho x/2} \sim |\psi(0)| e^{-\rho v^2 x/8k^2}$. Cette expression suggère que $\gamma \simeq \frac{\rho v^2}{8k^2}$.

Retrouvons maintenant ce résultat dans le cadre du formalisme de phase. L'équation (4.17) montre que ξ n'évolue pas entre deux impuretés. On peut réécrire l'équation (4.16) à l'aide de (4.14) pour ne plus faire apparaître que la phase θ_i^- afin d'utiliser la RPA. On a :

$$\xi_i^+ - \xi_i^- = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{v}{k} \sin 2\theta_i^- + \frac{v^2}{k^2} \sin^2 \theta_i^- \right) \quad (4.35)$$

qui montre que dans la limite $v \ll k$: $\xi_i^+ - \xi_i^- \simeq \frac{v}{2k} \sin 2\theta_i^- + \frac{v^2}{k^2} (\frac{1}{2} \sin^2 \theta_i^- - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_i^-)$. La RPA conduit à :

$$\gamma(E) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \langle \xi_i^+ - \xi_i^- \rangle = \frac{\rho v^2}{8k^2} + O(v^4/k^4) \quad (4.36)$$

qui est le résultat donné par l'argument heuristique précédent.

Fluctuations de la longueur de localisation

Les relations (4.16,4.17) montrent que la variable $\xi(x)$ est constante entre les impuretés et subit un saut à chaque impureté. Elle suit donc une marche aléatoire avec des pas de longueurs aléatoires distribués par une loi de Poisson et des sauts de hauteurs aléatoires dépendant de la phase θ_i^- , donnés par la relation (4.35). Cette dernière montre que la variation de ξ est bornée : $\Delta\xi \equiv \xi^+ - \xi^-$ atteint sa valeur maximale pour $\theta^- = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{2k}{v}$ et sa valeur minimale pour $\theta^- = \pi - \frac{1}{2} \arctan \frac{2k}{v}$, on a $|\Delta\xi| \leq \Delta\xi_{\max}$ avec :

$$\Delta\xi_{\max} = \operatorname{argsh} \frac{v}{2k} \quad (4.37)$$

qui se réduit dans les deux cas limites à : $\Delta\xi_{\max} \simeq \frac{v}{2k}$ si $v \ll k$ et $\Delta\xi_{\max} \simeq \ln \frac{v}{k}$ si $v \gg k$.

Lorsque $\rho \ll k$ la phase se décorrèle entre chaque impureté, les sauts de ξ sont alors décorrélés et l'on peut utiliser le théorème de la limite centrale pour montrer que la distribution de $\xi(L) = \sum_{i=1}^N \Delta\xi_i$ est gaussienne. Les fluctuations de $\xi(L)$ sont alors données par $\langle \langle \xi(L)^2 \rangle \rangle = N \langle \langle \Delta\xi^2 \rangle \rangle$.

À haute énergie $\rho, v \ll k$ on peut vérifier à l'aide du développement de (4.35) qu'à l'ordre le plus bas en v/k le second cumulant de $\Delta\xi$ est égal à sa valeur moyenne : $\langle \Delta\xi \rangle = \frac{v^2}{8k^2} - \frac{v^4}{128k^4} + O(\frac{v^6}{k^6})$ et $\langle \langle \Delta\xi^2 \rangle \rangle = \frac{v^2}{8k^2} - \frac{3v^4}{128k^4} + O(\frac{v^6}{k^6})$. On a donc $\langle \langle \xi(L)^2 \rangle \rangle = \langle \xi(L) \rangle = \gamma L$ à l'ordre dominant (en v^2/k^2). Comme pour les deux modèles étudiés aux chapitres 2 et 3, ξ est une marche aléatoire avec une dérive égale à 2.

Dans la limite de basse énergie ($k \ll \rho, v$), bien que les variables $\Delta\xi_i$ soient corrélées, il suffit qu'elles se décorrèlent sur une distance finie pour montrer que $\xi(L)$ est encore distribuée par une loi gaussienne, ce qui est vérifié numériquement. En revanche, le second cumulant de la loi n'est plus donné par le théorème de la limite centrale mais est influencé par les corrélations de portée finie. On constate numériquement une diminution des fluctuations relatives de l'exposant de Lyapunov à basse énergie : $\frac{\langle \langle \xi(L)^2 \rangle \rangle}{\langle \xi(L) \rangle} < 1$

4.3.2 Grande densité d'impuretés $v \ll \rho$: limite du bruit blanc

On a déjà discuté dans l'introduction de l'équivalence entre le modèle d'impuretés δ dans ce régime et le modèle du bruit blanc. La densité d'états et l'exposant de Lyapunov sont donc donnés avec une bonne approximation par les expressions (2.23,2.31) à condition de décaler les énergies de ρv dans ces expressions et de poser $\sigma = \rho v^2$. Sur les figures 4.1 et 4.2, on compare un résultat numérique pour le modèle d'impuretés δ aux expressions du modèle gaussien.

basse énergie : $k \ll v \ll \rho$

Étudions la limite de très basse énergie $k \ll v \ll \rho$. On commence par étudier la distribution stationnaire de la phase. Partons d'une valeur donnée $\theta_{i_0}^-$ de la phase ; le terme dominant de (4.14) est v/k si $\theta_{i_0}^- \gg k/v$ et $\cotg \theta_{i_0}^- \simeq 1/\theta_{i_0}^-$ si $\theta_{i_0}^- \ll k/v$. La phase θ_i^+ est dans tous les

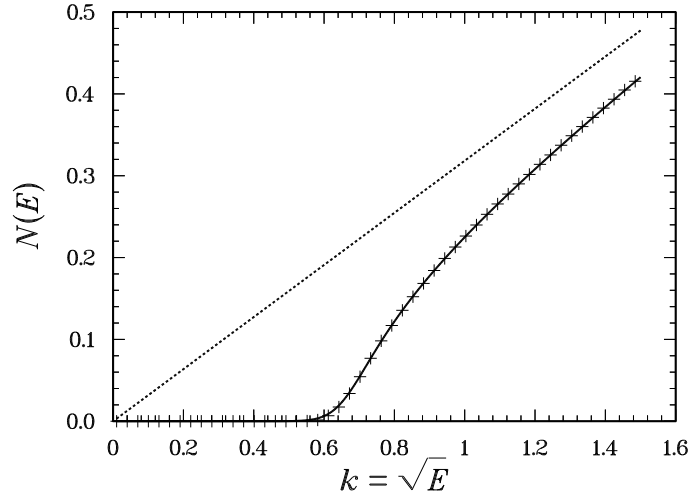


FIG. 4.1: Densité d'états intégrée. Croix : modèle d'impuretés δ , résultat numérique pour $v = 0.1$ et $\rho = 5$ et $N = 100000$ impuretés. Ligne continue : modèle gaussien (2.23). Ligne pointillée : problème libre.

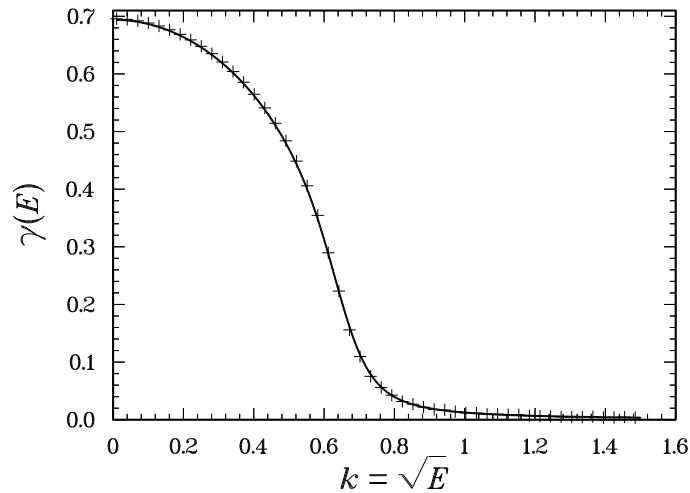


FIG. 4.2: Exposant de Lyapunov. Croix : modèle d'impuretés δ , résultat numérique pour $v = 0.1$ et $\rho = 5$ et $N = 100000$ impuretés. Ligne continue : modèle gaussien (2.23).

cas ramenée à une valeur de l'ordre de ou plus petite que k/v . Initialement la phase vaut $\theta_1^- = kl_1 \ll k/v$. Tant que $\theta \ll k/v$, l'impureté fait faire à la phase un petit saut en arrière $\theta_i^+ - \theta_i^- \simeq \theta_i^- (1 - \frac{v}{k}\theta_i^-)$. D'autre part la traversée de l'intervalle fait faire un petit saut en avant de $\theta_{i+1}^- - \theta_i^+ = kl_i \sim k/\rho \ll k/v$. On peut donc supposer que la valeur typique de la phase est donnée par le point où s'équilibrent les deux effets : on est alors amené à résoudre l'équation

$$\theta_{\text{typ}}^- \simeq kl + \frac{1}{v/k + 1/\theta_{\text{typ}}^-} \quad (4.38)$$

(on a utilisé $\cotg \theta \simeq 1/\theta$). En remplaçant l par $1/\rho$ on trouve que

$$\theta_{\text{typ}}^- \simeq \frac{k}{\sqrt{\rho v}} \quad (4.39)$$

qui respecte $k/\rho \ll \theta_{\text{typ}}^- \ll k/v$. Les fluctuations de θ^- viennent nécessairement des fluctuations de kl_i , qui sont d'ordre k/ρ . Pour conclure, cet argument montre donc que la distribution de la phase est centrée sur $\theta_{\text{typ}}^- \simeq \frac{k}{\sqrt{\rho v}}$ et de largeur k/ρ . On peut vérifier numériquement l'argument (voir figure 4.3) : Le pic est centré sur $k/\sqrt{\rho v} \simeq 0.0316$ et les fluctuations sont bien de l'ordre de $k/\rho \simeq 0.01$.

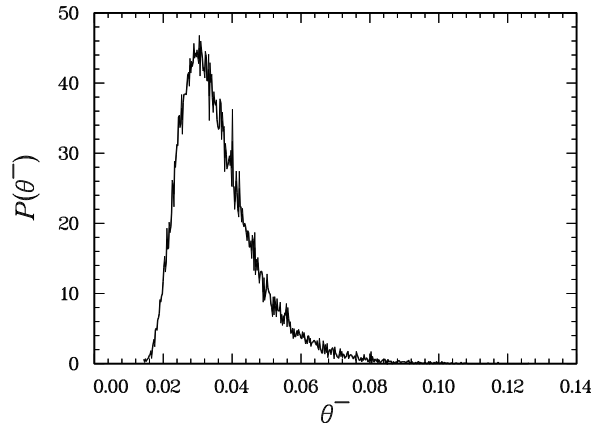


FIG. 4.3: Distribution de la phase (déphasage) dans le régime $k \ll v \ll \rho$. $v = 0.1$, $\rho = 1$ et $k = 0.01$. Le calcul met en jeu $N = 1000$ impuretés pour une statistique de 50000 valeurs

Si on utilise l'expression (4.35) on peut obtenir une valeur approchée de l'exposant de Lyapunov :

$$\gamma(E=0) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \langle \xi_i^+ - \xi_i^- \rangle \simeq \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \langle \ln(1 + v\theta_i^-/k) \rangle \quad (4.40)$$

Puisque la distribution de la phase est piquée autour de $k/\sqrt{\rho v}$ on trouve finalement que : $\gamma(E=0) \simeq \sqrt{\rho v}$. On peut retrouver ce résultat en exploitant la correspondance avec le modèle gaussien : lorsque $\rho v - E \gg (\rho v^2)^{2/3}$ l'exposant de Lyapunov doit être donné par l'expression asymptotique (2.33) *i.e.* $\gamma(E) \simeq \sqrt{\rho v - E}$. À énergie nulle on retrouve en effet le résultat attendu.

À l'échelle de la distance moyenne entre impuretés, la longueur de localisation vaut $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \rho/\gamma$, soit dans le cas présent $\Lambda \simeq \sqrt{\rho/v} \gg 1$.

4.3.3 Faible densité d'impuretés $\rho \ll v$

On se place dans un régime tel que $\rho, k \ll v$ (le régime de haute énergie a déjà été discuté). Dans le régime de faible densité d'impuretés on peut donner des arguments plus précis. La grande simplification qui apparaît dans ce régime vient de ce que la phase (modulo π) se décorrèle à chaque fois qu'elle traverse une impureté. La traversée d'un intervalle vide d'impureté ajoute à la phase un terme d'ordre $k/\rho \gg k/v$, c'est-à-dire que $\theta_i^+ \sim n\pi + k/v$, *i.e.* $(\theta_i^+ \bmod \pi) \ll k/\rho$. On a donc $\theta_{i+1}^- \simeq n\pi + kl_i$, *i.e.* θ_{i+1}^- est insensible à la valeur de θ_i^+ .

Densité d'états : singularité de Lifshits

Nous commencerons par rappeler l'argument heuristique dû à Lifshits : en dimension d , l'énergie de l'état fondamental d'une particule dans une boîte de dimension caractéristique L est d'ordre $E \sim 1/L^2$. Lorsqu'on considère un potentiel d'impuretés répulsives distribuées par une loi de Poisson avec une densité moyenne ρ , la probabilité qu'une région de l'espace de volume $V = L^d$ soit vide d'impureté se comporte comme $e^{-\rho V}$; cet évènement est associé à l'existence d'un état de basse énergie $E \sim 1/L^2$, c'est-à-dire que la taille du trou est associée à une énergie $L \sim E^{-1/2}$. La probabilité d'un tel état, *i.e.* la densité d'états, est donc typiquement $\rho(E) \sim e^{-a\rho E^{-d/2}}$ où a est une constante numérique sans dimension (dans le système d'unités $\hbar = 2m_e = 1$). La densité d'états intégrée doit présenter un comportement analogue. Une telle singularité porte le nom de singularité de Lifshits (Lifshits 1965). De nombreux travaux ont eu pour objet de prouver rigoureusement ce résultat parmi lesquels on peut citer (Friedberg & Luttinger 1975), (Neuberger 1982), (Luttinger & Tao 1983), (Luttinger & Waxler 1987), (Nieuwenhuizen & Luck 1987).

Dans un second temps on utilise le formalisme de phase en profitant du fait que la phase modulo π se décorrèle après chaque impureté. Plaçons-nous dans un premier temps à $k \ll \rho$. Pour compter un état il faut que la phase saute d'au moins π en traversant un intervalle vide d'impureté. Comme $\theta_i^+ \simeq n\pi$, la probabilité pour que θ_{i+1}^- saute dans l'intervalle $[(n+1)\pi, (n+2)\pi]$ est égale à la probabilité pour que $kl_i > \pi$ (si $k \ll \rho$ on peut négliger la probabilité de sauter dans l'intervalle suivant) or $\text{Prob}[l > \pi/k] = e^{-\pi\rho/k} = \text{Prob}[\theta_{i+1}^- - \theta_i^+ > \pi] = \text{Prob}[\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+ \simeq \pi]$. On a donc $\langle \theta_{i+1}^+ - \theta_i^+ \rangle = \pi e^{-\pi\rho/k}$, qu'il faut multiplier par le nombre d'intervalles $N = \rho L$ pour obtenir $\langle \theta_{N+1}^- \rangle$, d'où finalement $N(E) \simeq \rho e^{-\pi\rho/k}$. On retrouve le comportement prévu par l'argument de Lifshits.

On peut facilement étendre cet argument au cas où k est de l'ordre ou plus grand que ρ , tout en respectant $k \ll v$. Lorsqu'on traverse l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, il faut prendre en compte la possibilité qu'à la phase de faire un saut supérieur à 2π ; en tenant compte à nouveau du fait que θ_i^+ est ramenée à un multiple entier de π , la probabilité pour que la traversée de $[x_i, x_{i+1}]$ apporte une contribution de $n\pi$ à la phase est :

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[n\pi \leq \theta_{i+1}^- - \theta_i^+ < (n+1)\pi] = \text{Prob}[\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+ \simeq n\pi] \\ & = \text{Prob}\left[n\frac{\pi}{k} \leq l_i < (n+1)\frac{\pi}{k}\right] = e^{-n\pi\rho/k} - e^{-(n+1)\pi\rho/k} \end{aligned} \quad (4.41)$$

ce qui implique que :

$$\langle \theta_{i+1}^+ - \theta_i^+ \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \left(e^{-n\pi\rho/k} - e^{-(n+1)\pi\rho/k} \right). \quad (4.42)$$

La série se calcule aisément et on aboutit finalement à :

$$N(E) = \frac{\rho}{e^{\pi\rho/k} - 1} \quad \text{pour } k, \rho \ll v. \quad (4.43)$$

La densité d'états correspondante est :

$$\rho(E) = \frac{\pi\rho^2}{8E^{3/2}} \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{\pi\rho}{2\sqrt{E}}} \quad (4.44)$$

qui coïncide avec le résultat de Bychkov & Dykhne (1966b).

On vérifie numériquement ce résultat (*cf.* figure 4.4). Ce résultat est valable tant que $k \ll v$; lorsque cette condition n'est plus remplie, la densité d'états intégrée se raccorde à la densité d'états intégrée libre.

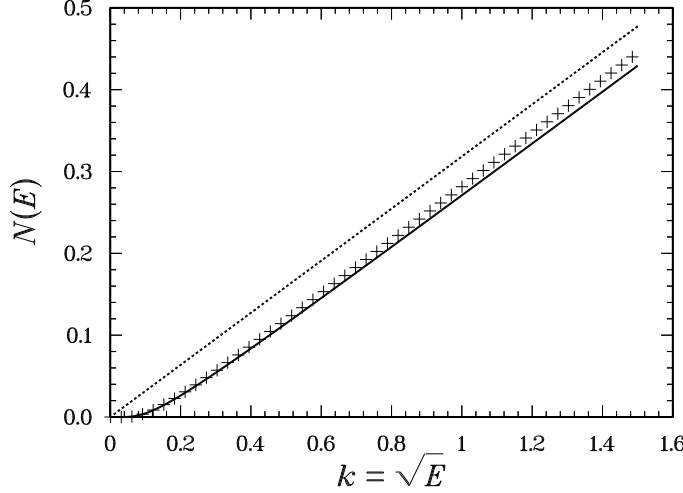


FIG. 4.4: Densité d'états intégrée. Croix : modèle d'impuretés δ , résultat numérique pour $v = 5$ et $\rho = 0.1$ et $N = 100000$ impuretés. Ligne continue : expression (4.43). Ligne pointillée : problème libre.

Exposant de Lyapunov

On peut utiliser un argument similaire pour estimer l'exposant de Lyapunov. D'après l'expression (4.35) :

$$\gamma(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^N \left\langle \ln \left(1 + \frac{v}{k} \sin 2\theta_i^- + \frac{v^2}{k^2} \sin^2 \theta_i^- \right) \right\rangle, \quad (4.45)$$

ce qui permet d'obtenir l'expression générale pour l'exposant de Lyapunov :

$$\gamma(E) = \frac{\rho}{2} \int_0^\pi d\theta^- P(\theta^-) \ln \left(1 + \frac{v}{k} \sin 2\theta^- + \frac{v^2}{k^2} \sin^2 \theta^- \right). \quad (4.46)$$

Dans le régime $v \gg k$ on a $\theta_i^- \simeq n\pi + kl_i$; au $n\pi$ près (sans importance car la phase n'apparaît que dans des fonctions trigonométriques dans l'expression de γ), la phase θ_i^- est approximativement distribuée par une loi de Poisson $P(\theta^-) \simeq \frac{\rho}{k} e^{-\frac{\rho}{k}\theta^-}$. Lorsque $k \gg \rho$, cette distribution tend vers une distribution plate pour la phase modulo π . On aboutit finalement à l'expression :

$$\gamma(E) \simeq \frac{\rho}{2} \int_0^\infty dx e^{-x} \ln \left(1 + \frac{v}{k} \sin \left(2\frac{k}{\rho}x \right) + \frac{v^2}{k^2} \sin^2 \left(\frac{k}{\rho}x \right) \right), \quad (4.47)$$

valable pour $\rho \ll v$. On peut extraire les comportements limites.

a) À très petite énergie $k \ll \rho \ll v$, l'exposant de Lyapunov est voisin de la valeur limite atteinte à $E = 0$:

$$\gamma(E = 0) \simeq \rho \int_0^\infty dx e^{-x} \ln \left(1 + \frac{v}{\rho}x \right) \quad (4.48)$$

d'où

$$\gamma(E = 0) \simeq -\rho e^{\rho/v} \text{Ei}(-\rho/v) , \quad (4.49)$$

ce qui montre que l'exposant de Lyapunov à énergie nulle possède un comportement logarithmique à faible densité :

$$\gamma(E = 0) \simeq \rho \left(\ln \frac{v}{\rho} - \mathbf{C} \right) . \quad (4.50)$$

(cf. (Lifshits *et al.* 1988, §10.4)) où $\mathbf{C} = 0.577215\dots$ est la constante d'Euler. La longueur de localisation est donc plus petite que la distance moyenne entre impuretés : $\Lambda = \rho/\gamma \sim 1/\ln \frac{v}{\rho} < 1$.

b) Pour des énergies intermédiaires $\rho \ll k \ll v$ on obtient à nouveau un comportement logarithmique :

$$\gamma(E) \simeq \rho \ln \frac{v}{2k} . \quad (4.51)$$

c) Pour $\rho \ll v \ll k$, on retrouve le résultat de haute énergie obtenu dans un paragraphe précédent $\gamma(E) \simeq \frac{\rho v^2}{8k^2}$.

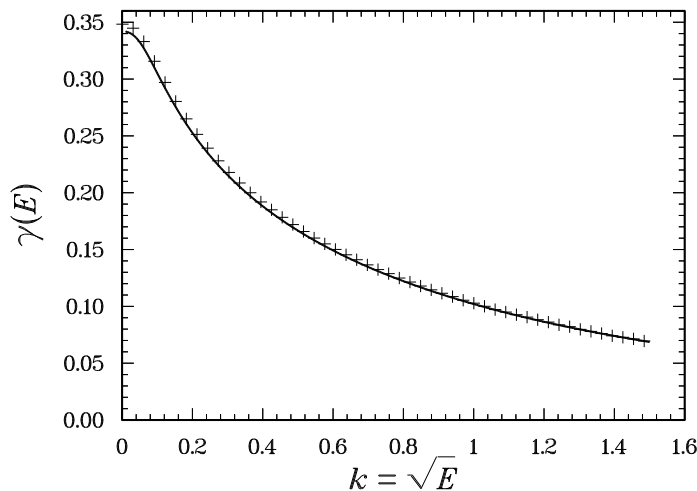


FIG. 4.5: Exposant de Lyapunov. Croix : modèle d'impuretés δ , résultat numérique pour $v = 5$ et $\rho = 0.1$ et $N = 100000$ impuretés. Ligne continue : expression (4.47).

L'écart entre (4.47) et le résultat numérique pour $k \rightarrow 0$ est dû à l'approximation faite pour $P(\theta^-)$. Au prochain paragraphe, nous verrons qu'une meilleure approximation serait $P(\theta^-) \simeq \frac{\rho}{k} Y(\theta^- - k/v) e^{-\frac{\rho}{k}(\theta^- - k/v)}$. Cette expression conduit alors à $\gamma(E = 0) \simeq \rho [\ln 2 - e^{2\rho/v} \text{Ei}(-2\rho/v)]$ dont le terme dominant est encore donné par (4.50), et qui se rapproche en effet du résultat numérique (avec les paramètres correspondant à la figure 4.5 on trouve $\gamma(E = 0) = 0.34838$, alors que numériquement on a $\gamma_{\text{num}}(E = 10^{-6}) = 0.34829$).

Distribution stationnaire de la phase (*i.e.* du déphasage)

L'étude de la distribution de la phase à la réflexion a suscité certaines études parmi lesquelles on peut citer (Sulem 1973) dans le cadre de la réflexion d'ondes électromagnétiques et (Barnes & Luck 1990) pour un modèle discret (hamiltonien d'Anderson).

Dans la limite de basse énergie $k \ll \rho \ll v$, on a pu constater que la distribution périodique de la phase était proche d'une loi de Poisson $P(\theta^-) \simeq \frac{\rho}{k} e^{-\frac{\rho}{k}\theta^-}$. Dans ce paragraphe nous allons obtenir cette distribution de manière beaucoup plus précise. On profite du fait que θ reste nécessairement petit devant π pour remplacer (4.14,4.15) par

$$\theta_{i+1} = kl_i + \frac{1}{v/k + 1/\theta_i} . \quad (4.52)$$

On introduit la notation $\theta_i \equiv \theta_i^-$. Cette relation permet d'écrire une équation de récurrence pour la distribution $P_i(\theta)$ de la phase θ_i :

$$P_{i+1}(\theta) = \int_0^\infty dl \rho e^{-\rho l} \int_0^\pi d\theta' P_i(\theta') \delta\left(\theta - kl - \frac{1}{v/k + 1/\theta'}\right) . \quad (4.53)$$

Lorsque la distribution atteint sa distribution stationnaire, elle doit donc obéir à l'équation intégrale :

$$P(\theta) = \frac{\rho}{k} \int_0^\pi d\theta' P(\theta') e^{-\frac{\rho}{k}\left(\theta - \frac{1}{v/k + 1/\theta'}\right)} Y\left(\theta - \frac{1}{v/k + 1/\theta'}\right) \quad (4.54)$$

($Y(x)$ est la fonction de Heaviside). Par commodité, on introduit la fonction $u(\theta)$:

$$P(\theta) = u(\theta) e^{-\frac{\rho}{k}\theta} \quad (4.55)$$

qui obéit donc à l'équation intégrale :

$$u(\theta) = \frac{\rho}{k} \int_0^\pi d\theta' u(\theta') e^{-\frac{\rho}{k}\frac{\theta'^2}{\theta' + k/v}} Y\left(\theta - \frac{1}{v/k + 1/\theta'}\right) . \quad (4.56)$$

Cette équation montre que $u(0) = 0$. Si on dérive l'équation par rapport à θ on aboutit à :

$$\frac{d}{d\theta} u(\theta) = \frac{\rho}{k} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{k}\theta\right)^2} u\left(\frac{\theta}{1 - \frac{v}{k}\theta}\right) e^{-\frac{\rho}{k}\frac{\theta^2}{\theta + k/v}} , \quad (4.57)$$

d'où il ressort que la dérivée de $u(\theta)$ s'annule à l'origine : $u'(0) = 0$. On remarque également que $u'(\theta) \geq 0$. On peut prouver aisément en procédant par itérations que $u^{(n)}(\theta)$ fait intervenir les dérivées d'ordres inférieurs ainsi que des fonctions régulières à l'origine, et ainsi montrer que la dérivée n ième s'annule à l'origine :

$$u^{(n)}(0) = 0 . \quad (4.58)$$

Toutes les dérivées de la distribution s'annulent en $\theta = 0$; ce comportement non analytique suggère que la distribution est quasiment nulle sur un intervalle dont nous allons déterminer la taille caractéristique.

La méthode que nous proposons pour résoudre l'équation (4.56) s'appuie sur la remarque suivante : si $\theta' > 0$ alors $\frac{1}{v/k + 1/\theta'} \leq \frac{k}{v}$, il s'ensuit que lorsque $\theta \geq k/v$ la fonction de Heaviside ne joue aucun rôle puisque son argument est nécessairement positif. On remplace alors $Y\left(\theta - \frac{1}{v/k + 1/\theta'}\right)$ par 1 et θ n'apparaît plus dans l'intégrale qui est alors égale à une constante. Si $\theta \geq k/v$ la fonction $u(\theta)$ est constante :

$$u(\theta \geq k/v) = u(k/v) = \frac{\rho}{k} \int_0^\pi d\theta' u(\theta') e^{-\frac{\rho}{k}\frac{\theta'^2}{\theta' + k/v}} . \quad (4.59)$$

On s'est placé dans une limite $k \ll \rho$, puisque $u(\theta)$ est constante à l'infini l'intégrand décroît rapidement et on peut remplacer la borne supérieure des intégrales par $+\infty$ afin de simplifier la discussion.

Si $\theta \notin [k/v, \infty[$, on peut séparer l'intégrale de l'équation (4.56) en deux parties :

$$u(\theta) = \frac{\rho}{k} \int_0^\infty d\theta' u(\theta') e^{-\frac{\rho}{k} \frac{\theta'^2}{\theta' + k/v}} - \frac{\rho}{k} \int_{\frac{1}{1/\theta - v/k}}^\infty d\theta' u(\theta') e^{-\frac{\rho}{k} \frac{\theta'^2}{\theta' + k/v}} \quad (4.60)$$

dans laquelle le premier terme est simplement $u(k/v)$. Si on s'intéresse au domaine $\frac{k}{2v} \leq \theta \leq \frac{k}{v}$, alors on a $\frac{1}{1/\theta - v/k} \geq \frac{k}{v}$ et l'on peut utiliser dans la seconde intégrale l'expression (4.59) de $u(\theta)$ pour $\theta \geq k/v$; on aboutit alors à l'expression de u sur ce domaine :

$$u(k/2v \leq \theta \leq k/v) = u(k/v) \left[1 - \frac{\rho}{k} \int_{\frac{1}{1/\theta - v/k}}^\infty d\theta' e^{-\frac{\rho}{k} \frac{\theta'^2}{\theta' + k/v}} \right]. \quad (4.61)$$

Il est clair qu'on peut continuer la procédure et résoudre l'équation intégrale (4.56) par itérations successives dans les différents intervalles s'approchant de l'origine. Pour cela on découpe $[0, k/v]$ en intervalles $[\frac{k}{(n+1)v}, \frac{k}{nv}]$; lorsque θ se trouve dans un tel intervalle, la borne inférieure de l'intégrale de (4.60) se trouve encadrée par : $\frac{k}{nv} \leq \frac{1}{1/\theta - v/k} \leq \frac{k}{(n-1)v}$. L'expression (4.60) montre donc que $u(\theta)$ est exprimée dans l'intervalle $[\frac{k}{(n+1)v}, \frac{k}{nv}]$ à l'aide des expressions qu'on a trouvées dans les intervalles précédents. En procédant de cette manière on montre que l'expression de la fonction $u(\theta)$ dans l'intervalle $[\frac{k}{(n+1)v}, \frac{k}{nv}]$ est :

$$\begin{aligned} u(\theta) &= u(k/v) \left[1 - \frac{\rho}{k} \int_{\omega(\theta)}^\infty d\theta_1 e^{-\beta(\theta_1)} + \left(-\frac{\rho}{k}\right)^2 \int_{\omega(\theta)}^{k/v} d\theta_1 \int_{\omega(\theta_1)}^\infty d\theta_2 e^{-\beta(\theta_1) - \beta(\theta_2)} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\rho}{k}\right)^n \int_{\omega(\theta)}^{\frac{k}{(n-1)v}} d\theta_1 \int_{\omega(\theta_1)}^{\frac{k}{(n-2)v}} d\theta_2 \dots \int_{\omega(\theta_{n-2})}^{k/v} d\theta_{n-1} \int_{\omega(\theta_{n-1})}^\infty d\theta_n e^{-\beta(\theta_1) - \beta(\theta_2) - \dots - \beta(\theta_n)} \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

où l'on a introduit les deux fonctions :

$$\omega(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1/\theta - v/k} \quad (4.63)$$

$$\beta(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho}{k} \frac{\theta^2}{\theta + k/v}. \quad (4.64)$$

Dans la limite $\rho \ll v$ la distribution de θ tend très vite vers 0 lorsqu'on s'approche de l'origine et seules une ou deux intégrales sont suffisantes pour caractériser la distribution dans la région intéressante.

On peut extraire le comportement de u lorsque θ s'approche de k/v par valeurs inférieures; à partir de (4.61) :

$$u(k/v - \epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{\simeq} u(k/v) \left[1 - \frac{\rho}{k} e^{-\frac{\rho k}{v^2 \epsilon}} \right]. \quad (4.65)$$

Lorsque θ se rapproche de l'origine la fonction $u(\theta)$ tend rapidement vers 0. Pour avoir une idée de la rapidité avec laquelle la distribution "s'écrase" sur l'intervalle $[\frac{k}{2v}, \frac{k}{v}]$, on peut évaluer $u(k/2v)$ dans la limite qui nous intéresse dans ce paragraphe ($k \ll \rho \ll v$) :

$$u(k/2v) = u(k/v) \left(1 - \frac{\rho}{k} \int_{k/v}^\infty d\theta' e^{-\frac{\rho}{k} \frac{\theta'^2}{\theta' + k/v}} \right) = u(k/v) \left(1 - \frac{\rho}{v} \int_1^\infty dx e^{-\frac{\rho}{v} \frac{x^2}{x+1}} \right) \quad (4.66)$$

dans la limite $\rho \ll v$ on peut remplacer l'exponentielle par le développement en $1/x$: $e^{-\frac{\rho}{v} \frac{x^2}{x+1}} = e^{-\frac{\rho}{v}(x-1)}(1 - \frac{\rho}{vx} + \dots)$ ce qui montre que le terme dominant de $u(k/2v)$ est donné par :

$$u(k/2v) = u(k/v) \left(\frac{\rho}{v}\right)^2 \left[\ln \frac{v}{\rho} - \mathbf{C} \right] + \dots \quad (4.67)$$

Le terme suivant de ce développement sera en $(\frac{\rho}{v})^4 \ln^2 \frac{v}{\rho}$, etc. Cette expression montre que $P(k/2v) \ll P(k/v)$ dans la limite $\rho \ll v$. La distribution est quasiment nulle dans l'intervalle $[0, k/v]$. La constante de normalisation est donc donnée en première approximation par : $P(k/v) \simeq \rho/k$.

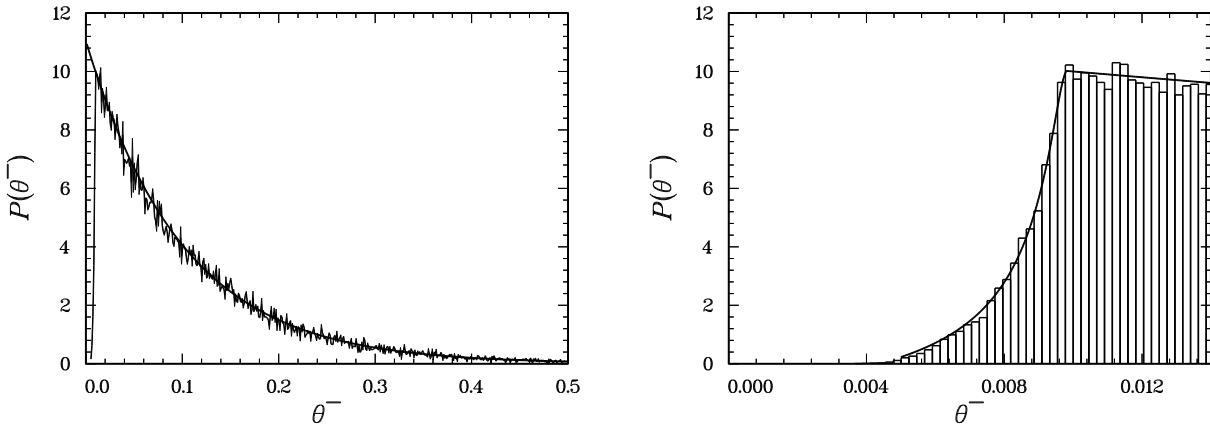


FIG. 4.6: Distribution stationnaire de la phase θ^- (déphasage) dans le régime $k \ll \rho \ll v$. Calcul numérique pour $v = 1$, $\rho = 0.1$, $k = 0.01$ et $N = 1000$ impuretés. Figure du gauche : statistique de $n_s = 50000$ données. La courbe lisse est la poissonnienne donnée par (4.68). Figure de droite : comportement à l'origine. Statistique de $n_s \simeq 628000$. La courbe lisse est l'expression analytique donnée par (4.68) et (4.69).

Sur la figure 4.6 on compare le résultat d'un calcul numérique avec la poissonnienne donnée par (4.59) :

$$P(\theta \geq k/v) = P(k/v) e^{-\frac{\rho}{k}(\theta - \frac{k}{v})}, \quad (4.68)$$

et le comportement à l'origine de la distribution obtenue numériquement à (4.61) :

$$P(k/2v \leq \theta \leq k/v) = P(k/v) e^{-\frac{\rho}{k}(\theta - \frac{k}{v})} \left[1 - \frac{\rho}{k} \int_{\frac{1}{1/\theta - v/k}}^{\infty} d\theta' e^{-\frac{\rho}{k} \frac{\theta'^2}{\theta' + k/v}} \right]. \quad (4.69)$$

Notons que cette manière de construire la solution de (4.56) n'utilise que l'hypothèse $\theta \ll \pi$. Lorsque ρ se rapproche de v , il devient nécessaire d'utiliser les expressions (4.62) car la distribution ne "s'écrase" plus assez vite en se rapprochant de l'origine. En effet, on a vu que dans la limite $k \ll v \ll \rho$ le pic de la distribution est centré sur $k/\sqrt{\rho v} \gg k/v$.

En dernier lieu donnons la distribution de la phase θ^+ . Cette dernière est reliée à θ^- par :

$$\theta^+ = \frac{1}{1/\theta^- + v/k}, \quad (4.70)$$

et sa distribution à celle de θ^- par :

$$Q(\theta^+) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{k}\theta^+\right)^2} P\left(\frac{\theta^+}{1 - \frac{v}{k}\theta^+}\right). \quad (4.71)$$

Sur la figure 4.7 on compare le résultat numérique avec l'expression donnée par (4.68,4.69,4.71) qui est donc valable si θ^+ est dans l'intervalle $[k/3v, k/v]$.

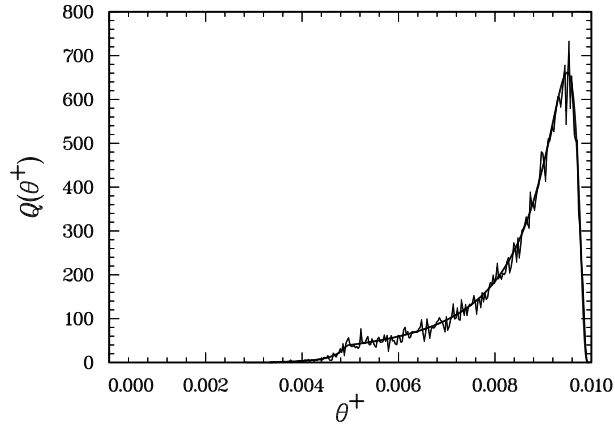


FIG. 4.7: Distribution stationnaire de la phase θ^+ dans le régime $k \ll \rho \ll v$. Calcul numérique pour $v = 1$, $\rho = 0.1$, $k = 0.01$ et $N = 1000$ impuretés pour une statistique de $n_s = 50000$ données. Comparaison avec le résultat analytique donné par (4.68,4.69,4.71).

Toute cette analyse de la distribution de θ^- et θ^+ nous servira en temps utile, lorsque nous étudierons la distribution du temps de Wigner dans le régime de basse énergie.

Rappelons que le déphasage est relié à la phase par $\delta(E) = 2\theta_{N+1}^- + \pi$. Ces résultats montrent donc qu'à basse énergie le déphasage est voisin de π , cette dernière valeur correspondant à une région impénétrable.

4.3.4 Tableau récapitulatif

régime		$N(E)$	$\gamma(E)$
haute densité	$k \ll v \ll \rho$	0	$\sqrt{\rho v}$
	$v \ll k \ll \rho$	régime du bruit blanc : (2.23)	(2.31)
	$v \ll \rho \ll k$	avec $E \rightarrow k^2 - \rho v$ et $\sigma \rightarrow \rho v^2$ $\frac{k}{\pi}$	$\frac{\rho v^2}{8k^2}$
faible densité	$k \ll \rho \ll v$	$\rho e^{-\pi \frac{\rho}{k}}$	$\rho (\ln \frac{v}{\rho} - C)$
	$\rho \ll k \ll v$	$\frac{k}{\pi} - \frac{\rho}{2}$	$\rho \ln \frac{v}{2k}$
	$\rho \ll v \ll k$	$\frac{k}{\pi}$	$\frac{\rho v^2}{8k^2}$

4.3.5 Le poids des impuretés est négatif : $v < 0$

Haute densité $v \ll \rho$

Dans la limite où la densité d'impuretés est élevée, le spectre et la localisation sont bien décrits par les résultats du modèle gaussien, néanmoins on peut utiliser un argument heuristique pour trouver le comportement de manière plus fine. Pour la densité d'états on peut penser que l'existence d'états de basse énergie est reliée à l'existence de configurations contenant des amas d'impuretés. En effet, si un état localisé sur une impureté isolée possède une énergie $-v^2/4$ et une extension spatiale de l'ordre de $1/|v|$, n impuretés agglutinées sur une distance beaucoup plus petite que $k \sim \frac{1}{n|v|}$ seront responsables de l'existence d'un état de basse énergie $E \sim -n^2 v^2/4$. La probabilité pour que n impuretés soient toutes à des distances petites devant $k \sim \frac{1}{n|v|}$ est de l'ordre de $(\alpha \frac{\rho}{k})^n$ où $\alpha \ll 1$ est un nombre sans dimension. La densité d'états à $E \sim -n^2 v^2/4$ est proportionnelle à la probabilité de cette configuration, $\rho(E) \sim (\alpha \frac{\rho}{k})^{2k/|v|}$ i.e. $\rho(E = -k^2) \sim e^{-\frac{2k}{|v|} \ln \frac{k}{\alpha \rho}}$. Cet argument heuristique reproduit la dépendance en énergie trouvée par Magarill & Entin (1966) : $N(E = -k^2) \sim k e^{-4 \frac{k}{|v|} \ln \frac{k}{\sqrt{\rho|v|}}}$ (cf. (Lifshits *et al.* 1988, §6.8)).

Basse densité $\rho \ll v$: singularité de Halperin

Dans la limite de faible densité d'impuretés le mécanisme est tout à fait différent car les configurations qui interviennent dans le cas précédent sont alors complètement improbables. On peut cependant invoquer un autre argument heuristique (dont on trouve une version dans le cadre du modèle d'Anderson dans (Luck 1992, §1.6.1)). Lorsqu'on considère deux impuretés isolées, la levée de dégénérescence entre les deux états localisés sur chaque impureté à $E_0 = -v^2/4$ est exponentiellement petite : $\Delta E = 4|E_0|e^{-|v|l/2}$ ($E_{\pm} = E_0 \pm \Delta E/2$) où l est la distance

séparant les deux impuretés. Si on considère trois impuretés, on peut constater que la levée de dégénérescence est donnée par la plus petite des deux distances. Pour le problème d'impuretés on peut donc s'attendre à observer une bande d'énergie autour de E_0 . Si on néglige l'influence de la partie positive du spectre, on peut penser que la densité d'états est symétrique autour de E_0 . La probabilité de trouver un état à une énergie $E = E_0 + \varepsilon$ est donc associée à la probabilité pour qu'une impureté soit séparée de sa proche voisine d'une distance $l_{<} \simeq -\frac{2}{|v|} \ln \frac{\varepsilon}{2|E_0|}$. La distribution de la plus petite longueur parmi les deux est $P(l_{<}) = 2\rho e^{-2\rho l_{<}}$; la densité d'états est donc $\rho(E) \sim P(l_{<}) \left| \frac{d\varepsilon}{dl_{<}} \right|$ c'est-à-dire que la densité d'états présente une singularité au voisinage de E_0 du type : $\rho(E) \propto |\varepsilon|^{\frac{4\rho}{|v|}-1}$. Ce type de singularité est appelée singularité de Halperin (Schmidt 1957), (Morrison 1962), (Lifshits 1963), (Bychkov & Dykhne 1966a), (Halperin 1967). On peut trouver une expression plus précise dans (Lifshits *et al.* 1988, §6.8) :

$$N(E) \simeq \rho \frac{4(1 - Y(e)|e|^{2\rho/|v|})}{(3 - |e|^{2\rho/|v|})^2} \quad (4.72)$$

où $e \equiv 1 - \frac{2k}{|v|}$. Lorsque $E \sim E_0$ on a donc

$$\rho(E) \simeq C \frac{\rho^2}{|E_0|^{3/2}} \left| \frac{E - E_0}{E_0} \right|^{-1+2\rho/|v|} \quad (4.73)$$

où la constante C dépend du signe de $E - E_0$. Remarquons le petit désaccord entre l'exposant prévu par l'argument heuristique et celui donné par les autres approches.

Remarquons que dans la limite où les impuretés sont très diluées, l'hamiltonien $-\frac{d^2}{dx^2} - |v| \sum_i \delta$ peut être remplacé par un hamiltonien de liaisons fortes dans la base des états localisés sur chaque impureté. Cet hamiltonien est un hamiltonien à désordre non diagonal.

Pour les énergies positives il suffit d'adapter l'argument utilisé pour $k, \rho \ll v$ pour obtenir la densité d'états intégrée. Contrairement au cas $v > 0$ dans lequel la phase θ^+ est ramenée en arrière vers un multiple entier de π , l'équation (4.14) montre que pour $v < 0$ elle est poussée vers le multiple entier de π qui la suit. Le raisonnement est le même, sauf qu'il faut compter systématiquement un état supplémentaire à chaque traversée d'impureté, on aboutit finalement à :

$$N(E) = \frac{\rho}{1 - e^{-\pi\rho/k}} \quad \text{pour } k, \rho \ll |v|. \quad (4.74)$$

4.4 Temps de Wigner

4.4.1 Résonances

Il existe une représentation générale du temps de Wigner en terme de résonances (Fyodorov & Sommers 1997) :

$$\tau(E) = 2 \sum_{\alpha} \frac{\Gamma_{\alpha}/2}{(E - E_{\alpha})^2 + \Gamma_{\alpha}^2/4} \quad (4.75)$$

où la sommation porte sur des résonances d'énergies E_{α} et de largeurs Γ_{α} . On comprend en particulier que les propriétés statistiques du temps de Wigner sont en étroite relation avec celles des largeurs des résonances.

4.4.1.α Diffusion sur le tore hyperbolique

L'objet de ce paragraphe est de présenter un modèle différent des modèles unidimensionnels étudiés jusqu'à présent, qui permet une analyse des propriétés du temps de Wigner en termes de résonances. Il s'agit de la diffusion sur une surface de courbure négative constante. La dynamique classique d'une particule évoluant sur ce type de surface est chaotique, c'est pourquoi certains auteurs se sont intéressés à de tels systèmes afin de modéliser les propriétés de transport de systèmes mésoscopiques (Balazs & Voros 1986), (Avron, Klein, Pnuelli & Sadun 1992), (Georgot 1993). Pour la surface particulière qui nous intéressera, Faddeev & Pavlov (1972) ont obtenu une expression analytique du déphasage qui permet de calculer exactement le temps de Wigner.

Commençons par définir le modèle. Une représentation d'une surface de courbure négative constante est fournie par le demi plan de Poincaré $\mathbb{H}_2 = \{z = x + iy; y > 0\}$ associé à la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ (pour une introduction à la géométrie hyperbolique, cf. (Stillwell 1992)). Sur cette variété, l'hamiltonien libre est donné par l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_{LB} = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$:

$$\mathcal{H} = -\Delta_{LB} . \quad (4.76)$$

Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ fournit une représentation des isométries de \mathbb{H}_2 ¹. Parmi ces isométries, certaines forment des sous groupes discrets permettant de paver l'espace par des polygones réguliers. Un tel sous groupe Γ définit donc un domaine fondamental. On considère en particulier les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ainsi que leurs inverses; les éléments du sous groupe Γ sont donnés par les mots formés à partir des quatre lettres A, B, A^{-1} , et B^{-1} . Le domaine fondamental associé à ce sous groupe est un quadrilatère dessiné sur la figure 4.8

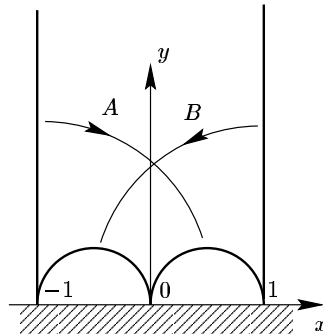


FIG. 4.8: Domaine fondamental pour le sous groupe engendré par les 4 éléments $\{A, B, A^{-1}, B^{-1}\}$.

Pour obtenir un tore, on identifie deux à deux les bords du domaine fondamental à l'aide des éléments du sous groupe. Dans le cas présent, la surface possède la topologie d'un tore avec une pointe partant à l'infini. On peut alors définir des états stationnaires de diffusion qui entrent et ressortent par la pointe (cf. figure 4.9). L'état d'énergie $E = \frac{1}{4} + k^2$ prend asymptotiquement la

¹ $SL(2, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels et de déterminant égal à l'unité. Ces matrices sont associées aux transformations de $\mathbb{H}_2 : z \mapsto z' = \frac{az+b}{cz+d}$. Les matrices de déterminant -1 sont associées aux transformations $z \mapsto z' = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ changeant l'orientation.

forme :

$$\psi_k \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} y^{\frac{1}{2} - ik} + e^{i\delta(k)} y^{\frac{1}{2} + ik} \quad (4.77)$$

($\ln y$ est la distance hyperbolique entre l'origine $z = i$ et le point $z = iy$).

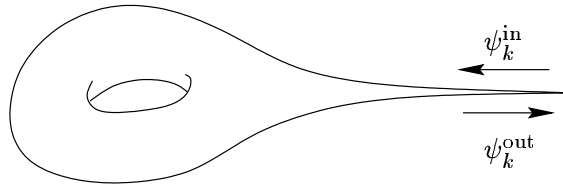


FIG. 4.9: Topologie du tore hyperbolique.

Faddeev & Pavlov (1972) donnent l'expression exacte pour le déphasage, (Gutzwiller 1983)

$$e^{i\delta(k)} = \pi^{-2ik} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + ik) \zeta(1 + 2ik)}{\Gamma(\frac{1}{2} - ik) \zeta(1 - 2ik)} \quad (4.78)$$

faisant intervenir la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. On peut trouver une généralisation à la diffusion en présence d'un champ magnétique constant dans (Antoine, Comtet & Ouvry 1990), (Antoine 1991) (*cf.* (Comtet 1987) pour le problème de Landau sur le plan hyperbolique).

Connaissant l'expression exacte du déphasage on peut obtenir le temps de Wigner, comme l'ont fait Wardlaw & Jaworski (1989) (*cf.* (Hurt 1997) pour une revue). Ces auteurs ont donné une représentation du temps de Wigner en termes de résonances ; ils ont montré que les énergies des résonances sont reliées aux zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (une conjecture de Riemann affirme que tous les zéros non triviaux de cette fonction se situent, dans le plan complexe de la variable s , sur l'axe $\text{Re } s = 1/2$). Désignons par $\frac{1}{2} - 2iw_\rho$ ces zéros, le temps de Wigner prend la forme :

$$2k \tau(k) = -\frac{1}{k^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \sum_{w_\rho > 0} \left(\frac{1}{(k + w_\rho)^2 + \frac{1}{4^2}} + \frac{1}{(k - w_\rho)^2 + \frac{1}{4^2}} \right). \quad (4.79)$$

Ce modèle possède donc la particularité de présenter des résonances d'égales largeurs $\Gamma_\rho = \frac{1}{2}$, quelles que soient leurs énergies.

Il est possible de séparer $\tau(k)$ en une partie régulière τ_{reg} , obtenue en dérivant les fonctions $\Gamma(\frac{1}{2} \pm ik)$, et une partie fluctuante τ_{fluc} . Si on s'intéresse à la distribution du temps de Wigner, la moyenne statistique doit être remplacée par une moyenne sur un intervalle d'énergie contenant suffisamment de résonances. Charles Schmit a constaté numériquement que la distribution de la partie fluctuante est gaussienne, à condition de se placer à suffisamment haute énergie. Les fluctuations sont de l'ordre de k^{-1} (voir ci-dessous). Ce résultat illustre que si la largeur des résonances est fixée, le temps de Wigner ne peut présenter que des fluctuations limitées. Les fluctuations importantes que nous avons mentionnées pour d'autres modèles, associées aux queues algébriques de la distribution du temps de Wigner, trouvent leur origine dans l'existence de résonances très étroites.

Il est également possible de s'intéresser à la fonction de corrélation $C(k, k') = \langle \tau(k) \tau(k') \rangle$. Shushin & Wardlaw (1992) ont exploité la représentation de $\tau(k)$ en termes des zéros de la fonction ζ , et une conjecture de Montgomery (1973) affirmant que la distribution des écarts

entre zéros de la fonctions ζ est donnée par la distribution des écarts de niveaux dans GUE ($\beta = 2$). Ces auteurs sont ainsi capables de reproduire le début de la fonction de corrélation. Pour étudier cette quantité, Charles Schmit a préféré utiliser la représentation de la fonction ζ :

$$\zeta(z) = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - p^{-z}} \quad (4.80)$$

où le produit porte sur les nombres premiers p . On montre alors que le temps de Wigner s'écrit :

$$\tau(k) = \tau_{\text{reg}}(k) - \frac{2}{k} \sum_{(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln p e^{-n \ln p} \cos(2k n \ln p) , \quad (4.81)$$

où la partie régulière est donnée par : $\tau_{\text{reg}}(k) = -\frac{\ln \pi}{k} + \frac{1}{2k} [\psi(\frac{1}{2} + ik) + \psi(\frac{1}{2} - ik)]$ (la fonction $\psi(z)$ est la fonction d'Euler, dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(z)$). On peut vérifier que $\tau_{\text{reg}}(k) \simeq \frac{1}{k} \ln \frac{k}{\pi}$ à haute énergie. Remarquons que cette représentation rappelle celle de la densité d'états des systèmes chaotiques, développée sur les orbites périodiques (formule de trace) ; les nombres premiers jouent ici le rôle "d'orbites périodiques" pour la fonction ζ .

En utilisant cette représentation pour la fonction de corrélation et en se plaçant dans l'approximation diagonale qui consiste à ne retenir que les termes $n = n'$ et $p = p'$ dans la moyenne du produit de sommes, on aboutit à l'expression de la fonction de corrélation (valable aux grandes énergies $k \gg 1$ et pour $|k - k'| \ll k$) :

$$C(k, k') = \frac{1}{4k^2} F(k - k') \quad (4.82)$$

où

$$F(\delta k) \simeq 8 \sum_{(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 p e^{-2n \ln p} \cos(2\delta k n \ln p) = 4 \sum_{(p)} \ln^2 p \frac{\cos(\delta k \ln p^2) - 1/p^2}{\text{ch}(\ln p^2) - \cos(\delta k \ln p^2)} . \quad (4.83)$$

En faisant abstraction de la dépendance triviale de la fonction de corrélation contenue dans le préfacteur, celle-ci ne dépend donc que de la différence $k - k'$ à haute énergie. Cette expression donne le second cumulatif du temps de Wigner : $\langle \langle \tau(k)^2 \rangle \rangle \simeq \frac{2}{k^2} \sum_{(p)} \frac{\ln^2 p}{p^2 - 1}$.

La fonction analogue obtenue en faisant l'hypothèse que les zéros sont distribués par GUE (Shushin & Wardlaw 1992) est :

$$F_{\text{GUE}}(\delta k) = 8 \frac{1 - 4\delta k^2}{(1 + 4\delta k^2)^2} . \quad (4.84)$$

Le résultat (4.83) de Charles Schmit reproduit remarquablement bien la fonction de corrélation obtenue numériquement comme on peut s'en convaincre à l'examen de la figure 4.10 (les deux courbes sont quasiment indiscernables à l'échelle de la figure). Sur cette figure, on compare le résultat numérique² obtenu pour $k = 100000$ avec les expressions théoriques (4.83, 4.84). La figure montre en particulier que GUE ne donne qu'une description assez grossière des corrélations entre zéros de la fonction ζ .

²La fonction de corrélation a été calculée numériquement pour différentes énergies $k = 1000$, $k = 10000$ et $k = 100000$; les différents résultats se superposent, ce qui montre que le régime de haute énergie est atteint.

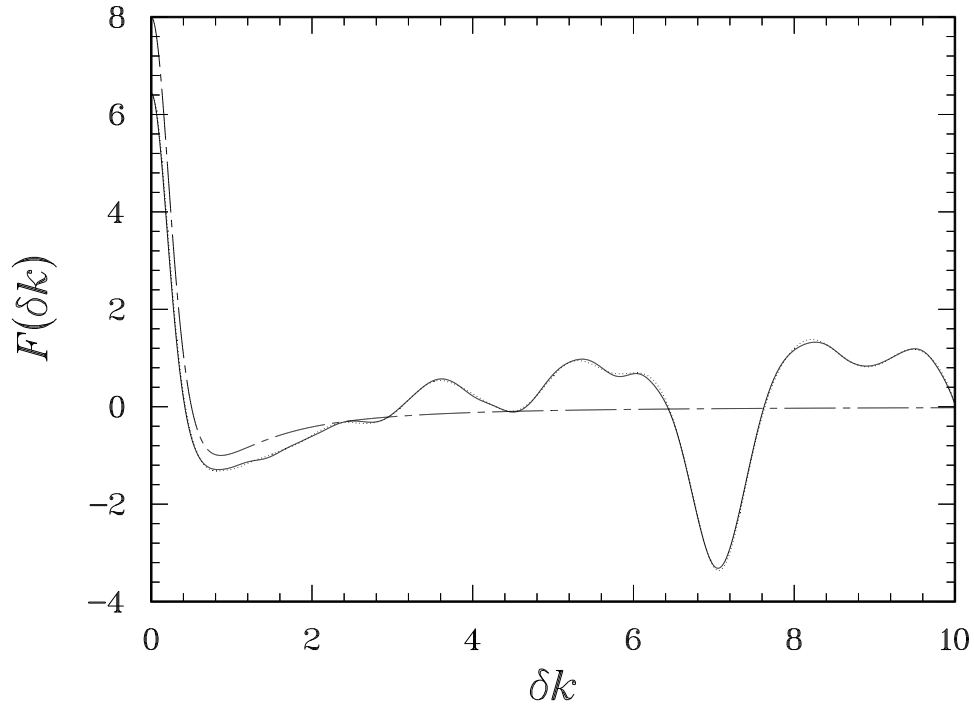


FIG. 4.10: Fonction de corrélation du temps de Wigner pour le tore hyperbolique. Ligne continue : calcul numérique ($k = 100000$). Ligne pointillée : expression analytique de Charles Schmit (4.83). Tirés : résultat de Sushin et Wardlaw prévu par GUE (4.84).

4.4.1.β Moments du temps de Wigner : un argument heuristique.

Dans le cadre du modèle d'impuretés δ on doit s'attendre à observer un profil de résonances si on étudie le temps de Wigner en fonction de l'énergie pour une configuration particulière du désordre. La largeur des résonances fournit une indication sur la durée de vie des états quasi-stationnaires. De telles résonances sont appelées résonances d'Azbel, qui a mis en évidence des pics très étroits dans la résistance d'un milieu désordonné unidimensionnel (Azbel 1983). Cette idée avait déjà été formulée dans le cadre de la transmission d'une onde électromagnétique dans un milieu désordonné (Frisch *et al.* 1973).

Pour illustrer l'existence de ces résonances on a tracé $\tau(E)$ pour une configuration particulière du désordre sur la figure 4.11. Les différentes parties de la figure correspondent à des tailles du système différentes, toutes choses égales par ailleurs (de haut en bas : $L \simeq 0.12\lambda$, 0.3λ , 0.6λ). Déjà pour un rapport $L/\lambda \simeq 0.6$, on constate l'apparition de pics extrêmement fins qu'on associe à l'existence d'états à très grande durée de vie (le pic le plus haut en $k \simeq 10.00025$ est étêté sur la figure du bas, il monte en réalité jusqu'à $\tau \simeq 1.4 \cdot 10^5$).

Bien qu'on soit dans un régime de haute énergie, c'est-à-dire que les états sont fortement délocalisés à l'échelle de $1/\rho$ ou $1/k$, ils restent localisés à l'échelle de la taille du système $L \gg \lambda$. Il existe donc nécessairement des états localisés loin du bord de la région désordonnée $x = L$ qui sont caractérisés par une très grande durée de vie. Ces états sont responsables de l'apparition de pics de résonances extrêmement étroits qui produiront des valeurs du temps de Wigner très élevées.

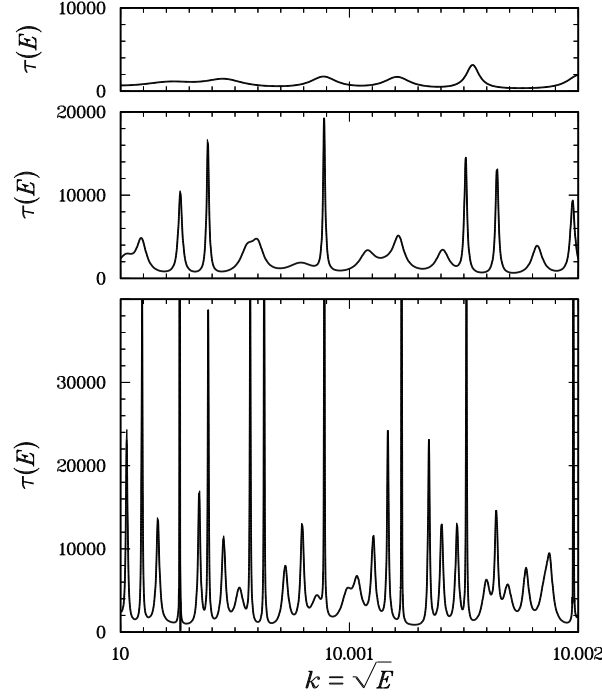


FIG. 4.11: Temps de Wigner pour une configuration du désordre. $v = 0.1$, $\rho = 1$, $k = 10$ ($\lambda \simeq 80000$). Figure du haut : $N = 10000$ impuretés ($L \simeq 0.12\lambda$). Figure du milieu : $N = 25000$ impuretés ($L \simeq 0.3\lambda$). Figure du bas : $N = 50000$ ($L \simeq 0.6\lambda$).

On peut utiliser un argument heuristique exploitant cette image pour calculer les moments du temps de Wigner. Cherchons à obtenir le comportement dominant des moments. D'après la représentation (4.75), les grandes contributions aux moments émergent lorsque l'énergie E coïncide avec l'énergie d'une résonance. Considérons un état $\psi_k(x)$ (normalisé) du système infini localisé autour de x_0 . Si maintenant le système a une taille L finie, le couplage au continuum, lui confère une durée de vie finie. Celle-ci peut être estimée comme étant proportionnelle à la probabilité de présence dans l'intervalle $[L, \infty[$: $\Gamma \propto |\psi_k(L)|^2 \sim e^{-2\gamma_L \Lambda_0}$, où $\Lambda_0 \equiv L - x_0$ est la distance entre le bord et le point de localisation x_0 , et γ_L l'exposant de Lyapunov du système de taille finie ($\gamma \equiv \gamma_{L \rightarrow \infty}$). On prendra $\Gamma \simeq k\gamma_L e^{-2\gamma_L \Lambda_0}$ où le préfacteur donne la

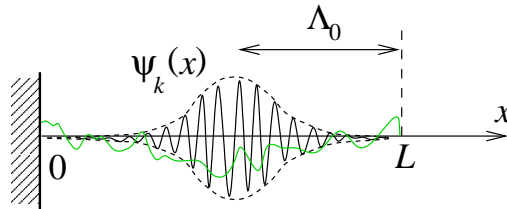


FIG. 4.12:

fréquence avec laquelle l'électron dans l'état localisé atteint le bord $x = L$. Soit Δ l'écart moyen entre niveaux du système de taille finie (l'écart moyen entre les pics), c'est-à-dire l'inverse de la densité d'états $\langle \rho_L(E) \rangle = L \langle \rho(E) \rangle = \frac{1}{\Delta}$. La probabilité pour qu'une énergie E se trouve dans un

pic de résonance ($E \in [E_\alpha - \Gamma_\alpha/2, E_\alpha + \Gamma_\alpha/2]$) est $\frac{\Gamma}{\Delta}$; bien que cette probabilité soit très petite (car $\Gamma \ll \Delta$), la contribution apportée dans ce cas aux moments de τ est exponentiellement grande avec L : $\tau \sim \frac{1}{\Gamma} \sim e^{2\gamma_L \Lambda_0}$, et domine l'évaluation des moments. À plusieurs reprises on a abordé la question des fluctuations de la longueur de localisation pour différents modèles et on a montré qu'à haute énergie les fluctuations de γ_L pour un système de taille finie se comportent comme $1/\sqrt{L}$, c'est-à-dire que les fluctuations de $\gamma_L \Lambda_0$, apparaissant dans l'exponentielle, sont d'ordre \sqrt{L} ; il est donc crucial de prendre en compte de telles fluctuations (celles-ci ne sont pas prises en compte par Sornette qui s'intéresse à la distribution de la largeur des résonances dans (Sornette 1987)). Le n ième moment du temps de Wigner est calculé en pondérant la contribution de la résonance $\tau^n \sim \frac{1}{\Gamma^n}$ par la probabilité de tomber sur le pic $\frac{\Gamma}{\Delta}$, la probabilité $d\gamma_L p(\gamma_L)$ pour que l'exposant de Lyapunov soit dans l'intervalle $[\gamma_L, \gamma_L + d\gamma_L]$, et la probabilité $\frac{d\Lambda_0}{L}$ pour que le pic de localisation soit distant de Λ_0 du bord, en supposant que Λ_0 est uniformément distribué dans $[0, L]$ et décorrélé de γ_L :

$$\langle \tau^n \rangle \sim \int_0^L \frac{d\Lambda_0}{L} \int d\gamma_L p(\gamma_L) \frac{\Gamma}{\Delta} \frac{1}{\Gamma^n} . \quad (4.85)$$

Pour $n = 1$ on retrouve $\langle \tau \rangle = \frac{2\pi}{\Delta}$ au facteur 2π près, et pour $n > 1$:

$$\langle \tau^n \rangle \sim \frac{L^{n-1}}{2 \Delta k^{n-1} (n-1)} \int d\xi P(\xi; L) \frac{e^{2(n-1)\xi}}{\xi^n} \quad (4.86)$$

où, d'après la définition de γ_L , on a identifié $\gamma_L L$ avec la variable $\xi(L)$. Cette dernière possède des propriétés statistiques universelles pour les systèmes unidimensionnels à haute énergie (Antsygina *et al.* 1981). À haute énergie, sa distribution est donnée par (2.37). On ne s'intéresse qu'au comportement dominant de l'expression précédente :

$$\langle \tau^n \rangle \sim \frac{1}{4\pi(n-1)^{n+1}} \left(\frac{\lambda}{2k} \right)^n e^{2n(n-1)L/\lambda} . \quad (4.87)$$

Il est remarquable que cet argument reproduise précisément le comportement dominant des moments du temps de Wigner dérivés rigoureusement dans (Monthus & Comtet 1994), et que nous avons rappelé dans le chapitre 2 (*cf.* équation (2.71)). Nous obtenons confirmation de l'image physique introduite au début du paragraphe : de tels comportements des moments du temps de Wigner, responsables de l'existence de la distribution large, sont dus à la possibilité de piégeage de l'électron dans des états localisés au sein du système. Un tel évènement se produit lorsque l'énergie de l'onde s'accorde avec l'énergie d'une résonance. Bien qu'extrêmement peu probables ces évènements dominent l'évaluation des moments.

L'argument peut être utilisé pour trouver la queue de la distribution, ce qui conduit à

$$P(\tau; L) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \frac{L^{3/2} e^{-\gamma L/2}}{\tau^{3/2} \ln^2 \tau} \exp - \frac{1}{8\gamma L} \ln^2 \tau , \quad (4.88)$$

qui présente une queue log-normale similaire à celle trouvée au chapitre 2.

4.4.2 Distribution du temps de Wigner

Régime localisé

La première motivation de l'étude du modèle d'impuretés δ était de tester numériquement l'expression analytique de la distribution du temps de Wigner. On a obtenu l'expression

$$P(\tau) = \frac{\lambda}{2k\tau^2} e^{-\frac{\lambda}{2k\tau}} \quad (4.89)$$

pour différents modèles.

La première étape consiste à se placer dans le régime où le modèle d'impuretés δ est équivalent au modèle gaussien : $v \ll k \ll \rho$. On choisit les paramètres pour se trouver dans un régime de haute énergie du point de vue du modèle gaussien : $k^2 - \rho v \gg (\rho v^2)^{2/3}$. La densité d'états et l'exposant de Lyapunov sont donnés dans ce régime par :

$$N(E) = \frac{\sqrt{k^2 - \rho v}}{\pi} \quad (4.90)$$

$$\gamma(E) = \frac{\rho v^2}{8(k^2 - \rho v)} \quad (4.91)$$

Il faut également utiliser la correspondance dans (4.89) : utiliser pour λ l'expression précédente et remplacer k par $\sqrt{k^2 - \rho v}$. On a alors vérifié que la loi reproduit bien les résultats numériques.

La deuxième étape est de vérifier que la loi est robuste pour le régime de haute énergie pour les impuretés δ . Plaçons nous dans un régime $\rho, v \ll k$.

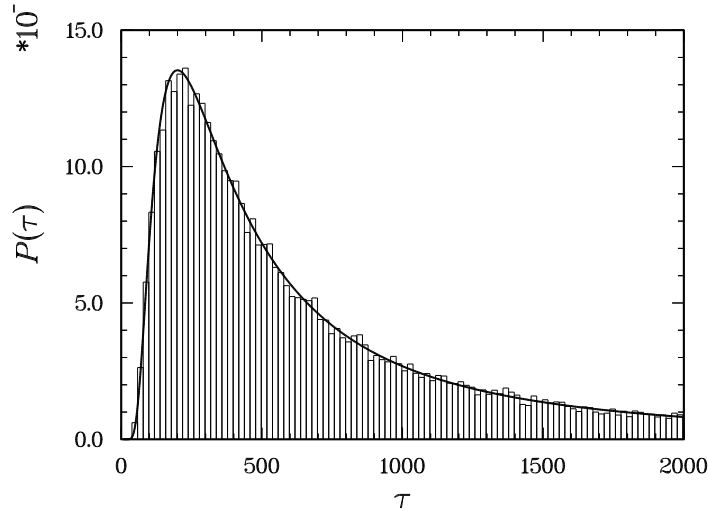


FIG. 4.13: Distribution du temps de Wigner dans le régime de haute énergie $\rho \ll v \ll k$. $k = 10$, $\rho = 0.1$ et $v = 1$. Le calcul est réalisé en considérant $N = 100000$ impuretés avec une statistique de $n_s = 50000$ valeurs. $\lambda = 8000$, on a donc $L/\lambda = 125$. Comparaison avec l'expression (4.89).

Afin de vérifier que la queue de la distribution se comporte bien asymptotiquement comme une loi de puissance $P(\tau) \simeq \frac{\lambda}{2k\tau^2}$, il est commode de considérer la distribution intégrée :

$$I(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} d\tau' P(\tau') \quad (4.92)$$

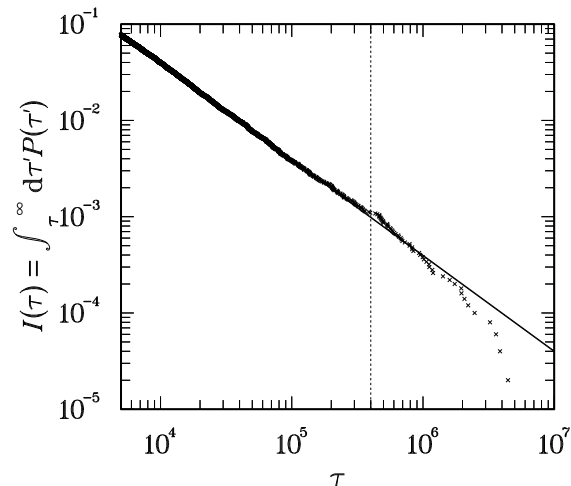


FIG. 4.14: Queue de la fonction $I(\tau)$ dans le régime de haute énergie $\rho \ll v \ll k$. $k = 10$, $\rho = 0.1$, $v = 1$, $N = 100000$ impuretés et $n_s = 50000$ valeurs. Comparaison avec l'expression (4.93).

d'après (4.89), elle s'exprime comme

$$I(\tau) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2k\tau}} ; \quad (4.93)$$

son comportement à grand temps est : $I(\tau) \simeq \frac{\lambda}{2k\tau}$. Considérer cette fonction offre un léger avantage puisqu'elle est obtenue à partir des résultats numériques en classant les données par ordre croissant et en les décomptant.

Sur la figure 4.14 on compare la queue de la queue algébrique de $I(\tau)$ à l'expression théorique. On constate l'excellent accord jusque vers $\tau \simeq 4 \cdot 10^5$, soit 2000 fois la valeur typique ($\tau_{\text{typ}} = \frac{\lambda}{4k} = 200$). Seul un millième des données se répartissent au-delà de cette valeur d'où l'apparition de fluctuations dans la courbe $I(\tau)$ construite à partir des résultats numériques ($\tau \simeq 4 \cdot 10^5$ apparaît comme une limite du calcul numérique pour $n_s = 50000$).

L'argument heuristique a montré que les événements produisant des temps exponentiellement grand avec la taille du système correspondent au piégeage de l'électron dans un état localisé au sein de la région désordonnée. On peut penser que la queue algébrique de la distribution limite est une réminiscence de ce mécanisme.

Et à basse énergie ?

Le modèle d'impuretés δ offre l'avantage de permettre de trouver la distribution du temps de Wigner dans un régime de basse énergie, celui pour lequel la densité d'impuretés est faible.

On a montré dans un paragraphe précédent que dans la limite $k \ll \rho \ll v$ les phases θ^+ et θ^- restent très petites. On peut alors avantageusement remplacer l'équation (4.18) par :

$$\frac{Z_i^+}{(\theta_i^+)^2} - \frac{Z_i^-}{(\theta_i^-)^2} = \frac{2v}{k^2} \quad (4.94)$$

En introduisant la notation $Z_i \equiv Z_i^-$ on a donc :

$$Z_{i+1} = 2l_i + \left(\frac{\theta_i^+}{\theta_i^-}\right)^2 Z_i + \frac{2v}{k^2} (\theta_i^+)^2 . \quad (4.95)$$

Si on introduit la variable $\omega \equiv \theta^+/\theta^-$ on peut constater, en utilisant la distribution de θ^- , que sa distribution est piquée autour d'une valeur typique $\omega_{\text{typ}} \simeq \frac{\rho}{2v} \ll 1$ et qu'elle s'annule rapidement pour $\omega > 0.5$. Ceci permet de penser que le second terme (4.95) reste négligeable. Le dernier

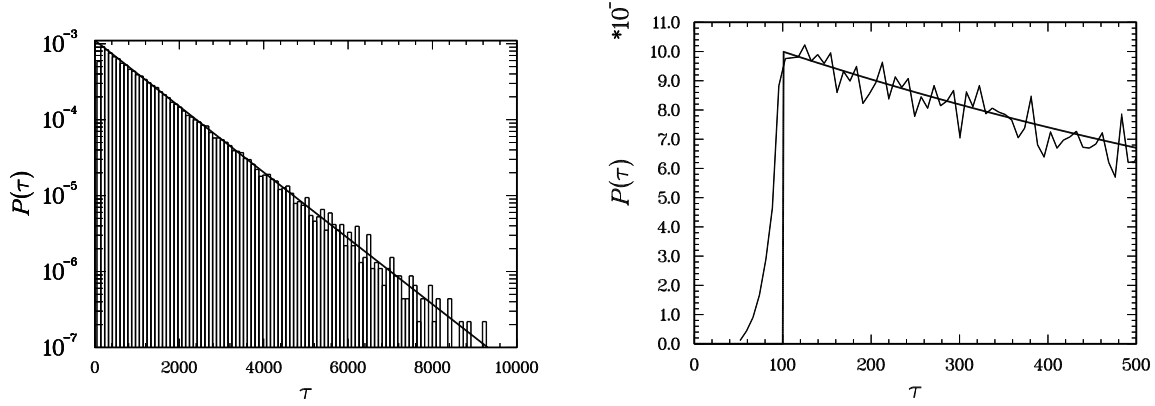


FIG. 4.15: Distribution du temps de Wigner dans le régime de basse énergie $k \ll \rho \ll v$. $k = 0.01$, $\rho = 0.1$ et $v = 1$. Le calcul est réalisé avec $N = 1000$ impuretés avec une statistique de 50000 valeurs. Comparaison avec l'expression (4.96).

terme est lui d'ordre $\frac{2v}{k^2}(\theta_i^+)^2 \sim \frac{2}{v}$. Le terme dominant du membre de droite est donc $2l_i$ ce qui montre que la distribution de Z est essentiellement une poissonnienne. Le dernier terme crée un trou à l'origine de la distribution, de taille typique $2/v$. Ces arguments élémentaires montrent que la distribution de Z est donnée dans ce régime avec une bonne approximation par :

$$P(Z) \simeq \frac{\rho}{2} \mathbf{Y} \left(Z - \frac{2}{v} \right) e^{-\frac{\rho}{2} \left(Z - \frac{2}{v} \right)}. \quad (4.96)$$

À basse énergie, on observe, comme on pouvait s'y attendre une perte d'universalité pour la distribution du temps de Wigner : la queue algébrique est remplacée par une queue exponentielle.

Sur la figure 4.15 on a tracé en échelle semi log le résultat numérique comparé à (4.96) pour vérifier le comportement exponentiel de la distribution.

Nous n'avons été capable de donner des arguments analytiques pour caractériser la distribution de τ à basse énergie que dans la limite de faible densité d'impuretés $k \ll \rho \ll v$.

Dans l'autre régime de basse énergie $k \ll v \ll \rho$ on observe également une suppression de la queue algébrique qui est remplacée par une décroissance exponentielle mais la distribution possède une allure plus complexe à l'origine. Sur la figure 4.16 on a tracé la distribution du temps de Wigner dans un régime d'énergie intermédiaire pour lequel $\rho v - k^2 \simeq (\rho v^2)^{2/3}$. Bien qu'on s'éloigne très notablement de l'expression (4.89) (comparer les figures 4.13 et 4.16, toutes les deux tracées sur un intervalle $[0, 10\tau_{\text{typ}}]$), On constate que la queue en $1/\tau^2$ est encore présente dans la distribution. En revanche, à plus basse énergie, on observe la suppression de la queue algébrique (*cf.* figure 4.17 pour laquelle $\rho v - k^2 \simeq 2(\rho v^2)^{2/3}$).

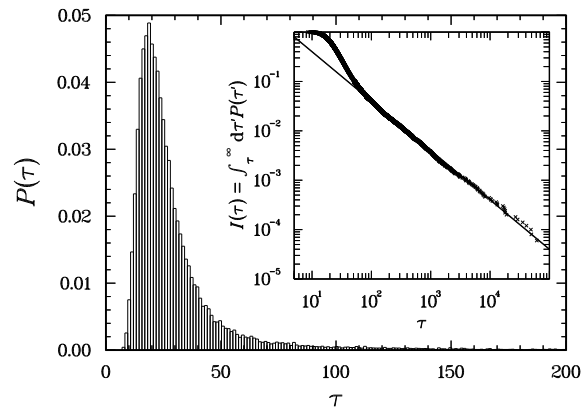


FIG. 4.16: Distribution du temps de Wigner dans le régime de basse énergie $\rho v - k^2 \simeq (\rho v^2)^{2/3}$. $k = 0.232$, $\rho = 1$ et $v = 0.1$. Le calcul est réalisé avec $N = 1000$ impuretés pour une statistique de $n_s = 50000$ valeurs. La droite sert de guide ($\propto 1/\tau$).

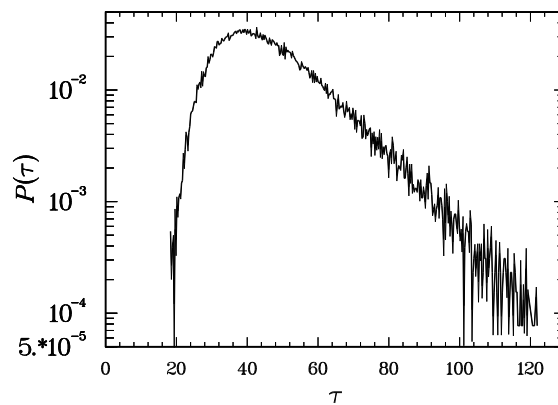


FIG. 4.17: Distribution du temps de Wigner dans le régime de basse énergie $\rho v - k^2 \simeq 2(\rho v^2)^{2/3}$. $k \ll v \ll \rho$: $k = 0.008$, $\rho = 1$ et $v = 0.1$. Le calcul est réalisé avec $N = 1000$ impuretés pour une statistique de $n_s = 50000$ valeurs.

Régime balistique : $k^{-1} \ll L \ll \lambda$

On vérifie numériquement les assertions faites dans le cadre du modèle gaussien, en nous plaçant dans un régime où les deux modèles sont équivalents ($v \ll k \ll \rho$). Choisissons $v = 0.001$, $k = 1$ et $\rho = 100$. Du point de vue du modèle gaussien il s'agit d'un régime de haute énergie, *i.e.* l'inégalité $k^2 - \rho v \gg (\rho v^2)^{2/3}$ est vérifiée. Dans ce régime la longueur de localisation est donnée par $\lambda = \frac{8(k^2 - \rho v)}{\rho v^2}$, c'est-à-dire pour le choix des paramètres $\lambda = 7.210^4$ (cette longueur correspond à $\Lambda = 7.2 \cdot 10^6$ impuretés). On fait varier la taille du système de 5 (500 impuretés) à 10000 (10^6 impuretés) pour étudier les propriétés statistiques du temps de Wigner. Numériquement on trouve pour les deux premiers cumulants (avec une statistique de $n_s = 10000$ données) :

L	$\langle \tau \rangle$	$\langle \langle \tau^2 \rangle \rangle$
5	5.004	$2.079 \cdot 10^{-3}$
10	11.100	$2.182 \cdot 10^{-2}$
40	44.123	1.455
70	76.226	7.718
100	107.08	21.235
200	202.00	150.75
500	555.57	$2.9114 \cdot 10^3$
1000	$1.1102 \cdot 10^3$	$2.3080 \cdot 10^4$
2000	$2.2037 \cdot 10^3$	$1.9164 \cdot 10^5$
5000	$5.4593 \cdot 10^3$	$2.9741 \cdot 10^6$
10000	$1.0565 \cdot 10^4$	$2.5179 \cdot 10^7$

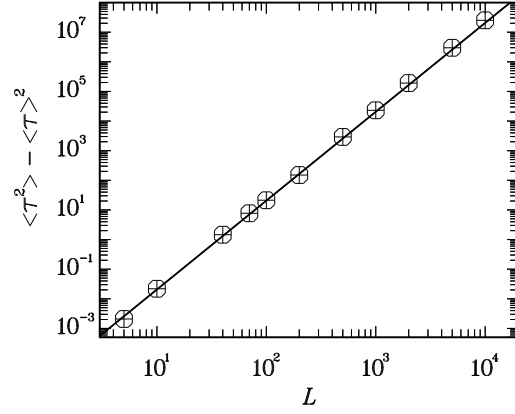


FIG.: Second cumulant du temps de Wigner dans le régime balistique. Comparaison avec l'expression (4.97) pour $v = 0.001$, $k = 1$ et $\rho = 100$.

On peut vérifier que le premier moment est donné par $\frac{L}{\sqrt{k^2 - \rho v}}$ et que le second cumulant est bien donné par la relation (2.82) trouvée pour le modèle gaussien :

$$\langle \langle \tau(L, k)^2 \rangle \rangle = \frac{\rho v^2}{6(k^2 - \rho v)^2} L^3. \quad (4.97)$$

Insistons sur le fait qu'il n'y a aucun paramètre d'ajustement pour la figure précédente. Le comportement est bien en L^3 et le préfacteur est donné par (4.97), et ceci sur plusieurs ordres de grandeur.

On vérifie numériquement que la distribution de τ est bien gaussienne comme il avait été prédit (*cf.* partie gauche de la figure 4.18), bien qu'il existe un léger désaccord quant à la prédiction de la valeur moyenne.

En revanche, lorsque le rapport L/λ s'approche de 1, la distribution commence à se déformer de manière asymétrique, ce dont on trouve une illustration sur la partie droite de la figure 4.18.

L'origine physique de la distribution gaussienne est très différente de celle du régime localisé. La petite taille du système interdit l'existence d'états localisés à grande durée de vie. La valeur moyenne correspond au temps nécessaire à une particule de vitesse $v_k = 2k$ pour faire l'aller-retour dans la région désordonnée de longueur L . Sans mécanisme de piégeage dans des états à longue durée de vie, le désordre n'occasionne que de faibles fluctuations relatives autour du temps moyen.

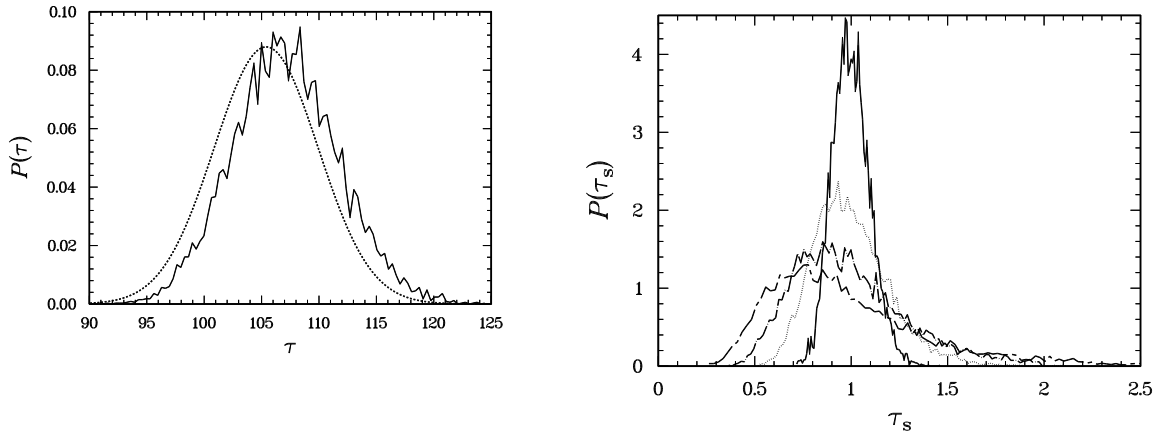


FIG. 4.18: Distribution du temps de Wigner dans le régime balistique $L \ll \lambda$. $k = 1$, $\rho = 100$ et $v = 0.001$. Statistique de $n_s = 10000$ valeurs. Figure de gauche : $L/\lambda \simeq 1.4 \cdot 10^{-3}$. Comparaison avec la distribution prévue analytiquement. Figure de droite : distribution de la variable $\tau_s \equiv \tau / \langle \tau \rangle$ pour L/λ prenant les valeurs (de haut en bas) : 0.007 ($N = 5 \cdot 10^4$ impuretés), 0.014, 0.028, 0.07 et 0.14 ($N = 10^6$ impuretés).

Annexe a : Fonction de corrélation de la phase

Donnons quelques résultats numériques concernant la fonction de corrélation de la phase pour le modèle gaussien. Dans ce but, on considère le modèle d'impuretés δ dans un régime $v \ll k \ll \rho$ pour lequel il est équivalent au modèle gaussien. On aura avantage à exploiter cette équivalence entre les deux modèles pour un désordre de type B, pour lequel les impuretés sont sur les sites d'un réseau, ce qui donne un sens à la fonction de corrélation

$$C_{\theta\theta}(i, j) = \langle \langle \sin^2 \theta_i^- \sin^2 \theta_j^- \rangle \rangle . \quad (4.98)$$

Pour l'étude numérique, on choisit un pas du réseau d'impuretés correspondant à $\rho = 10$ et un potentiel moyen $v = 0.01$. On fait varier l'énergie de $k = 0.3464$ à $k = 0.5$, ce qui correspond à faire varier $k^2 - \rho v$ de $2\sigma^{2/3}$ à $15\sigma^{2/3}$ (rappelons que $\sigma = \rho \langle v_n^2 \rangle = \rho v^2$). Les résultats numériques montrent que la fonction de corrélation est bien décrite par l'expression :

$$C_{\theta\theta}(i, j) = C_0 \cos \frac{|i - j|}{\tilde{T}} e^{-|i - j|/\tilde{\Lambda}} \quad (4.99)$$

à condition de se placer dans un régime stationnaire obtenu pour $i, j > \tilde{\Lambda}$. Le coefficient C_0 est donné par la distribution stationnaire de la phase : $C_0 = \langle \sin^4 \theta \rangle - \langle \sin^2 \theta \rangle^2$. Le paramètre $\tilde{\Lambda}$ est proportionnel à la longueur de localisation en unité de pas du réseau $\Lambda \equiv \rho \lambda$. \tilde{T}^{-1} est proportionnel au paramètre $k_{\text{eff}} = \sqrt{k^2 - \rho v}$ qui représente la racine de l'énergie lorsqu'on extrait la valeur moyenne du potentiel ρv .

k	Λ	$\tilde{\Lambda}$	\tilde{T}
0.3464	1642	290 ± 10	34.25
0.3742	3166	520 ± 20	24.85
0.4000	4794	760 ± 20	20.32
0.4243	6277	1030 ± 20	17.63
0.4472	7937	1275 ± 25	15.805
0.4740	9833	1625 ± 25	14.149
0.5000	11834	1975 ± 25	12.908

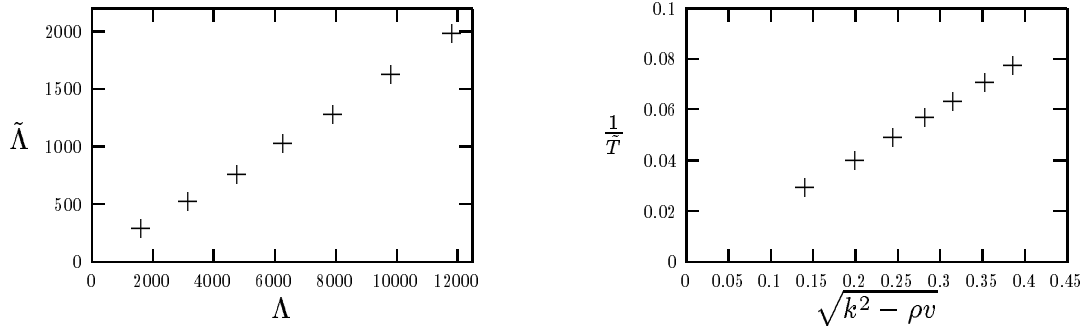


FIG. 4.19:

Ce résultat numérique confirme donc l'argument développé dans le chapitre 2 qui montrait que la phase se décorrèle et atteint sa distribution stationnaire sur une distance typique de l'ordre de la longueur de localisation.

Annexe b : Le potentiel périodique

Le calcul de la densité d'états et de l'exposant de Lyapunov nous fournit l'occasion d'introduire la technique des matrices de transfert qui nous réservera dans le dernier chapitre. Si on considère un potentiel défini sur $[x_1, x_2]$ et nul ailleurs, on pourra écrire la fonction d'onde d'énergie k^2 dans la région de potentiel nul :

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= A e^{ik(x-x_1)} + B e^{-ik(x-x_1)} & \text{pour } x \leq x_1 \\ \psi_k(x) &= A' e^{ik(x-x_2)} + B' e^{-ik(x-x_2)} & \text{pour } x \geq x_2 \end{aligned} \quad (4.100)$$

La matrice de transfert pour la région comprise entre x_1 et x_2 relie les amplitudes de part et d'autre de la région concernée :

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = M(x_2, x_1) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (4.101)$$

Par exemple, la matrice de transfert d'un intervalle vide, de longueur a et pour une énergie $E = k^2$, est donnée par :

$$M_0(a) = \begin{pmatrix} e^{ika} & 0 \\ 0 & e^{-ika} \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

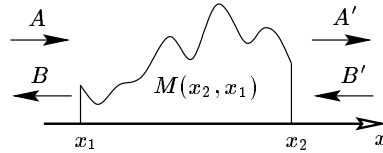


FIG. 4.20:

et pour un potentiel $v\delta(x - x_0)$ par :

$$M_\delta(v) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{iv}{2k} & -\frac{iv}{2k} \\ \frac{iv}{2k} & 1 + \frac{iv}{2k} \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

Lorsqu'on traverse différentes régions, chacune caractérisée par une matrice de transfert, il suffit de multiplier ces dernières entre elles pour obtenir la matrice de transfert totale, d'où l'intérêt du formalisme.

Lorsqu'on considère un réseau d'impuretés δ , de pas $a \equiv 1/\rho$, la fonction d'onde dans l'intervalle $[na, (n+1)a[$ peut s'écrire :

$$\psi_k(x) = A_n e^{ik(x-na)} + B_n e^{-ik(x-na)}. \quad (4.104)$$

Les amplitudes dans les différents intervalles sont reliées entre elles par la matrice de transfert $M \stackrel{\text{def}}{=} M_0(a) \times M_\delta(v)$:

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}. \quad (4.105)$$

Diagonalisons la matrice M . L'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$z^2 - 2bz + 1 = 0. \quad (4.106)$$

où l'on a posé $b \equiv \cos ka + \frac{v}{2k} \sin ka$. Remarquons que le produit des deux valeurs propres est égal à 1. Selon les valeurs de l'énergie il y a deux possibilités.

Dans le premier cas, $|b| < 1$. Le discriminant de l'équation est négatif et les deux valeurs propres sont complexes et de module 1 : $z_\pm = b \pm i\sqrt{1-b^2}$. On peut donc écrire les valeurs propres comme : $z_\pm = e^{\pm ipa}$ où p est un paramètre appartenant à l'intervalle $[0, \pi/a]$. Il est préférable de choisir $[-\pi/a, \pi/a]$ comme intervalle de définition de p , ainsi e^{ipa} donne z_+ lorsque $p > 0$ et z_- lorsque $p < 0$. D'après la construction des états propres, on constate que e^{ipa} est la valeur propre de l'opérateur de translation d'un pas du réseau associée à la fonction d'onde $\psi_k(x)$. p est donc le paramètre de Bloch. La relation $z_\pm = e^{ipa}$ entre le paramètre de Bloch et l'énergie k^2 conduit à la relation de dispersion :

$$|p| = \rho \arccos \left(\cos \frac{k}{\rho} + \frac{v}{2k} \sin \frac{k}{\rho} \right) \quad (4.107)$$

Posons $\chi(E) = \arccos(b)$; les domaines d'énergie où $|b| \leq 1$ définissent les bandes d'états, et les autres régions, où $|b| > 1$, les bandes interdites. La densité d'états s'écrit $\rho(E) = \frac{1}{L} \sum_{ZdB} \delta(E - E(p))$ (la somme porte sur la zone de Brillouin). Il est facile de voir que la densité d'états s'exprime comme : $\rho(E) = \frac{\rho}{\pi} \left| \frac{d\chi(E)}{dE} \right|$ (car $p = \rho\chi(E)$ est la fonction inverse de $E = E(p)$). On obtient donc facilement la densité d'états intégrée : dans la première bande $N(E) = \frac{\rho}{\pi} \chi(E)$,

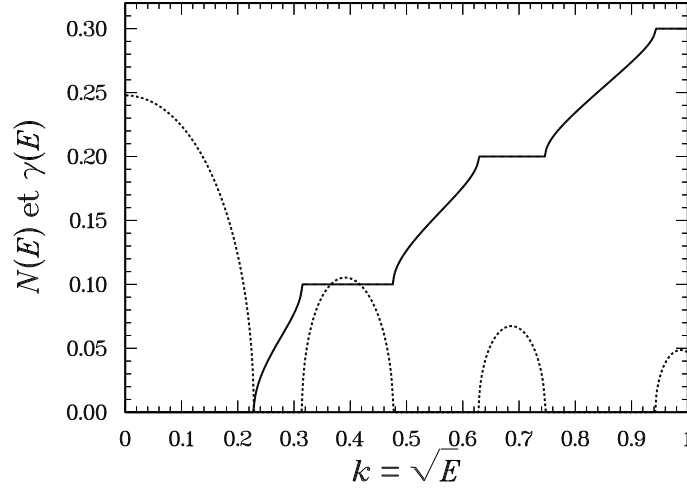


FIG. 4.21: Densité d'états intégrée et exposant de Lyapunov (tirés) pour le potentiel périodique avec $v = 1$ et $\rho = 0.1$.

dans la deuxième $N(E) = 2\rho - \frac{\rho}{\pi}\chi(E)$, dans la troisième $N(E) = 2\rho + \frac{\rho}{\pi}\chi(E)$ et ainsi de suite. Chaque bande contient donc ρ états par unité de longueur. Dans les bandes pleines les états propres sont les fonctions de Bloch étendues car $|z_{\pm}| = 1$. L'exposant de Lyapunov est donc nul.

Dans les bandes interdites on a $|b| > 1$ et les deux valeurs propres sont réelles. Si on introduit la paramétrisation $|b| = \text{ch}(\gamma a)$, les deux valeurs propres s'écrivent $z_{\pm} = e^{\pm\gamma a}$. Partant d'amplitudes données (A_0, B_0) , on constate qu'après n intervalles l'évolution des amplitudes est dominée par la plus grande valeur propre :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} e^{n\gamma a} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+^* & y_+^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad (4.108)$$

où (x_+, y_+) est le vecteur propre (normalisé) de M associé à la valeur propre z_+ . γ s'identifie donc à l'exposant de Lyapunov :

$$\gamma(E) = \rho \operatorname{argch} \left| \cos \frac{k}{\rho} + \frac{v}{2k} \sin \frac{k}{\rho} \right| \quad (4.109)$$

non nul dans les régions vide d'états.

Lorsqu'on introduit du désordre tout en gardant la structure périodique (désordre de type B ou C), le spectre garde encore la trace des bandes interdites du cas pur : comme on le constate sur les figures 4.22 et 4.23, le haut de chaque bande d'états et le bas de chaque bande interdite ne semblent pas affectés par la présence du désordre. L'interprétation physique est la suivante : cette région du spectre ($k = n\rho\pi$ pour $n \in \mathbb{N}$) correspond à des états qui s'annulent sur chaque impureté du réseau, ce qui explique pourquoi ils sont insensibles à l'introduction du désordre dans les poids des impuretés. Ce résultat peut être retrouvé à l'aide du formalisme des matrices de transfert. Remarquons que la matrice de transfert pour les impuretés δ obéit à la loi de composition $M_{\delta}(v) \times M_{\delta}(v') = M_{\delta}(v + v')$; le sens physique de cette expression

est limpide : deux impuretés δ côte à côte sont équivalentes à une impureté dont le poids est donné par la somme des poids. À $k = n\pi\rho$, la matrice $M_0(a) = (-1)^n$ commute avec toutes les matrices de transfert d'impuretés, et la matrice de transfert totale du système est, au signe près, $M_\delta(v_1) \times \cdots \times M_\delta(v_n) = M_\delta\left(\sum_{n=1}^N v_n\right)$. On peut vérifier que cette dernière possède une valeur propre dégénérée $\lambda = 1$, ce qui montre que l'exposant de Lyapunov est nul et que la phase tourne d'un multiple entier de π , comme dans le cas non désordonné : $\gamma(k = n\pi\rho) = 0$ et $N(k = n\pi\rho) = n\rho$.

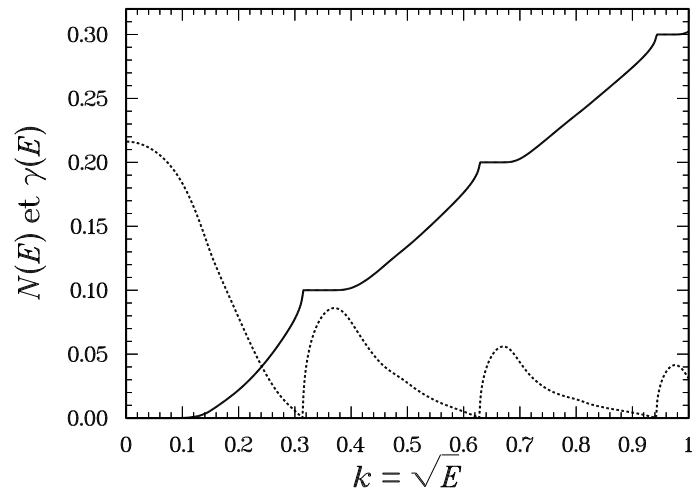


FIG. 4.22: Densité d'états intégrée et exposant de Lyapunov (tirés) pour le modèle d'impuretés δ avec désordre B. $v = 1$ et $\rho = 0.1$. Calcul réalisé avec 10^6 impuretés.

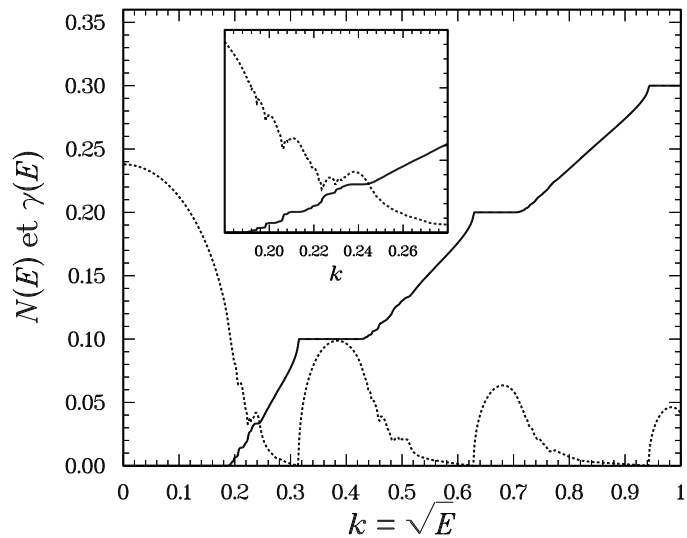


FIG. 4.23: Densité d'états intégrée et exposant de Lyapunov (tirés) pour le modèle d'impuretés δ avec désordre C. $v = 1.5$, $v' = 0.5$, $p = 0.5$ et $\rho = 0.1$. Calcul réalisé avec 10^6 impuretés. Pour un discussion détaillée sur l'alliage binaire, cf. (Luck 1992).

Chapitre 5

Représentations fonctionnelles pour le temps de Wigner

5.1 Approximation semi-classique

Dans le domaine semi-classique, on peut trouver une représentation fonctionnelle donnant le temps de Wigner. Si on se place à haute énergie (de telle sorte que $k^2 > V(x)$ partout) la fonction d'onde est donnée dans l'approximation WKB par :

$$\psi_k(x) \simeq \frac{2}{[k^2 - V(x)]^{1/4}} \cos \left(\int_0^x dx' \sqrt{k^2 - V(x')} - \frac{\pi}{2} \right) . \quad (5.1)$$

Cette expression conduit à la formule semi-classique du déphasage :

$$\delta(k) \simeq 2 \int_0^L dx \sqrt{k^2 - V(x)} + \pi , \quad (5.2)$$

qui permet d'exprimer le temps de Wigner comme :

$$\tau_{\text{WKB}}(k) \simeq \int_0^L dx \frac{1}{\sqrt{k^2 - V(x)}} \simeq \frac{L}{k} + \frac{1}{2k^3} \int_0^L dx V(x) + \dots . \quad (5.3)$$

Le temps de Wigner croît dans les régions où $V(x) > 0$, *i.e.* des régions dans lesquelles la vitesse de la particule diminue, et diminue lorsque $V(x) < 0$, ce qui accélère localement la particule. Ces formules sont valides dans la limite WKB, c'est-à-dire lorsque le potentiel et l'énergie sont tels que la condition $|\frac{d}{dx} p(x)^{-1}| \ll 1$ est respectée, où $p(x) = \sqrt{k^2 - V(x)}$. Le sens physique de cette condition est que la longueur d'onde de de Broglie $\lambda_{dB} = p^{-1}$ varie lentement sur l'échelle qu'elle définit. Elle peut encore s'écrire $k^{-1} \ll \frac{2k^2}{|dV/dx|}$ (pour $k^2 \gg V$) ; il faut donc que l'énergie soit grande et que le potentiel varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde.

5.2 Représentations fonctionnelles à partir des équations du formalisme de phase

Hamiltonien de Schrödinger

L'approche que nous avons empruntée pour aboutir aux distributions du temps de Wigner nous a conduit, dans le cas où le potentiel est un bruit blanc, à une équation de Fokker-Planck

(2.65) qui appartient à une classe d'équations différentielles décrivant la distribution de fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien. Si on considère (2.65) on peut faire le chemin inverse de celui que nous avons jusqu'à présent utilisé : revenir à une équation différentielle stochastique. Cette dernière s'écrit :

$$\frac{dZ}{dx} = 2 - 2\gamma Z + 2\sqrt{\gamma}Z \eta(x) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (5.4)$$

où $\eta(x)$ est un bruit blanc tel que $\langle \eta(x)\eta(x') \rangle = \delta(x - x')$. Faris & Tsay (1994) ont obtenu cette équation par une technique différente de la nôtre qui utilise exclusivement des équations différentielles stochastiques. Cette équation peut s'intégrer formellement et fournir une représentation fonctionnelle pour le temps de Wigner :

$$\tau(k) = \frac{1}{k} \int_0^L dx e^{2 \int_x^L dx' (\sqrt{\gamma}\eta(x') - \gamma)}. \quad (5.5)$$

Rappelons que $B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\alpha x + \sqrt{2\alpha}W(x)$ est un mouvement brownien de dérive μ ($W(x)$ un processus de Wiener normalisé : $\langle W(x) \rangle = 0$ et $\langle W(x)W(x') \rangle = \min(x, x')$). (5.5) est donc une fonctionnelle exponentielle pour un mouvement brownien de dérive 1. Cette représentation permet d'obtenir toutes les propriétés statistiques (distribution, moments) que nous avons données.

Notons qu'on peut aboutir plus rapidement à une telle représentation à condition d'intégrer formellement (2.48) :

$$\tau(k) = \frac{1}{k} \int_0^L dx \left(1 + \frac{1}{k^2} V(x) \sin^2 \theta(x) \right) e^{2(\xi(x) - \xi(L))} \quad (5.6)$$

où $\xi(x) = \frac{1}{2k} \int_0^L dx' V(x') \sin 2\theta(x')$. Cette expression est exacte, quel que soit le potentiel; $\theta(x)$ est solution de (2.10). À haute énergie, le deuxième terme de la parenthèse devient négligeable :

$$\tau(k) \simeq \frac{1}{k} \int_0^L dx e^{2(\xi(x) - \xi(L))}, \quad (5.7)$$

d'autre part la variable $\xi(x)$ est égale en loi à : $\xi(x) \stackrel{(\text{loi})}{=} \int_0^x dx' (-\sqrt{\gamma}\eta(x') + \gamma)$. Ces deux arguments montrent que (5.6) se réduit à (5.5).

Notons que ces résultats, bien qu'étant valables à haute énergie, sont très différents du résultat quasi-classique. La raison est que les variations du potentiel ont lieu sur une distance courte devant la longueur d'onde de de Broglie.

Hamiltonien supersymétrique

Pour l'hamiltonien supersymétrique une certaine simplification intervient grâce à la forme plus simple de l'équation différentielle pour Z . L'équation (3.31) peut s'écrire

$$\frac{dZ(x)}{dx} = 2 - 2 \frac{d\xi(x)}{dx} Z(x) \quad (5.8)$$

et être intégrée en

$$\tau(k) = \frac{1}{k} \int_0^L dx e^{2(\xi(x) - \xi(L))} \quad (5.9)$$

où $\xi(x) = -\int_0^L dx' \phi(x') \cos 2\theta(x')$. Comme dans le cas du modèle gaussien, la variable $\xi(x)$ se comporte en loi comme un mouvement brownien de dérive 2 à haute énergie et (5.9) peut donc s'écrire comme (5.5).

À énergie nulle, (3.17) et la condition initiale $\theta(0) = 0$ montrent que $\theta(x) = 0$. L'expression précédente du temps de Wigner prend la forme d'une fonctionnelle de la fonction ϕ intervenant dans le potentiel :

$$Z_0 = 2 \int_0^L dx e^{2 \int_x^L dx' \phi(x')} . \quad (5.10)$$

Cette relation est donnée dans (Steiner *et al.* 1999). Le mouvement brownien qui intervient dans l'exponentielle n'est pas de dérive 1 comme à haute énergie, mais de dérive nulle (*cf.* fin du chapitre 3).

Modèle d'impuretés δ

Les équations différentielles stochastiques sont remplacées par des équations de récurrence pour les trois variables θ_i , ξ_i et Z_i . Il existe un analogue des relations du premier paragraphe. En posant $Z_i \equiv Z_i^-$ et $\xi_i \equiv \xi_i^-$ on peut constater qu'à haute énergie, la variable obéit à l'équation de récurrence :

$$Z_{i+1} \simeq 2l_i + Z_i e^{-2(\xi_{i+1} - \xi_i)} \quad (5.11)$$

qui permet de montrer que :

$$\tau(k) \simeq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^N l_i e^{2(\xi_{i+1} - \xi_{N+1})} . \quad (5.12)$$

Cette représentation est la version discrétisée de (5.7). Une relation similaire a été obtenue dans un contexte différent dans (Berezinskiĭ & Gor'kov 1979). De même que (5.7) fait intervenir l'intégrale de l'exponentielle d'un mouvement brownien de dérive 1, cette relation fait apparaître une marche aléatoire $2\xi_i^-$ de dérive 1 (*cf.* le §4.3.1 sur les fluctuations de ξ_N à haute énergie).

5.3 Pourquoi la distribution de τ est-elle universelle ?

On a montré que pour les trois modèles étudiés, le temps de Wigner peut s'écrire dans la limite de haute énergie sous la forme de la fonctionnelle exponentielle d'un mouvement brownien de dérive 1. L'objet de ce dernier paragraphe est d'en donner une preuve plus générale.

Considérons la relation :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi^*}{dx} \frac{d\psi}{dE} - \psi^* \frac{d^2\psi}{dx dE} \right) = |\psi|^2 \quad (5.13)$$

qui découle simplement de l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\psi : H\psi = E\psi$. En termes des variables polaires (2.4,2.5) cette relation s'écrit :

$$\frac{1}{2k} \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\theta}{dk} e^{2\xi} - \frac{1}{2} \sin 2\theta e^{2\xi} \right) = e^{2\xi} \sin^2 \theta . \quad (5.14)$$

Si on intègre cette équation sur la région désordonnée, en utilisant que $\delta(k) = 2\theta(x=L) + \pi$ on aboutit finalement à la relation générale :

$$\tau(k) = \frac{1}{k} \int_0^L dx 2 \sin^2 \theta(x) e^{2(\xi(x) - \xi(L))} - \frac{1}{2k^2} \sin \delta(k) . \quad (5.15)$$

Pour rendre cette relation moins dépendante du choix de paramétrisation de la fonction d'onde on considère des états normalisés de telle sorte qu'ils puissent s'écrire hors de la région désordonnée :

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2} \left(e^{-ik(x-L)} + e^{ik(x-L)+i\delta(k)} \right) . \quad (5.16)$$

La fonction d'onde s'écrit $\psi_k(x) = \mathcal{N}e^{\xi(x)} \sin \theta(x)$ et sa dérivée $\psi'_k(x) = k\mathcal{N}e^{\xi(x)} \cos \theta(x)$. La normalisation de l'état stationnaire de diffusion correspond donc à $\mathcal{N} = -e^{-\xi(L)+i\delta/2}$. Ce choix de normalisation permet écrire :

$$\tau(k) = \frac{1}{k} \int_0^L dx 2|\psi_k(x)|^2 - \frac{1}{2k^2} \sin \delta(k) . \quad (5.17)$$

Cette relation a été obtenue par Smith (1960). À haute énergie le second terme devient négligeable.

Cette relation est vraie quel que soit le modèle. Intéressons-nous au cas d'un système désordonné pour lequel les corrélations du potentiel sont données par la fonction $B(x-x') = \langle V(x)V(x') \rangle$, caractérisée par une longueur de corrélation x_c . Introduisons la transformée de Fourier de la fonction de corrélation : $\tilde{B}(q) = \int dx B(x)e^{iqx}$. Nous avons séparé la fonction d'onde en une partie oscillante et une enveloppe : $\psi_k(x) = \mathcal{N}e^{\xi(x)} \sin \theta(x)$. Dans la limite de haute énergie, *i.e.* lorsque k^{-1} et x_c sont les deux plus petites échelles du problème, il a été prouvé de manière générale dans (Antsygina *et al.* 1981) :

1. l'exposant de Lyapunov, qui caractérise l'échelle sur laquelle varie l'enveloppe, est donné par $\gamma = \frac{\tilde{B}(2k)}{8k^2}$; on a donc $\gamma \ll k$.
2. La variable $\xi(x)$ possède des fluctuations universelles : sa distribution est donnée par (2.37), où le paramètre γ est celui de la remarque précédente. En d'autres termes, la variable peut s'écrire en loi comme : $\xi(x) \stackrel{(loi)}{=} \gamma x + \sqrt{\gamma}W(x)$ où $W(x)$ est un processus de Wiener normalisé¹.

Les oscillations de la fonction d'onde ont une périodicité voisine de k^{-1} alors que la variable $\xi(x)$ évolue sur une échelle caractéristique $\lambda = \gamma^{-1}$ beaucoup plus grande que la précédente à haute énergie. On peut donc moyenner sur la variable rapide dans l'expression (5.15) ou (5.17), ce qui conduit à

$$\tau(k) = \frac{1}{k} \int_0^L dx e^{2(\xi(x)-\xi(L))} \quad (5.18)$$

qui est une fonctionnelle exponentielle d'un mouvement brownien de dérive 1. Ces objets décrivant des processus stochastiques multiplicatifs ont été largement étudiés (Yor 1992), (Monthus & Comtet 1994), (Monthus 1995), (Comtet & Monthus 1996), (Comtet *et al.* 1998) (*cf.* (Yor 1997) pour une revue) ; notons qu'ils sont des versions continues des variables de Kesten (Kesten 1973), (de Calan, Luck, Nieuwenhuizen & Pétritis 1985). En exploitant les propriétés d'échelle du mouvement brownien intervenant dans ξ , on aboutit à la représentation fonctionnelle, valable en loi :

$$\tau(k) \stackrel{(loi)}{=} \frac{\lambda}{k} \int_0^{L/\lambda} du e^{-2u+2W(u)} . \quad (5.19)$$

¹Il existe une preuve de ce résultat dans le contexte des modèles discrets ; en utilisant un formalisme de matrices de transfert, Pendry a considéré la résistance R_L d'un conducteur désordonné unidimensionnel (la variable ξ est donnée par $\frac{1}{2} \ln R_L$). $\ln R_L$ est distribué par une loi normale correspondant aux propriétés de ξ mentionnées (Pendry 1994, éq.(4.29)).

Cette expression permet de retrouver toutes les propriétés statistiques données au chapitre 2 (Monthus & Comtet 1994) : l'existence d'une distribution limite pour $L/\lambda \rightarrow \infty$, des moments exponentiellement grands avec L/λ , mais aussi les propriétés caractérisant le régime balistique (pour $L \ll \lambda$).

Chapitre 6

Le modèle des dimères sur réseau : transition de délocalisation

6.1 Introduction

Nous allons considérer un nouvel aspect des modèles unidimensionnels désordonnés. Nous avons étudié jusqu'à présent des systèmes avec des corrélations à courte portée $\langle V(x)V(x') \rangle \propto \delta(x - x')$, pour lesquels les états sont tous localisés par la présence du désordre. Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à un modèle décrit par un potentiel possédant un type particulier de corrélations induisant une transition de délocalisation pour certaines valeurs de l'énergie. L'étude des transitions de délocalisation est un sujet ayant motivé de nombreuses études. Citons notamment le travail de Ziman (1982) concernant un hamiltonien d'Anderson avec désordre non diagonal.

Le modèle des dimères a été introduit dans une version discrétisée (hamiltonien d'Anderson) par Dunlap *et al.* (1990) et Florès (1989). Il a été étudié par Bovier (1992). Sánchez & Domínguez-Adame (1994) ont proposé une version "continue" de ce modèle dans laquelle les dimères sont modélisés par des couples d'impuretés δ . C'est cette version que nous considérerons. Ce modèle a trouvé des réalisations expérimentales dans le cadre de la physique des polymères, pour décrire des molécules de polyaniline (Wu & Phillips 1991), (Wu, Goff & Phillips 1992), puis dans le contexte des super-réseaux de semi-conducteurs (Diez, Sánchez & Domínguez-Adame 1995).

Dans les chapitres précédents, nous avons pu constater que les propriétés statistiques du temps de Wigner étaient intimement liées aux propriétés de localisation dans le système ; l'existence d'états localisés dans l'échantillon et faiblement couplés à l'extérieur nous a permis d'expliquer le comportement des moments du temps de Wigner. Nous allons étudier comment les propriétés statistiques du temps de Wigner sont affectées par la disparition de la seule échelle de longueur qu'elles mettaient en jeu dans le régime de haute énergie.

6.2 Définition du modèle

Le désordre est une variante du désordre de type C introduit au tout début du chapitre 4. L'introduction de corrélations se fait en forçant les impuretés de poids v' à se trouver toujours

par paires, d'où le nom de modèle de dimères. La construction du potentiel nécessite trois paramètres, en plus du pas du réseau $a \equiv 1/\rho$: le poids des impuretés de dimères v' , le poids des autres impuretés v et une probabilité p dont nous allons définir le rôle dans la procédure de construction du désordre. Pour construire le potentiel, on part du premier site $i = 1$ sur lequel on jette une impureté v avec probabilité $1 - p$, ou un couple d'impuretés v' sur les sites i et $i + 1$ avec probabilité p , puis on itère la procédure jusqu'à remplir les N sites du réseau. Il est clair qu'en procédant de cette manière, la proportion d'impuretés v' de dimères n'est pas donnée par p mais par

$$q = \frac{2p}{1+p} \quad (6.1)$$

et la proportion d'impuretés v par $1 - q = \frac{1-p}{1+p}$.

6.3 Mise en évidence de la transition

La transition de délocalisation se manifeste par l'annulation du coefficient de Lyapunov pour certaines valeurs de l'énergie. Ceci peut être mis en évidence en utilisant le formalisme de matrices de transfert présenté dans l'annexe b du chapitre 4 pour étudier le potentiel périodique. La matrice de transfert correspondant aux deux segments du réseau occupés par un dimère est donnée par $M_{\text{dim}} = (M_0(a) \times M_\delta(v'))^2$:

$$M_{\text{dim}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21}^* \\ m_{21} & m_{11}^* \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

avec

$$m_{11} = -1 + e^{ika} \left(2 - \frac{iv'}{k} \right) \left(\cos ka + \frac{v'}{2k} \sin ka \right) \quad (6.3)$$

$$m_{21} = \frac{iv'}{k} e^{-ika} \left(\cos ka + \frac{v'}{2k} \sin ka \right), \quad (6.4)$$

la matrice de transfert pour un segment contenant une impureté v est donnée dans l'annexe b du chapitre 4 : $M_0(a) \times M_\delta(v)$. Ces expressions montrent que pour certaines valeurs k_n , solutions de

$$\tan ka = -\frac{2k}{v'}, \quad (6.5)$$

la matrice de transfert du dimère est proportionnelle à l'identité $M_{\text{dim}} = -1$ et commute avec les matrices des impuretés v . Pour ces énergies particulières la matrice de transfert totale se réduit au produit des matrices de transfert pour les seules impuretés v , et la détermination de l'exposant de Lyapunov se ramène au cas du réseau périodique, c'est-à-dire que celui-ci est nul (cf. annexe b du chapitre 4).

Le coefficient de réflexion¹ (pour la transmission droite-gauche) correspondant à la matrice

¹La transmission d'une onde de la gauche vers la droite est caractérisée par un coefficient de réflexion r et un coefficient de transmission t , tandis que la transmission de la droite vers la gauche est caractérisée par r' et t' . La matrice de transfert s'écrit : $M = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t'^* & r'/t' \\ r''^*/t'^* & 1/t' \end{pmatrix}$. Les coefficients r , t , r' et t' sont liés par les deux relations : $t = t'$ et $\frac{r'}{t'} = -\frac{r^*}{t^*}$ (Pendry 1994), (Avishai & Band 1985).

précédente est donné par $r' = \frac{m_{21}^*}{m_{11}^*}$:

$$r'(k) = \frac{iv'}{k} e^{ika} \frac{\cos ka + \frac{v'}{2k} \sin ka}{1 - e^{-ika} \left(2 + \frac{iv'}{k}\right) \left(\cos ka + \frac{v'}{2k} \sin ka\right)} \quad (6.6)$$

Les valeurs k_n correspondent donc physiquement à l'annulation du coefficient de réflexion sur un dimère. À cause de l'absence de rétrodiffusion sur les dimères, l'électron se propage dans un réseau d'impuretés v avec des trous qu'il traverse en subissant un déphasage multiple entier de π .

On peut caractériser la divergence de la longueur de localisation au voisinage de la transition par un argument heuristique inspiré de celui qui nous a permis d'obtenir la longueur de localisation du désordre de type A. D'après (6.6), au voisinage de k_n le coefficient de réflexion s'annule linéairement :

$$r'(k) \underset{k \sim k_n}{\simeq} \alpha_n (k - k_n) \quad (6.7)$$

où le coefficient α_n peut être calculé à l'aide de l'expression de $r'(k)$:

$$\alpha_n = \frac{v'}{\rho k_n} \frac{1 + \frac{v'^2}{4k_n^2} - \frac{\rho v'}{2k_n^2}}{1 - i \frac{v'}{2k_n}}. \quad (6.8)$$

À $k = k_n$ les électrons traversent les dimères sans être réfléchis, et se trouvent dans un état quantique proche d'une onde de Bloch ("proche" car la présence des dimères introduit des déphasages supplémentaires). Au voisinage de k_n ils subissent une très légère réflexion de la part des dimères. Si $|\psi_-|$ (respectivement $|\psi_+|$) est le module de l'onde avant (resp. après) le dimère, on peut écrire $|\psi_+| = \sqrt{1 - |r'|^2} |\psi_-| \simeq (1 - \frac{1}{2}|r'|^2) |\psi_-|$. Comme $|r'| \ll 1$, on peut négliger la diffusion multiple et lorsque l'onde traverse un intervalle de longueur x elle traverse en moyenne $\rho_d x$ dimères, où ρ_d est la densité de dimères. Le module de l'onde évolue donc comme $|\psi(x)| \sim |\psi(0)| \left(1 - \frac{1}{2} |\alpha_n|^2 (k - k_n)^2\right)^{\rho_d x} \sim |\psi(0)| e^{-\rho_d \frac{|\alpha_n|^2}{2} (k - k_n)^2 x}$. La fraction d'impuretés v' est q , *i.e.* $\rho_d = q\rho/2$. Cet argument montre que l'exposant de Lyapunov s'annule quadratiquement au voisinage de la transition :

$$\gamma(E) \underset{k \sim k_n}{\simeq} \frac{q\rho |\alpha_n|^2}{4} (k - k_n)^2 \quad (6.9)$$

par conséquent la longueur de localisation diverge comme :

$$\lambda(E) \simeq \frac{16k_n^2}{q\rho |\alpha_n|^2} \frac{1}{(E - k_n^2)^2} \quad (6.10)$$

avec un exposant critique égal à 2.

Ce résultat permet d'évaluer le nombre d'états affectés par la transition de délocalisation. Pour un système de taille finie L , les états d'énergie proche de k_n^2 sont délocalisés à l'échelle de l'échantillon à condition que $\lambda \gtrsim L$. La relation précédente permet d'exprimer la largeur de la bande d'énergie $\delta E_{\text{déloc}}$ autour de k_n^2 , dans laquelle les états sont délocalisés :

$$\delta E_{\text{déloc}} \propto \frac{1}{\sqrt{L}}. \quad (6.11)$$

La densité d'états est proportionnelle à la taille du système, l'argument montre donc que le nombre d'états délocalisés d'énergie voisine de k_n^2 se comporte comme

$$N_{\text{déloc}} = \rho_L (k_n^2) \delta E_{\text{déloc}} \propto \sqrt{L}. \quad (6.12)$$

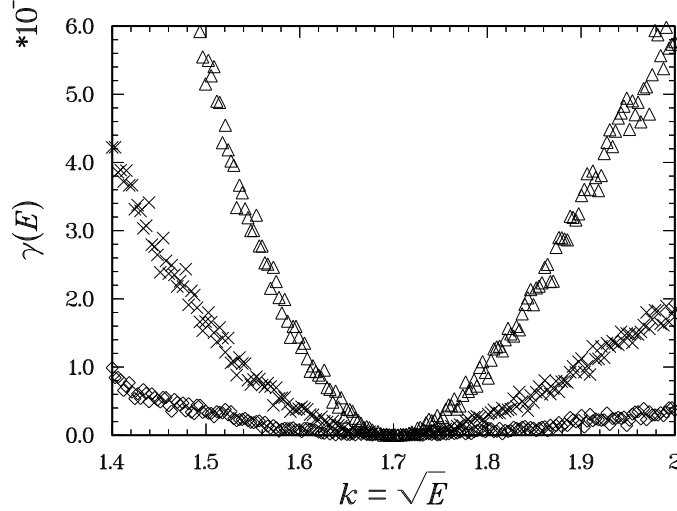


FIG. 6.1: Exposant de Lyapunov au voisinage du point de transition de délocalisation. $v = 0.05$, $v' = 0.45$, $\rho = 1$, $k = k_1 \simeq 1.702215$ et $N = 10^6$ impuretés. De haut en bas : $p = 1/3$, $1/10$ et $1/50$.

Ce résultat est en accord avec celui obtenu pour les modèles discrets (Dunlap *et al.* 1990).

Sur la figure 6.1 on a tracé quelques résultats de calculs numériques pour différentes concentrations de dimères (la fraction q prend les valeurs $1/2$, $2/11$ et $2/51$). Ces résultats mettent bien en évidence la décroissance quadratique de l'exposant de Lyapunov à la transition. Le préfacteur pour ces calculs (dans un régime $\rho \gg v'$) est assez bien reproduit par les expressions précédentes, cependant nous avons observé que dans le régime $\rho \ll v'$, des différences pouvaient apparaître.

q	$\frac{1}{4}q\rho \alpha_n ^2$	préfacteur obtenu numériquement
$v' = 0.45$, $v = 0.05$, $\rho = 1$, $N = 10^6$ et $k = k_1 \simeq 1.702215$		
1/2	$7.58 \cdot 10^{-3}$	$11 \cdot 10^{-3} \pm 2 \cdot 10^{-3}$
2/11	$2.76 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-3} \pm 0.7 \cdot 10^{-3}$
2/51	$5.95 \cdot 10^{-4}$	$6.3 \cdot 10^{-4} \pm 1.7 \cdot 10^{-4}$
2/101	$3.00 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4} \pm 1.4 \cdot 10^{-4}$

Par la suite nous abandonnerons le formalisme des matrices de transfert au profit du formalisme de phase. Comment évoluent les variables du formalisme de phase à travers un dimère ? Les équations (4.14,4.15) permettent d'établir qu'à travers une impureté de poids v' placée sur le i ème site, $\cotg \theta_i^-$ évolue comme :

$$\cotg \theta_{i+1}^- = \frac{\left(\cotg \frac{k}{\rho} + \frac{v'}{2k}\right) \cotg \theta_i^- + \cotg \frac{k}{\rho} - 1 + \frac{v'^2}{4k^2}}{\cotg \theta_i^- + \left(\cotg \frac{k}{\rho} + \frac{v'}{2k}\right)}. \quad (6.13)$$

Lorsqu'on se place à l'énergie de la transition $\cotg \frac{k}{\rho} + \frac{v'}{2k} = 0$ la transformation précédente est une inversion. Traverser un dimère revient à combiner deux telles transformations, par conséquent on obtient

$$\cotg \theta_{i+2}^- = \cotg \theta_i^- \quad (6.14)$$

si un dimère occupe les sites i et $i+1$. Cette dernière relation montre que la phase subit un déphasage multiple entier de π lors de la traversée du dimère. Notons qu'à la transition, la relation suivante est vérifiée dans le dimère :

$$\frac{\sin \theta_{i+1}^-}{\sin \theta_{i+1}^+} = \frac{\sin \theta_i^+}{\sin \theta_i^-} . \quad (6.15)$$

Pour déterminer la valeur exacte du déphasage on observe que dans la limite $\rho \gg v'$ les zéros de l'équation (6.5) sont de la forme : $k_n \simeq \frac{\pi}{2}\rho(2n-1) + \frac{v'}{\pi(2n-1)}$ (pour $n = 1, 2, \dots$). À l'ordre 0 en v'/ρ la variation de la phase à travers le dimère est : $\theta_{i+2}^- - \theta_i^- = (2n-1)\pi$. On peut supposer que cette relation reste vraie à tous les ordres.

On peut trouver une expression exacte de la densité d'états à l'énergie de la transition. Parmi N sites, une fraction q d'entre eux sont occupés par des impuretés de dimères. La traversée des $N\frac{q}{2}$ dimères produira une contribution $\Delta\Theta_{\text{dim}} = N\frac{q}{2}(2n-1)\pi$ à la phase θ_{N+1}^- . La contribution des autres impuretés est égale à la variation de la phase pour $(1-q)N$ impuretés formant un réseau périodique : $\Delta\Theta_{\text{imp. } v} = (1-q)LN_{\text{rés. pér.}}(k_n^2)$. La phase finale est donnée en sommant ces deux contributions : $\theta_N^- = \Delta\Theta_{\text{dim}} + \Delta\Theta_{\text{imp. } v}$ ce qui conduit à

$$N(E = k_n^2) = \frac{q}{2}(2n-1)\rho + (1-q)\rho \left(2E \left[\frac{n}{2} \right] + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \arccos \left[\cos \frac{k_n}{\rho} + \frac{v}{2k_n} \sin \frac{k_n}{\rho} \right] \right) . \quad (6.16)$$

La relation (6.15) montre que pour $k = k_n$ la variable ξ donnant l'exposant de Lyapunov est égale de part et d'autre du dimère :

$$\xi_{i+2}^- = \xi_i^- . \quad (6.17)$$

Il faut toutefois noter que ξ entre les deux impuretés du dimère est différent de sa valeur hors du dimère.

En dernier lieu on peut remarquer que la variable Z évolue pendant la traversée du dimère comme :

$$Z_{i+2}^- = Z_i^- + \frac{2}{\rho} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta_i^-}{\sin^2 \theta_i^+} \right) + \frac{2v'}{k^2} (\sin^2 \theta_i^- + \sin^2 \theta_{i+1}^+) . \quad (6.18)$$

Si on considère un ensemble de réalisations du désordre caractérisées par le même nombre N_{dim} de dimères, θ_{N+1}^- et ξ_{N+1}^- sont insensibles au désordre, ce qui n'est pas le cas de Z_{N+1}^- . Le temps de Wigner garde donc la trace de la présence du désordre.

6.4 Corrélations de la fonction d'onde au point de transition de délocalisation

Étudions la fonction de corrélation :

$$C_{k_n}(x, x') = \langle \langle \psi_{k_n}^2(x) \psi_{k_n}^2(x') \rangle \rangle \quad (6.19)$$

à la transition de localisation. Nous nous placerons dans une limite où la densité de dimères est faible ($q \ll 1$). Hors de la transition de délocalisation, il y a une suppression des corrélations de la fonction d'onde sur une échelle donnée par la longueur de localisation. Avec la divergence de cette dernière à la transition, qu'en est-il des corrélations de la fonction d'onde ?

D'après les considérations précédentes, la phase évolue dans le dimère de telle sorte qu'elle subit une variation $\Delta\theta_{\text{dim}} = \theta_{i+2}^- - \theta_i^- = (2n-1)\pi$ lorsqu'on se trouve à la n ème énergie de transition du spectre. Hors des dimères, elle suit les variations qu'elle suivrait dans le réseau périodique d'impureté v . Notons $\Theta(x)$ la fonction donnant les variations de la phase dans le réseau périodique. Si on se place en un point x , extérieur aux dimères, tel qu'à gauche de ce point se trouvent $n_d(x,0)$ dimères, la phase s'exprime comme :

$$\theta(x) = \Theta\left(x - n_d(x,0)\frac{2}{\rho}\right) + (2n-1)\pi n_d(x,0). \quad (6.20)$$

Puisque la variable ξ est nulle hors des dimères, la fonction d'onde y est donnée par :

$$\psi_{k_n}(x) = \sin \Theta\left(x - n_d(x,0)\frac{2}{\rho}\right). \quad (6.21)$$

Il faut ici faire une remarque : lorsqu'on a étudié les corrélations de la fonction d'onde du modèle supersymétrique à la transition de délocalisation (*cf.* chapitre 3), il était crucial de prendre en compte la normalisation de la fonction d'onde qui pouvait varier de manière très importante d'une configuration du désordre à l'autre. De même, pour le modèle gaussien, la normalisation des fonctions d'onde du système infini possède des fluctuations non triviales (Lifshits *et al.* 1988, §13.3). Ici la situation est tout autre, quelle que soit la configuration du désordre le module carré de la fonction d'onde est en moyenne quasiment constant dans l'échantillon, c'est-à-dire que la constante de normalisation est la même pour les différentes configurations du désordre.

L'expression de la phase suggère d'introduire une simplification dans le modèle. À la transition, les impuretés v jouent le rôle d'un réseau périodique au sein duquel sont placés des défauts (les dimères) qui ne font que rajouter une phase π à la phase de l'onde de Bloch. Si on choisit $v = 0$, l'onde de Bloch hors des dimères est remplacée par une onde plane et l'évolution de la phase est l'évolution libre : $\Theta(x) = k_n x$. Comme nous allons le constater, ce choix apporte certaines simplifications dans les calculs à venir. **NOUS CHOISIRONS DONC $v = 0$ JUSQU'À LA FIN DU CHAPITRE.**

La première étape est de calculer la valeur moyenne du carré de la fonction d'onde. Une position x donnée se trouve avec probabilité $q/2$ dans l'intervalle compris entre les deux impuretés d'un dimère. La variable ξ est nulle partout sauf dans de tels intervalles à l'intérieur desquels elle est constante et majorée en valeur absolue par $\Delta\xi_{\text{max}}$ ($\Delta\xi_{\text{max}} \simeq \frac{v'}{2k}$ si $v' \ll k$ et $\simeq \ln \frac{v}{k}$ si $v' \gg k$). Dans un dimère, la phase subit un déphasage supplémentaire $\Delta\theta(x)$ dû à la traversée de l'impureté. On a donc

$$\begin{aligned} \langle \psi_{k_n}^2(x) \rangle &= \left(1 - \frac{q}{2}\right) \left\langle \sin^2 k_n \left(x - n_d(x,0)\frac{2}{\rho}\right) \right\rangle_{x \notin \text{dimère}} \\ &+ \frac{q}{2} \left\langle e^{2\Delta\xi(x)} \sin^2 \left(k_n x - n_d(x,0)\frac{2}{\rho} + \Delta\theta(x)\right) \right\rangle_{x \in \text{dimère}}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Nous nous placerons dans un régime de faible densité de dimère ($q \ll 1$) de telle sorte qu'on puisse négliger la contribution à la valeur moyenne de la fonction d'onde, et plus tard à la

fonction de corrélation, des évènements pour lesquels x se trouve entre les deux impuretés d'un dimère. Il faudra également considérer un régime dans lequel $e^{2\Delta\xi}$ reste de l'ordre de 1, c'est-à-dire un régime de telle sorte que $\frac{v'}{k_n} \ll 1$. Dans ce cas on peut négliger le second terme de l'expression précédente et on aboutit à :

$$\langle \psi_{k_n}^2(x) \rangle \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[e^{2ik_n x} \langle e^{-4i\frac{k_n}{\rho} n_d(x,0)} \rangle \right] \quad (6.23)$$

où la moyenne se fait sur le nombre de dimères $n_d(x,0)$ présent dans l'intervalle $[0, x]$. L'hypothèse de faible densité permet d'adopter pour distribution de $n_d(x,0)$ une forme approchée simple, la distribution de Poisson :

$$P(n_d(x,0)) \simeq \frac{(\rho_d x)^{n_d(x,0)}}{n_d(x,0)!} e^{-\rho_d x} . \quad (6.24)$$

$\rho_d \equiv \rho \frac{q}{2}$ est la densité moyenne de dimères. Utiliser cette forme approchée suppose qu'on néglige le fait que les dimères possèdent une taille finie et qu'ils sont placés sur un réseau. Cette approximation ne peut être raisonnable que pour une très faible densité de dimères $q \ll 1$. La fonction caractéristique associée à cette distribution se calcule aisément : $\langle e^{-i\alpha n_d(x,0)} \rangle = e^{-\rho_d x [1 - e^{-i\alpha}]}$. Ce qui conduit à l'expression suivante pour la valeur moyenne de la fonction d'onde :

$$\langle \psi_{k_n}^2(x) \rangle \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\tilde{k}_n x) e^{-x/\ell_c} \quad (6.25)$$

où l'on a introduit :

$$\tilde{k}_n = k_n - \frac{\rho q}{4} \sin \frac{4k_n}{\rho} \quad (6.26)$$

$$\ell_c^{-1} = \rho q \sin^2 \frac{2k_n}{\rho} . \quad (6.27)$$

Le calcul des corrélations suit les mêmes lignes. On considère des positions suffisamment éloignées de l'origine : $x, x' \gg \ell_c$ de telle sorte que $\langle \psi_{k_n}^2(x) \rangle = \frac{1}{2}$. Dans ce cas la fonction de corrélation s'écrit :

$$C_{k_n}(x, x') = \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \frac{1}{4} \left\langle \cos 2k_n \left(x - n_d(x,0) \frac{2}{\rho}\right) \cos 2k_n \left(x' - n_d(x',0) \frac{2}{\rho}\right) \right\rangle_{x, x' \notin \text{dimère}} + \frac{q}{2} \left(1 - \frac{q}{2}\right) \langle \bullet \rangle_{\substack{x \in \text{dimère} \\ x' \notin \text{dimère}}} + \frac{q^2}{4} \langle \bullet \bullet \rangle_{x, x' \in \text{dimère}} \quad (6.28)$$

où \bullet et $\bullet \bullet$ désignent des termes qui tiennent compte respectivement de l'éventualité pour qu'une des positions se trouve dans un dimère mais pas l'autre, et de la possibilité que les deux positions se trouvent dans des dimères. Nous négligerons comme précédemment ces deux termes. Dans ce cas la fonction précédente s'exprime comme :

$$C_{k_n}(x, x') \simeq \frac{1}{8} \operatorname{Re} \left[e^{2ik_n(x+x')} \langle e^{-4i\frac{k_n}{\rho}(n_d(x,0)+n_d(x',0))} \rangle + e^{2ik_n(x'-x)} \langle e^{-4i\frac{k_n}{\rho}(n_d(x',0)-n_d(x,0))} \rangle \right] \quad (6.29)$$

Choisissons par exemple $x' > x$. on a $n_d(x',0) = n_d(x',x) + n_d(x,0)$ où $n_d(x',x)$ et $n_d(x,0)$ sont statistiquement indépendants. Le premier terme fait donc intervenir le produit

$$\langle e^{-4ik_n n_d(x',x)/\rho} \rangle \langle e^{-8ik_n n_d(x,0)/\rho} \rangle .$$

La moyenne sur $n_d(x, 0)$ fait apparaître une dépendance en $e^{-\omega x}$ où ω est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positive. Dans la limite $x, x' \gg \ell_c$, seul le terme qui contient la différence $n_d(x', 0) - n_d(x, 0) = n_d(x', x)$ contribue donc. On aboutit finalement pour la fonction de corrélation à :

$$C_{k_n}(x, x') \simeq \frac{1}{8} \cos(2\tilde{k}_n|x - x'|) e^{-|x-x'|/\ell_c} . \quad (6.30)$$

Cette expression permet d'interpréter la longueur ℓ_c introduite précédemment comme une longueur de corrélation. Bien que les fonctions d'onde soient délocalisées dans tout l'échantillon à la transition, il n'y a pas d'ordre à longue portée puisque la cohérence de phase est perdue sur une distance ℓ_c .

On compare quelques données numériques avec les valeurs données par les expressions (6.26,6.27). On a considéré $v = 0$, $v' = 0.45$, $\rho = 1$ et $p = 1/50$.

k_n	\tilde{k}_n	ℓ_c	\tilde{k}_n^{num}	ℓ_c^{num}
$k_1 = 1.702215$	1.697295	378	1.69725 ± 0.00005	390 ± 10
$k_2 = 4.759626$	4.757785	2870	4.75780 ± 0.00005	3050 ± 50
$k_3 = 7.882518$	7.881401	7840	7.88130 ± 0.00005	8300 ± 200

Dans le régime $v' \ll \rho$ on peut utiliser l'expression approchée de k_n donnée plus haut. Dans cette limite on constate que l'inverse de la longueur de corrélation se comporte comme $\ell_c^{-1} \simeq q \frac{v'^2}{\rho} \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}$. La longueur de corrélation est beaucoup plus grande que la distance moyenne séparant deux dimères, ce qui est normal puisque la mémoire de la phase est perdue lors de la traversée des dimères en nombre aléatoire.

6.5 Propriétés statistiques du temps de Wigner à la transition de délocalisation

Les variations de la variable Z_i^- sont données par $Z_{i+1}^- = \frac{2}{\rho} + Z_i^-$ lorsqu'un intervalle vide d'impureté est traversé, et par (6.18) lorsqu'un dimère est traversé. Si les positions des dimères sont données par l'ensemble $\{i_d\}$, on a :

$$Z_{N+1}^- = 2L + \frac{2v'}{k_n \rho} \sum_{i \in \{i_d\}} \left(\sin 2\theta_i^- + \frac{v' + \rho}{k_n} \sin^2 \theta_i^- + \frac{\rho}{k_n} \sin^2 \theta_{i+1}^+ \right) . \quad (6.31)$$

Alors que le processus est un processus stochastique multiplicatif lorsqu'on se place hors d'une énergie de transition de délocalisation, il devient simplement additif à la transition d'après la relation (6.15). D'autre part on a montré dans le paragraphe précédent qu'il n'y a pas d'ordre à longue distance, et que la phase θ_i^- se décorrèle sur une distance finie ℓ_c . Il en résulte que la distribution de Z_{N+1}^- , et donc celle de $\tau(k_n)$, est gaussienne. L'existence de corrélations de la phase sur une distance ℓ_c ne permet pas de déterminer avec précision l'expression du second cumulant de la distribution de $\tau(k_n)$ à partir de (6.31), cependant cette dernière relation montre que les fluctuations sont proportionnelles à \sqrt{N} , c'est-à-dire que le second cumulant est proportionnel à la taille du système :

$$\langle \langle \tau(k_n)^2 \rangle \rangle \propto L . \quad (6.32)$$

Ce comportement est parfaitement confirmé par des calculs numériques comme on peut s'en convaincre sur le tableau suivant ($v = 0$, $v' = 0.45$, $\rho = 1$, $p = 1/50$ et $k = k_1 = 1.702215$, on prend soin de considérer un système tel que $L \gg \ell_c$) :

L	$\langle \tau(k_n) \rangle$	$\langle \langle \tau(k_n)^2 \rangle \rangle$
50000	29483.7	26.20
100000	58966.7	50.47
150000	88449.8	77.39
200000	117932.8	102.58
500000	294831.2	256.31

Il est satisfaisant que la distribution du temps de Wigner soit analogue à celle trouvée hors de la transition de délocalisation pour le régime balistique. En effet, ces deux cas correspondent à des situations physiques similaires pour lesquelles l'onde incidente pénètre dans le système sur toute sa longueur. Notons toutefois qu'il existe de légères différences : dans le régime balistique hors d'une transition de délocalisation, le second cumulatif de τ se comporte comme L^3 alors qu'il se comporte à la transition comme L . Ces différences sont à rapprocher du fait que dans le premier cas, module et phase de la fonction d'onde sont affectés par le désordre, alors qu'à la transition de délocalisation, seule la phase est affectée par le désordre.

Introduction d'un défaut parmi les dimères

Pour une énergie distincte d'une des énergies auxquelles apparaît une transition de délocalisation, la distribution du temps de Wigner est donnée par (2.68), qui présente un pic centré sur une valeur typique $\tau_{\text{typ}} = \frac{\lambda}{4k}$ et une queue algébrique en $1/\tau^2$. Par contraste, lorsqu'on se place à l'énergie d'une transition de délocalisation, la distribution du temps de Wigner ne possède pas de limite stationnaire; la distribution est alors gaussienne, centrée sur L/k_n et de largeur proportionnelle à \sqrt{L} . La raison de ce changement radical de comportement est double; en premier lieu, la variable Z_i^- qui donne le temps de Wigner n'est plus un processus stochastique multiplicatif mais un processus additif, et d'autre part le processus responsable des fluctuations de Z_i^- se décorrèle sur une distance finie.

Ceci suggère que la distribution du temps de Wigner est extrêmement sensible à l'introduction d'un défaut parmi les dimères. Nous désignons par défaut une impureté isolée de poids quelconque, ou un dimère de poids différent des autres dimères, .. au niveau duquel le processus Z_i^- redevient multiplicatif. Pour simplifier nous choisissons comme défaut un dimère brisé, c'est-à-dire une impureté de dimère de poids v' non appariée, placée aléatoirement sur un des sites du réseau. Si l'impureté isolée est placée sur le site i_0 , d'après l'expression (6.31) $Z_{i_0}^-$ est donné par :

$$Z_{i_0}^- = 2 \frac{i_0}{\rho} + \Omega_1 \quad (6.33)$$

où $\Omega_1 = \frac{2v'}{k_n \rho} \sum_{i \in \{i_d\}, i < i_0} f(\theta_i^-)$ désigne la somme de l'expression (6.31) portant sur les dimères placés entre l'origine et i_0 . D'après les considérations précédentes, Ω_1 possède des fluctuations

gaussiennes, proportionnelles à $\sqrt{i_0}$. Juste après l'impureté isolée on a, d'après (4.18) :

$$Z_{i_0+1}^- = \frac{2}{\rho} + Z_{i_0}^- \frac{\sin^2 \theta_{i_0}^+}{\sin^2 \theta_{i_0}^-} + \frac{2v'}{k_n^2} \sin^2 \theta_{i_0}^+ \quad (6.34)$$

Nous avons montré (cf. §4.3.1) que la variable $\frac{\sin^2 \theta_{i_0}^+}{\sin^2 \theta_{i_0}^-}$ fluctue entre $e^{2\Delta\xi_{\max}} = \left(\frac{v'}{2k_n} + \sqrt{\frac{v'^2}{4k_n^2} + 1}\right)^2$ et $e^{-2\Delta\xi_{\max}}$. Il résulte que $Z_{i_0+1}^-$ possède des fluctuations proportionnelles à i_0 alors que $Z_{i_0}^-$ n'a que des fluctuations en $\sqrt{i_0}$. L'effet sera d'autant plus fort que le défaut se trouvera près du bord $x = L$; il est maximum lorsque $i_0 = N$. En négligeant les fluctuations en $\sqrt{i_0}$, l'argument montre que la distribution du temps de Wigner sera une fonction définie sur le support $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ avec

$$\tau_{\min} \simeq L \frac{e^{-2\Delta\xi_{\max}}}{k_n} \quad (6.35)$$

$$\tau_{\max} \simeq L \frac{e^{2\Delta\xi_{\max}}}{k_n} . \quad (6.36)$$

L'introduction d'un défaut est un effet sous dominant en volume, c'est-à-dire que la densité d'états ou l'exposant de Lyapunov y sont insensibles, à des corrections en $1/L$ près. Néanmoins cet effet induit une modification importante de la distribution du temps de Wigner, qui se manifeste en particulier par un second cumulant proportionnel à L^2 au lieu de L :

$$\langle\langle \tau(k_n)^2 \rangle\rangle_{\text{avec défaut}} \propto L^2 . \quad (6.37)$$

On peut vérifier numériquement l'argument. On a choisi $v = 0$, $v' = 0.45$, $p = 1/50$, $\rho = 1$ et $k = k_1 = 1.702215$.

L	$\langle \tau(k_n) \rangle_{\text{déf}}$	$\langle\langle \tau(k_n)^2 \rangle\rangle_{\text{déf}}$	τ_{\min}	τ_{\max}
50000	29448	1.000 10 ⁷	22677	38342
100000	59055	4.090 10 ⁷	45363	76657
150000	88516	9.050 10 ⁷	67993	115124
200000	117794	1.616 10 ⁸	90778	153385
500000	294530	1.003 10 ⁹	226897	383170

Ce résultat numérique montre que $\tau_{\min} \simeq 0.455L$ et $\tau_{\max} \simeq 0.765L$ (alors que $\frac{e^{-2\Delta\xi_{\max}}}{k_1} \simeq 0.4513$ et $\frac{e^{2\Delta\xi_{\max}}}{k_1} \simeq 0.7647$).

On se propose d'obtenir une expression de la distribution de τ pour ce problème. La variable Z^- au bord de l'échantillon désordonné est donnée par :

$$Z_{N+1}^- = Z_{i_0}^- + 2 \frac{N - i_0}{\rho} + \Omega_2 \quad (6.38)$$

où $\Omega_2 = \frac{2v'}{k_n \rho} \sum_{i \in \{i_d\}, i_0 < i < N} f(\theta_i^-)$ possède des fluctuations gaussiennes d'ordre $\sqrt{N - i_0}$. D'après (6.33, 6.34, 6.38) la distribution de Z_{N+1}^- est donnée par :

$$P(Z_{N+1}^-) = \frac{1}{N} \sum_{i_0=1}^N \int d\Omega_1 p(\Omega_1) \int d\Omega_2 p(\Omega_2) \int_0^\pi d\theta_{i_0}^- W(\theta_{i_0}^-) \delta \left(Z_{N+1}^- - 2L - \frac{2i_0}{\rho} \frac{v'}{k_n} \chi(\theta_{i_0}^-) - \left(1 + \frac{v'}{k_n} \chi(\theta_{i_0}^-) \right) \Omega_1 - \Omega_2 \right) \quad (6.39)$$

où l'on a moyenné sur la position du défaut i_0 . $p(\Omega_1)$, resp. $p(\Omega_2)$, est la distribution de Ω_1 , resp. de Ω_2 : une gaussienne de largeur proportionnelle à $\sqrt{i_0}$, resp. $\sqrt{N - i_0}$. $W(\theta_{i_0}^-)$ désigne la distribution de la phase. $\chi(\theta)$ est la fonction $\chi(\theta) \equiv \sin 2\theta + \frac{v'}{k_n} \sin^2 \theta$, reliée au rapport $\frac{\sin^2 \theta^+}{\sin^2 \theta^-} = 1 + \frac{v'}{k_n} \chi(\theta^-)$. Pour aboutir à cette expression, nous avons fait l'hypothèse que $\theta_{i_0}^-$, Ω_1 et Ω_2 sont décorrélés entre eux, ce qui néglige des termes faisant intervenir les phases sur des sites distants d'au plus ℓ_c du défaut.

Dans l'argument de la fonction δ de (6.39) les deux derniers termes sont d'ordre \sqrt{N} alors que les autres sont d'ordre N . Ceci conduit à négliger le terme $\chi(\theta_{i_0}^-)\Omega_1$, et apporte certaines simplifications. La somme $\Omega_1 + \Omega_2$ qui apparaît dans ce cas est distribuée par une loi gaussienne de largeur d'ordre \sqrt{N} . La loi de $\Omega \equiv \Omega_1 + \Omega_2$ étant indépendante de i_0 , on peut écrire :

$$P(Z_{N+1}^-) = \int d\Omega p(\Omega) F(Z_{N+1}^- - \Omega) \quad (6.40)$$

où

$$F(Z) = \int_0^L \frac{dx_0}{L} \int_0^\pi d\theta W(\theta) \delta \left(Z - 2L - 2x_0 \frac{v'}{k_n} \chi(\theta) \right) \quad (6.41)$$

on a remplacé la somme sur i_0 par une intégrale. On montre facilement que la distribution $F(Z)$ est donnée par la distribution de la variable d'échelle

$$X \equiv \frac{k_n Z - 2L}{v' 2L} \quad (6.42)$$

$$F(Z) = \frac{k_n}{2v' L} \pi(X) . \quad (6.43)$$

La distribution de la variable X est donnée par l'intégrale :

$$\pi(X) = \int_0^\pi d\theta \frac{W(\theta)}{|\chi(\theta)|} \mathbf{Y} \left(\frac{X}{\chi(\theta)} \right) \mathbf{Y} \left(1 - \frac{X}{\chi(\theta)} \right) . \quad (6.44)$$

Dans la limite de haute énergie $k_n \gg v'$, on peut supposer que la phase est uniformément distribuée et négliger le second terme de $\chi(\theta)$. Ces deux hypothèses supplémentaires conduisent à l'expression suivante de $\pi(X)$:

$$\pi(X) = \frac{1}{\pi} \operatorname{argch} \frac{1}{|X|} . \quad (6.45)$$

Cette expression doit encore être convoluée par la gaussienne $p(\Omega)$ de largeur d'ordre \sqrt{N} pour obtenir la distribution de Z_{N+1}^- . On peut vérifier l'excellent accord entre cette expression et le résultat numérique sur la figure 6.2.

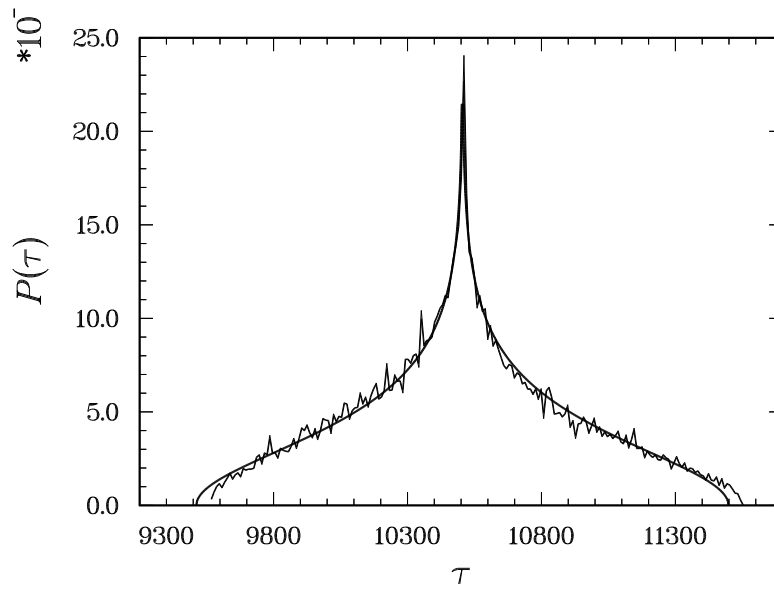


FIG. 6.2: Distribution du temps de Wigner à la transition de délocalisation lorsqu'un défaut est introduit sous la forme d'une impureté de dimère non appariée. $v = 0$, $v' = 0.45$, $p = 1/50$, $\rho = 1$, $k = k_2 = 4.759626$ et $L = 50000$. Statistique de $n_s = 40000$. Comparaison avec l'expression (6.45) (tirés). On n'a pas convolué $F(Z)$ par la gaussienne $p(\Omega)$ qui aurait une largeur négligeable à l'échelle de la figure.

Annexe A

Équations différentielles stochastiques

Nous allons rappeler brièvement quelques notions sur les équations différentielles stochastiques. Notre but est plutôt de suggérer les difficultés qui peuvent survenir dans l'étude de telles équations et de rappeler les techniques de base qui nous ont servi dans les chapitres précédents que de fournir un exposé rigoureux. Je renvoie le lecteur à des ouvrages spécialisés pour plus de précisions, par exemple (Gardiner 1989) qui est la source de ce qui suit, ou (van Kampen 1992).

A.1 Position du problème

Nous nous intéressons à une équation du type :

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x) + b(x)\eta(t) \quad (\text{A.1})$$

où $\eta(t)$ est un bruit blanc de variance 1 :

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t') . \quad (\text{A.3})$$

Nous avons dû considérer à plusieurs reprises de telles équations aux cours des chapitres précédents. Nous avons également été confronté à un problème lorsque $\eta(t)$ se présentait sous la forme d'une somme de pics δ : $\eta(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$. La question était : est-ce qu'un terme $b(x(t))\delta(t - t_i)$, qui détermine la variation de $x(t)$ en traversant t_i , doit être interprété comme $b(x(t_i^-))\delta(t - t_i)$, $b(x(t_i^+))\delta(t - t_i)$ ou encore autrement ?

Afin de clarifier cette question considérons l'intégrale : $\int_0^t dW(t') b(x(t'))$ où l'on a introduit la notation $dW(t) = dt \eta(t)$; $W(t) = \int_0^t dt' \eta(t')$ est un processus de Wiener normalisé, caractérisé par les corrélations $\langle W(t)W(t') \rangle = \min(t, t')$. On peut imaginer une définition discrétisée de cette intégrale en découpant l'intervalle $[0, t]$ en N intervalles de largeur $\Delta t_i \equiv t_{i+1} - t_i$ (cf. (Gardiner 1989) pour une définition plus rigoureuse)

$$\int_0^t dW(t') b(x(t')) \simeq \sum_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) b(x(t_i)) \quad (\text{A.4})$$

où $\tau_i = t_i + \varepsilon \Delta t_i$ ($\varepsilon \in [0, 1]$). $x(t)$ est une fonction causale solution de (A.1), et donc statistiquement indépendante de $dW(t')$ pour $t < t'$. Si $\eta(t)$ était une fonction régulière, cette définition serait à rapprocher de la définition de l'intégrale de Riemann, la valeur de ε n'influerait pas sur le résultat. Pour l'intégrale stochastique il n'en est rien, ε détermine de quelle manière $b(x(\tau_i))$ est corrélé avec $W(t_{i+1}) - W(t_i)$. Pour $\varepsilon = 0$ il n'y a pas de corrélation, ce qui implique notamment que la valeur moyenne de l'intégrale est nulle, ce qui n'a pas de raison d'être le cas si $\varepsilon > 0$.

A.2 Les prescriptions d'Ito et de Stratonovich - Relation avec une équation de Fokker-Planck

Les deux exemples présentés montrent que l'équation (A.1) n'est pas correctement définie. Il manque une prescription qui consiste à fixer les corrélations entre la solution de l'équation, $x(t)$, et le bruit $dW(t')$ à temps coïncidants. Il existe différentes prescriptions possibles (qui correspondent pour l'intégrale précédente à différents choix de ε). Une prescription qui apporte beaucoup de simplifications mathématiques est celle d'Ito, elle consiste à choisir que $x(t)$ et $dW(t)$ sont statistiquement indépendants ($\varepsilon = 0$) : $\langle x(t)dW(t) \rangle = 0$. Elle conduit à des règles de calcul différentes des règles usuelles. Par exemple, si $x(t)$ vérifie l'équation

$$dx(t) = a(x(t)) dt + b(x(t)) dW(t) \quad (\text{Ito}) \quad (\text{A.5})$$

la formule de changement de variable de x en $f(x)$ s'écrit :

$$df(x(t)) = \left[f'(x(t)) a(x(t)) + \frac{1}{2} f''(x(t)) b(x(t))^2 \right] dt + f'(x(t)) b(x(t)) dW(t) \quad (\text{Ito}) . \quad (\text{A.6})$$

Cette formule porte le nom de formule d'Ito. Elle permet d'établir l'équation de Fokker-Planck pour la densité de probabilité de la variable $x(t)$: $P(x, t) = \langle \delta(x - x(t)) \rangle$, associée à l'équation (A.1) avec la prescription d'Ito. Pour cela on dérive la valeur moyenne d'une fonction test par rapport au temps : $\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle$. On aboutit finalement à :

$$\partial_t P(x, t) = -\partial_x [a(x)P(x, t)] + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x)^2 P(x, t)] . \quad (\text{A.7})$$

Malgré la simplicité du choix d'Ito, ce dernier ne correspond pas à la plupart des situations physiques généralement rencontrées. Si le bruit blanc $\eta(t)$ est une idéalisation d'un processus physique (une force, ...) caractérisé par une fonction de corrélation régulière mais extrêmement étroite comparée aux autres temps caractérisant l'évolution du système : $\langle \eta^\varepsilon(t) \eta^\varepsilon(t') \rangle = \delta^\varepsilon(t - t')$, on s'attend à ce que la fonction de corrélation soit invariante sous un renversement du temps : $\delta^\varepsilon(t) = \delta^\varepsilon(-t)$. Or le calcul de certaines quantités avec la prescription d'Ito montre qu'elle ne respecte pas cette symétrie. En d'autres termes, si on relie l'équation (A.1) pour un bruit régularisé $\eta^\varepsilon(t)$ à une équation de Fokker-Planck, puis qu'on prend la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on n'aboutit pas à l'équation (A.7). La situation courante en physique correspond à une prescription différente de celle d'Ito, la prescription de Stratonovich. Nous indiquons comment faire le lien entre les deux prescriptions. L'équation différentielle stochastique considérée dans le sens de Stratonovich

$$dx(t) = \alpha(x) dt + \beta(x) dW(t) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (\text{A.8})$$

correspond à l'équation différentielle stochastique au sens d'Ito :

$$dx(t) = \left[\alpha(x) + \frac{1}{2}\beta(x) \partial_x \beta(x) \right] dt + \beta(x) dW(t) \quad (\text{Ito}) \quad (\text{A.9})$$

La correspondance entre les couples de fonctions est donc :

$$\begin{cases} a(x) = \alpha(x) + \frac{1}{2}\beta(x) \partial_x \beta(x) \\ b(x) = \beta(x) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

On vérifie que la convention de Stratonovich correspond bien aux règles de calcul usuelles. En effet, d'après la correspondance (A.10), l'équation dans le sens de Stratonovich associée à (A.6) s'écrit

$$df(x) = \left[f'(x)a(x) + \frac{1}{2}f''(x)b(x)^2 - \frac{1}{2}f'(x)b(x) \partial_f [f'(x)b(x)] \right] dt + f'(x)b(x) dW(t) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (\text{A.11})$$

$$= f'(x)\alpha(x)dt + f'(x)\beta(x) dW(t) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (\text{A.12})$$

$$= f'(x) dx(t) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (\text{A.13})$$

L'équation de Fokker-Planck associée à (A.8) est :

$$\partial_t P(x, t) = -\partial_x [\alpha(x)P(x, t)] + \frac{1}{2}\partial_x [\beta(x)\partial_x [\beta(x)P(x, t)]] . \quad (\text{A.14})$$

Donnons pour finir la généralisation au cas d'un ensemble d'équations couplées faisant intervenir des bruits indépendants. Considérons le système d'équations

$$dx_i = \alpha_i(\vec{x})dt + \beta_{ij}(\vec{x})dW_j(t) \quad (\text{Stratonovich}) , \quad (\text{A.15})$$

qui s'écrit dans le sens d'Ito

$$dx_i = \left[\alpha_i(\vec{x}) + \frac{1}{2}\beta_{kj}(\vec{x}) \partial_k \beta_{ij}(\vec{x}) \right] dt + \beta_{ij}(\vec{x})dW_j(t) \quad (\text{Ito}) \quad (\text{A.16})$$

$$= a_i(\vec{x})dt + b_{ij}(\vec{x})dW_j(t) \quad (\text{Ito}) . \quad (\text{A.17})$$

(Les sommations sur les indices répétés sont implicites ; $\partial_i \equiv \partial_{x_i}$). La formule d'Ito est alors

$$df(\vec{x}) = \left[a_i(\vec{x})\partial_i f(\vec{x}) + \frac{1}{2}b_{ik}(\vec{x})b_{jk}(\vec{x})\partial_i \partial_j f(\vec{x}) \right] dt + b_{ij}(\vec{x})\partial_i f(\vec{x}) dW_j(t) \quad (\text{Ito}) . \quad (\text{A.18})$$

Ces équations sont associées à l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t P(\vec{x}, t) = -\partial_i \alpha_i(\vec{x})P(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}\partial_i \beta_{ik}(\vec{x})\partial_j \beta_{jk}(\vec{x})P(\vec{x}, t) . \quad (\text{A.19})$$

Le cas particulier où il n'y a qu'un seul bruit nous a servi dans les chapitres précédents :

$$dx_i = \alpha_i(\vec{x})dt + \beta_i(\vec{x})dW(t) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (\text{A.20})$$

ou

$$dx_i = a_i(\vec{x})dt + b_i(\vec{x})dW(t) \quad (\text{Ito}) \quad (\text{A.21})$$

avec $a_i = \alpha_i + \frac{1}{2}\beta_j \partial_j \beta_i$ et $b_i = \beta_i$. La formule d'Ito devient :

$$df(\vec{x}) = \left[a_i \partial_i f(\vec{x}) + \frac{1}{2}b_i b_j \partial_i \partial_j f(\vec{x}) \right] dt + b_i \partial_i f(\vec{x}) dW(t) \quad (\text{Ito}) . \quad (\text{A.22})$$

L'équation de Fokker-Planck est :

$$\partial_t P(\vec{x}, t) = -\partial_i \alpha_i(\vec{x})P(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}\partial_i \beta_i(\vec{x})\partial_j \beta_j(\vec{x})P(\vec{x}, t) . \quad (\text{A.23})$$

Article 1

One-Dimensional Disordered Supersymmetric Quantum Mechanics:
A Brief Survey

Alain Comtet and Christophe Texier,

in *Supersymmetry and Integrable Models*, Aratyn, Imbo, Keung and Sukhatme (eds.), Springer,
1998, Chicago IL 1997, p. 313–328.

Article 2

On the distribution of the Wigner time delay in one-dimensional disordered systems

Alain Comtet and Christophe Texier,
J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 8017-8025 (1997).

Article 3

Universality of the Wigner time delay distribution for one-dimensional random potentials

Christophe Texier & Alain Comtet,

Phys. Rev. Lett. **82**(21), 4220-4223 (1999).

Deuxième partie

Transport électronique dans un milieu bidimensionnel à champ magnétique aléatoire

Et c'est accompagné des grondements furieux du tonnerre que Xavier Borissovitch me dit d'une voix lugubre :

- J'ai lu votre roman.

Je tressaillis. C'était donc ça...

Mikhaïl Boulgakov, *Le roman théâtral*.

Chapitre 1

Introduction

Nous allons étudier les propriétés de transport électrique pour un gaz d'électrons sans interaction mutuelle, astreints à se déplacer dans un plan, et soumis à un champ magnétique aléatoire. Le champ magnétique est celui d'une assemblée de vortex magnétiques, répartis aléatoirement sur le plan. Nous reviendrons plus en détail sur ce modèle ultérieurement. Commençons par rappeler quelques idées sur la physique de l'effet Hall qui permettront de mieux mettre en valeur les motivations de notre travail.

Les avancées technologiques de ces dernières décennies ont permis d'ouvrir de nouveaux champs d'investigations, parmi lesquels la physique des systèmes bidimensionnels. L'apparition de nouvelles structures en microélectronique a rendu possible l'étude de gaz d'électrons bidimensionnels qui conduisirent en particulier à la découverte expérimentale de l'effet Hall quantique entier (von Klitzing, Dorda & Pepper 1980), (Tsui & Gossard 1981) puis de l'effet Hall fractionnaire (Tsui, Störmer & Gossard 1982), (Tsui, Störmer, Hwang, Brooks & Naughton 1983). Sans avoir l'ambition d'en donner un panorama complet, rappelons quelques idées importantes concernant l'effet Hall quantique entier. Le lecteur intéressé pourra se référer aux livres ou articles de revue (von Klitzing 1986), (Aoki 1987), (Prange & Girvin 1990), (Janßen *et al.* 1994). La réalisation expérimentale de gaz bidimensionnels passe par l'utilisation de deux types de dispositifs expérimentaux. (*i*) Metal-Oxyde-Semiconducteur (MOS), l'oxyde étant un isolant SiO_2 et le semiconducteur du Si de type p; (*ii*) Hétérostructure formée d'une couche d'isolant $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ dopé par des ions donneurs, contre un semiconducteur GaAs de type p. Le champ électrostatique dû, soit à la différence de potentiels imposée extérieurement dans le cas (*i*), soit à la présence des impuretés ionisées de l'isolant dans le cas (*ii*), crée un puits de potentiel à l'interface entre l'isolant et le semi-conducteur qui piège des électrons formant ainsi le gaz bidimensionnel. Le premier type de dispositif permet d'obtenir un gaz dont la densité est contrôlée par la tension entre le métal et le semiconducteur; elle varie typiquement jusqu'à 10^{17} m^{-2} (Aoki 1987). Pour le deuxième type, la concentration électronique est imposée par la concentration des donneurs de l'isolant; elle est typiquement de l'ordre de $5 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ (Tsui & Gossard 1981). Grâce au mode de fabrication par épitaxie moléculaire qui permet d'obtenir des interfaces régulières, ces échantillons offrent l'avantage d'être faiblement désordonnés comparativement aux MOS. Il faut remarquer que l'obtention d'un gaz essentiellement bidimensionnel est conditionnée par l'utilisation de températures suffisamment basses ($T < 4 \text{ K}$ (von Klitzing 1986)), nécessaires pour geler les modes d'excitation transverses à la surface.

Avant de nous concentrer sur l'effet Hall quantique rappelons quelques éléments concernant l'effet Hall classique, décrit par une théorie classique ou semi-classique des métaux (Ashcroft & Mermin 1976). Considérons un gaz d'électrons bidimensionnel. La vitesse moyenne \vec{v} d'un électron soumis à un champ électrique parallèle au plan et à un champ magnétique perpendiculaire au plan est décrite par l'équation :

$$m_e \frac{d}{dt} \vec{v} = e \vec{v} \times \vec{B} + e \vec{\mathcal{E}}(t) - \frac{m_e}{\tau_0} \vec{v}, \quad (1.1)$$

où le terme de friction rend compte des collisions subies par l'électron, τ_0 étant le temps moyen entre collisions. La densité de courant électrique pour le gaz d'électrons est donnée par $\vec{j} = en_e \vec{v}$ où n_e est la densité d'électrons. Imposons un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}$; la résolution de (1.1) permet de trouver les conductivités longitudinales σ_{xx} et transverses σ_{xy} définies par $j_i(t) = \sigma_{ij}(\omega) \mathcal{E}_{0j} e^{-i\omega t}$. On obtient finalement pour les conductivités à fréquence nulle :

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (2\omega_c \tau_0)^2} \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{en_e}{B} \frac{(2\omega_c \tau_0)^2}{1 + (2\omega_c \tau_0)^2} \quad (1.3)$$

où $\omega_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{eB}{2m_e}$ est la moitié de la fréquence cyclotron et $\sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau_0}{m_e}$ est la conductivité de Drude. Lorsqu'on considère un champ magnétique fort, $\omega_c \tau_0 \gg 1$, la conductivité Hall est proportionnelle au rapport n_e/B :

$$\sigma_{xy} = \frac{en_e}{B} \quad (1.4)$$

et la conductivité longitudinale est donnée par $\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{xy}}{2\omega_c \tau_0}$. Les résistivités correspondantes sont alors

$$\rho_{xx} = \frac{1}{\sigma_0} \quad (1.5)$$

$$\rho_{yx} = \frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{B}{en_e}. \quad (1.6)$$

La force de Lorentz se manifeste donc par l'apparition d'un courant électrique qui se meut dans une direction quasiment perpendiculaire à celle du champ électrique. Donnons un ordre de grandeur des champs magnétiques nécessaires pour respecter la condition $2\omega_c \tau_0 = B\mu \gg 1$, où $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e\tau_0}{m_e}$ est la mobilité du gaz. Les échantillons MOS ont typiquement une mobilité $\mu \sim 1 T^{-1}$ (Aoki 1987); de bons échantillons d'hétérostructures sont caractérisés par des mobilités $\mu \simeq 80 - 100 T^{-1}$ (Tsui *et al.* 1982) (pour $n_e = 1.1 - 1.4 \cdot 10^{15} m^{-2}$).

En 1980, von Klitzing, Dorda & Pepper (1980) ont mesuré la résistivité Hall d'un échantillon (MOS) soumis à un champ magnétique fort ($B = 18T$; $T = 1.5K$). Alors que le résultat classique (1.5,1.6) prévoit une dépendance inversement proportionnelle à la densité d'électrons, ils ont observé une quantification de la résistivité Hall par paliers $\rho_{xy} = \frac{h}{ne^2}$ ($n \in \mathbb{N}$), corrélativement à une disparition de la résistivité longitudinale. Des expériences similaires ont été réalisées pour des échantillons d'hétérostructures en faisant varier le champ magnétique (Tsui & Gossard 1981) et ont conduit à la même conclusion. L'extrême précision avec laquelle les valeurs $\sigma_{xy} = ne^2/h$ sont mesurées est un des aspects remarquables de ces expériences, qui offre des possibilités intéressantes dans le domaine de la métrologie (von Klitzing *et al.* 1980).

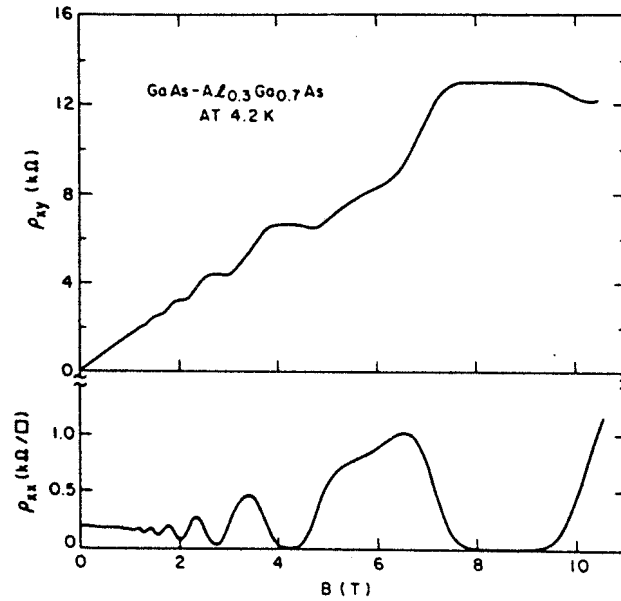


FIG. 1. ρ_{xy} and ρ_{xx} vs B taken from sample No. 1 at 4.2 K. B is perpendicular to the surface.

FIG. 1.1: (Tsui & Gossard 1981).

Différents auteurs ont développé des arguments généraux pour rendre compte de cette quantification : utilisation de l'invariance de jauge (Laughlin 1981), (Avron & Seiler 1985), arguments topologiques pour un électron soumis à un potentiel périodique et à un champ magnétique (Thouless *et al.* 1982), ou arguments utilisant le formalisme de Kubo (Aoki & Ando 1981), (Středa 1982). L'invocation de l'existence d'états de bord (Halperin 1982) permet également de donner une explication simple et élégante de la quantification de la conductance Hall (MacDonald & Středa 1984, Büttiker 1988).

Le désordre joue un rôle essentiel dans la compréhension du phénomène. En son absence, le calcul quantique de la conductivité transverse σ_{xy} pour un champ magnétique homogène (*cf.* chapitre 3) conduit au résultat classique (1.4) proportionnel au rapport n_e/B , ou encore au facteur de remplissage $\nu = \frac{n_e h}{eB} = \frac{N}{N_{LL}}$ qui indique la fraction de niveaux de Landau occupés : $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$ (N_{LL} est la dégénérescence d'un niveau de Landau). Lorsque les électrons sont soumis à un potentiel désordonné, le désordre a pour effet d'élargir les niveaux de Landau en bandes de Landau (Wegner 1983), (Brézin *et al.* 1984), (Klein & Perez 1985), (Macris & Pulé 1992) et de localiser une partie des états des bandes de Landau. Pour interpréter les résultats expérimentaux, on doit supposer qu'au centre des bandes de Landau se trouvent les états délocalisés qui participent à la conduction, alors que les états localisés se situent dans les bords de bandes (Dorlas, Macris & Pulé 1995). Il est important de noter que la conductivité Hall intègre les contributions des états quantiques sous le niveau de Fermi. D'autre part, comme le suggèrent les expériences, l'effet Hall quantique est une propriété de très basse température. En faisant varier la densité d'électrons, le niveau de Fermi traverse alternativement des zones d'états localisés et des zones d'états délocalisés. La conductivité ne croît que lorsque le niveau de Fermi traverse les zones d'états délocalisés, ce qui arrive pour les facteurs de remplissage proches d'un

demi-entier, si on suppose que l'élargissement du niveau est symétrique. Cet argument permet de comprendre l'existence des plateaux, mais ne suffit pas à expliquer pourquoi, alors qu'en principe seule une partie des états d'un niveau contribuent, leur contribution e^2/h est précisément la même que celle de tous les états du niveau de Landau en l'absence du désordre. Une réponse à cette question peut être apportée par les arguments généraux évoqués précédemment (Aoki & Ando 1981), (Laughlin 1981), (Středa 1982), (Thouless *et al.* 1982), (Avron & Seiler 1985), (Büttiker 1988).

Le modèle d'impuretés magnétiques qui nous intéressera par la suite possède certaines caractéristiques communes avec les systèmes Hall : un champ magnétique et la présence de désordre (ce dernier est introduit dans la définition du champ magnétique, et non dans celle d'un potentiel scalaire). Ses propriétés spectrales, que nous rappellerons, présentent les caractéristiques évoquées ci-dessus. D'où l'intérêt que nous avons porté au transport électronique dans ce modèle.

Le chapitre 2 donnera des propriétés générales des systèmes magnétiques bidimensionnels. Ce chapitre sera l'occasion d'introduire les observables d'intérêt et le formalisme utilisé pour les calculer.

Nous avons abordé l'étude du transport dans le modèle à champ magnétique aléatoire par une approche perturbative partant de la théorie de champ moyen. Cette dernière est décrite par le modèle de Landau (Landau 1930), (Landau & Lifchitz 1966a, §112) auquel nous consacrerons le **chapitre 3**. Nous rappellerons un certain nombre de résultats connus et préciserons des notations utiles. Nous présenterons un moyen particulièrement rapide d'obtenir les conductivités, qui se révélera suggestif pour les modèles étudiés par la suite.

Le chapitre 4 concernera une configuration de champ magnétique avec un vortex (seul ou avec champ magnétique homogène). Outre leur intérêt propre, ces problèmes contiennent des informations relatives au modèle d'impuretés magnétiques.

Chapitre 5. Nous aurons alors introduit tous les éléments utiles à notre analyse, et serons en mesure d'aborder l'étude de la conductivité Hall du modèle d'impuretés magnétiques. Nous rappellerons brièvement les propriétés spectrales de ce modèle (Desbois, Furtlehner & Ouvry 1995), *i.e.* l'existence d'un spectre de Landau pour le champ magnétique moyen avec des niveaux de Landau élargis par le désordre, caractéristiques de l'effet Hall quantique. Les niveaux de Landau élargis par le désordre apparaissent pour les petites valeurs de la constante de couplage, ce qui a justifié une étude perturbative de la conductivité Hall, que nous présenterons dans le dernier chapitre¹.

¹Notons l'existence de travaux portant sur l'étude des conductivités en présence d'un champ magnétique homogène et d'un potentiel scalaire aléatoire (Bastin, Lewiner, Betbeder-Matibet & Nozières 1971), (Ando, Matsumoto & Uemura 1975). Les auteurs utilisent des méthodes de resommation de certaines classes de diagrammes.

Chapitre 2

Propriétés générales des hamiltoniens magnétiques

2.1 Hamiltoniens magnétiques : définitions, propriétés

Considérons l'hamiltonien de Pauli

$$H_P = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 - \sigma_z \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{g_e}{2} B(\vec{r}) \quad (2.1)$$

pour des fermions de spin 1/2 non relativistes en champ magnétique. Le facteur gyromagnétique g_e est pris égal à 2 pour respecter l'invariance sous le groupe de Galilée (Lévy-Leblond 1967).

On choisira un système d'unités tel que $\hbar = m_e = 1$.

Le potentiel vecteur peut toujours s'écrire comme $eA_i = -\epsilon_{ij}\partial_j\Phi$; pour le problème de Landau dans la jauge symétrique, $\Phi^L = \frac{1}{2}\omega_c r^2$ et pour le vortex, $\Phi^{\text{vortex}} = \alpha \ln r$. La fonction Φ détermine le potentiel vecteur

$$e\vec{A}(\vec{r}) = \vec{k} \times \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad (2.2)$$

(\vec{k} est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan) et le champ magnétique

$$eB(\vec{r}) = \Delta\Phi(\vec{r}) . \quad (2.3)$$

Inversement¹, se donner le champ magnétique permet d'obtenir le potentiel vecteur ou Φ à l'aide des relations

$$e\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{r}' \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} eB(\vec{r}') \quad (2.4)$$

et

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int d\vec{r}' e\vec{A}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{r}' \ln |\vec{r} - \vec{r}'| eB(\vec{r}'). \quad (2.5)$$

On introduit les deux opérateurs covariants

$$\Pi_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} (p_x - eA_x) \pm i(p_y - eA_y). \quad (2.6)$$

¹Rappelons que la fonction de Green du rotationnel $\vec{\nabla} \times$ est $\frac{\vec{k} \times \vec{r}}{2\pi|\vec{r}|^2}$ et la fonction de Green du Laplacien (en $d=2$) Δ est $\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r}|$.

On utilisera les notations complexes : $z = x + iy$ ($\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$). Les opérateurs covariants s'expriment alors comme

$$\Pi_+ = -2i(\partial_z + \partial_z\Phi) \quad (2.7)$$

$$\Pi_- = -2i(\partial_z - \partial_z\Phi) \quad (2.8)$$

et satisfont la relation de commutation

$$[\Pi_+, \Pi_-] = 2eB(\vec{r}) . \quad (2.9)$$

La forme supersymétrique de l'hamiltonien (2.1) apparaît explicitement lorsqu'on écrit

$$H_P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Pi_- \Pi_+ & 0 \\ 0 & \Pi_+ \Pi_- \end{pmatrix} . \quad (2.10)$$

Notons la propriété suivante valable pour toute fonction $f(x)$:

$$\Pi_+ f(\Pi_- \Pi_+) = f(\Pi_+ \Pi_-) \Pi_+ \quad (2.11)$$

$$\Pi_- f(\Pi_+ \Pi_-) = f(\Pi_- \Pi_+) \Pi_- \quad (2.12)$$

qui peut être démontrée simplement pour une fonction développable en série de Taylor en remarquant que $\Pi_+(\Pi_- \Pi_+)^n = (\Pi_+ \Pi_-)^n \Pi_+$.

On introduit les hamiltoniens correspondant aux secteurs de spin up et down :

$$H_u = \frac{1}{2} \Pi_- \Pi_+ \quad (2.13)$$

$$H_d = \frac{1}{2} \Pi_+ \Pi_- ; \quad (2.14)$$

les deux propriétés précédentes impliquent les relations

$$\Pi_+ e^{-\beta H_u} = e^{-\beta H_d} \Pi_+ \quad (2.15)$$

$$\Pi_- e^{-\beta H_d} = e^{-\beta H_u} \Pi_- . \quad (2.16)$$

2.2 Aimantation et courant permanent

Montrons comment définir en toute généralité une aimantation ou un courant permanent pour une configuration de champ magnétique quelconque.

Lorsqu'on considère un système de charges électriques sans interaction, l'aimantation du système peut avoir deux origines. Une aimantation orbitale, produite par les courants électriques mis en mouvement par le champ magnétique, s'oppose au champ magnétique (loi de Lenz). D'autre part, si les charges électriques possèdent un moment magnétique intrinsèque, l'alignement des moments magnétiques sur le champ extérieur produit une aimantation paramagnétique dans la même direction que le champ.

On s'intéresse à l'aimantation d'un électron ou d'un gaz d'électrons décrit par l'hamiltonien (2.1) (notons que l'introduction d'un potentiel scalaire dans (2.1) ne changerait rien à la discussion).

On raisonnera en terme de problème à un électron. La moyenne thermique d'une observable q sera une moyenne de Boltzmann pour le problème à un corps : $\langle q \rangle_\beta = \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr} \{ e^{-\beta H} q \}$. Si on

s'intéresse à la valeur moyenne de cette observable dans le problème "second quantifié", celle-ci est reliée à la précédente à condition que l'opérateur Q s'exprime comme la somme d'opérateurs à un corps : $Q = \sum_i q^{(i)}$. La densité d'électrons et la densité de courant sont de tels opérateurs. La moyenne de Q , $\text{Tr} \{f(H)q\}$, est reliée à la moyenne de Boltzmann par les relations suivantes : (i) à $T \neq 0$:

$$\text{Tr} \{f(H)q\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{n\beta\mu} \text{Tr} \left\{ e^{-n\beta H} q \right\} \quad (2.17)$$

(ii) à $T = 0$:

$$\text{Tr} \{f(H)q\} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0^+ \\ \epsilon' \rightarrow 0^+}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{iE_F\tau}}{i\tau + \eta} \text{Tr} \left\{ e^{-(i\tau + \epsilon')H} q \right\} . \quad (2.18)$$

L'opérateur densité de courant est défini comme l'observable couplée à un potentiel vecteur \vec{A}_0 extérieur. Si en effet on ajoute un champ extérieur \vec{A}_0 à l'hamiltonien (2.1), le terme d'interaction entre le champ extérieur et les observables de l'électron s'écrit :

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{2} \left(\vec{v} \cdot \vec{A}_0 + \vec{A}_0 \cdot \vec{v} \right) - \frac{e}{2} \sigma_z \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 \quad (2.19)$$

où $\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p} - e\vec{A}$ est l'opérateur vitesse. Si on introduit une relation de fermeture $\int d\vec{r}' |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}'| = 1$, \vec{A}_0 devient une fonction du paramètre \vec{r} et non plus une fonction de l'opérateur position de l'électron. Dans le formalisme à un corps, $n(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|$ définit l'opérateur de densité d'électron. On obtient donc

$$H_{\text{int}} = - \int d\vec{r} \left(\vec{j}(\vec{r}) + \vec{j}^{\text{spin}}(\vec{r}) \right) \cdot \vec{A}_0(\vec{r}) \quad (2.20)$$

où

$$\vec{j}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e}{2} (n(\vec{r}) \vec{v} + \vec{v} n(\vec{r})) \quad (2.21)$$

est l'opérateur de densité de courant orbital et

$$\vec{j}^{\text{spin}}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{e}{2} \sigma_z \vec{k} \times \vec{\nabla} n(\vec{r}) \quad (2.22)$$

est l'opérateur de densité de courant de spin.

Ces opérateurs permettent de définir l'aimantation orbitale (diamagnétique) :

$$M_{\beta}^{\text{orb}} = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \vec{r} \times \langle \vec{j}(\vec{r}) \rangle_{\beta} \quad (2.23)$$

et l'aimantation de spin (paramagnétique) :

$$M_{\beta}^{\text{spin}} = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \vec{r} \times \langle \vec{j}^{\text{spin}}(\vec{r}) \rangle_{\beta} = \frac{e}{2} \sigma_z \int d\vec{r} \langle n(\vec{r}) \rangle_{\beta} = \frac{e}{2} \sigma_z . \quad (2.24)$$

L'aimantation totale s'écrit donc

$$M_{\beta} = \frac{e}{2Z_{\beta}} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} (\vec{r} \times \vec{v} + \sigma_z) \right\} . \quad (2.25)$$

Une autre façon d'obtenir l'aimantation du système est d'ajouter un champ magnétique uniforme B' et de dériver le potentiel thermodynamique par rapport à B' . En effet, si on dérive le nouvel hamiltonien $H^{B'}$ par rapport au champ fictif B' , on aboutit à $\frac{\partial}{\partial B'} H^{B'} = -\frac{e}{2} (\vec{r} \times \vec{v} + \sigma_z)$. Donc

$$M_{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B'} \ln Z_{\beta}(B') \Big|_{B'=0} = M_{\beta}^{\text{orb}} + \sigma_z \frac{e}{2} \quad (2.26)$$

où $Z_\beta(B') \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H^{B'}} \right\}$. Dans une description grand canonique, il suffirait de remplacer l'énergie libre par le grand potentiel dans (2.26).

Si on considère un anneau traversé par un flux magnétique, la présence du flux magnétique engendre un courant dans l'anneau, appelé courant permanent (Bloch 1965), (Büttiker, Imry & Landauer 1983), (Cheung, Gefen, Riedel & Shih 1988). Dans un problème bidimensionnel, on peut définir le courant permanent autour d'un point \vec{r}_0 comme le courant électrique qui traverse une demi-droite infinie issue de ce point. Le courant permanent dépendra donc du point \vec{r}_0 et de l'angle θ entre la demi-droite et l'horizontale. Pour simplifier les expressions, choisissons dans un premier temps $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Comme l'aimantation, le courant permanent se sépare en une contribution orbitale, et une contribution de spin :

$$I_\beta^{\text{orb}}(\vec{r}_0 = 0, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dr \langle j_\theta(r, \theta) \rangle_\beta, \quad (2.27)$$

où $\langle j_\theta(r, \theta) \rangle_\beta$ est la densité de courant orthoradiale moyenne, et

$$I_\beta^{\text{spin}}(\vec{r}_0 = 0, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dr \langle j_\theta^{\text{spin}}(r, \theta) \rangle_\beta; \quad (2.28)$$

la densité orthoradiale de courant de spin est $j_\theta^{\text{spin}}(r, \theta) = -\frac{e}{2}\sigma_z \nabla_r n(r, \theta)$, ce qui conduit à

$$I_\beta^{\text{spin}}(\vec{r}_0 = \vec{0}, \theta) = \frac{e}{2}\sigma_z \langle n(\vec{0}) \rangle_\beta. \quad (2.29)$$

Pour un système invariant par rotation autour du point \vec{r}_0 , il est indifférent de moyenner par rapport à l'angle θ , si bien que

$$I_\beta^{\text{orb}}(\vec{r}_0 = 0) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{r} \frac{1}{r} \langle j_\theta(\vec{r}) \rangle_\beta. \quad (2.30)$$

En rétablissant la dépendance en \vec{r}_0 , le courant permanent pour le problème invariant par rotation autour de \vec{r}_0 devient

$$I_\beta^{\text{orb}}(\vec{r}_0) = \frac{e}{2\pi Z_\beta} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right\}. \quad (2.31)$$

En dérivant le potentiel thermodynamique par rapport à un champ magnétique fictif on obtient l'aimantation; on aimerait suivre la même procédure pour obtenir le courant permanent. À cet fin on ajoute un tube de flux fictif $\phi' = \alpha' \phi_0$ en \vec{r}_0 dans le système (*cf.* chapitre 4). Si on dérive le nouvel hamiltonien $H^{\alpha'}$ par rapport au flux on obtient : $\frac{\partial}{\partial \alpha'} H^{\alpha'} = -\frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \vec{v} - \sigma_z \pi \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Dériver le potentiel thermodynamique par rapport au flux du vortex fictif permet donc d'obtenir le courant orbital :

$$I_\beta^{\text{orb}}(\vec{r}_0) = \frac{e}{2\pi\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha'} \ln Z_\beta(\alpha') \Big|_{\alpha'=0} - \frac{e\sigma_z}{2Z_\beta} G_\beta(\vec{r}_0, \vec{r}_0), \quad (2.32)$$

où $Z_\beta(\alpha')$ est la fonction de partition en présence du vortex fictif et $G_\beta(\vec{r}_0, \vec{r}_0)$ le propagateur en l'absence du vortex. En dérivant le potentiel thermodynamique, l'interaction de contact de l'hamiltonien (interaction du spin de l'électron avec le champ magnétique singulier du vortex) fait apparaître le courant permanent de spin :

$$I_\beta^{\text{spin}}(\vec{r}_0) = \frac{e}{2}\sigma_z \langle n(\vec{r}_0) \rangle_\beta = \frac{e\sigma_z}{2Z_\beta} G_\beta(\vec{r}_0, \vec{r}_0). \quad (2.33)$$

Notons que le résultat (2.32) doit être indépendant de la prescription choisie pour le vortex fictif, qui peut être attractive pour $\alpha'\sigma_z > 0$ ou répulsive pour $\alpha'\sigma_z < 0$ (*cf.* chapitre 4).

Relation entre le courant permanent et l'aimantation

Lorsqu'on considère un anneau de rayon R parcouru par un courant permanent, ce dernier est relié à l'aimantation par $M = I \pi R^2$. Qu'en est-il pour un système bidimensionnel ?

L'aimantation étant une quantité intégrée sur le volume, ne dépendant donc pas d'une position particulière \vec{r}_0 , il est clair qu'aimantation et courant permanent ne pourront être reliés que dans le cas de systèmes invariants par rotation et par translation. Pour de tels systèmes il est indifférent de moyenner (2.31) par rapport à \vec{r}_0 . Pour la partie orbitale on aboutit à

$$\frac{1}{V} \int d\vec{r}_0 I_\beta^{\text{orb}}(\vec{r}_0) = \frac{e}{2\pi} \frac{1}{V} \int d\vec{r}_0 \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right\} = \frac{e}{2V} \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} \vec{r} \times \vec{v} \right\}. \quad (2.34)$$

Le courant permanent orbital est proportionnel à la partie orbitale de l'aimantation

$$I^{\text{orb}} = \frac{1}{V} M^{\text{orb}}. \quad (2.35)$$

La relation est encore plus simple à démontrer pour la contribution du courant de spin (2.33), on a donc aussi

$$I = \frac{1}{V} M. \quad (2.36)$$

La relation (2.35) est analogue à celle obtenue pour un anneau, et se comprend de la manière suivante : l'invariance par translation et par rotation implique que les densités de courants électriques se compensent localement dans le système, sauf sur les bords. On rejoint donc une situation comparable à celle d'un anneau pour lequel $M = IV$. On en conclut que le courant permanent est alors sous dominant en volume comparativement à l'aimantation.

2.3 Conductivités

Pour un système invariant par rotation, les composantes du tenseur de conductivité satisfont les relations $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. En utilisant ces propriétés, on peut symétriser les expressions qui donnent les conductivités. Introduisons les combinaisons linéaires

$$\sigma^\pm(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{xx}(t) \pm i\sigma_{yx}(t). \quad (2.37)$$

Si la moyenne thermique est de type Boltzmann, on peut écrire d'après (A.36)

$$\sigma_\beta^+(t) = \frac{ie^2}{2V} Y(t) \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} [\Pi_+(t), \bar{z}] \right\} \quad (2.38)$$

et

$$\sigma_\beta^-(t) = \frac{ie^2}{2V} Y(t) \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} [\Pi_-(t), z] \right\} \quad (2.39)$$

où $Y(t)$ est la fonction de Heaviside et Z_β est la fonction de partition. À l'aide de (A.21) on peut relier ces fonctions de réponse du problème à un électron à des fonctions de réponse pour un gaz d'électrons à température nulle

$$\sigma_{E_F}^\pm(t) = \lim_{\epsilon', \eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{iE_F\tau}}{i\tau + \eta} \left(Z_\beta \sigma_\beta^\pm(t) \right) \Big|_{\beta=i\tau+\epsilon'}. \quad (2.40)$$

En termes des propagateurs, ces expressions deviennent :

$$\sigma_{\beta}^{+}(t) = \frac{ie^2}{2V} Y(t) \frac{1}{Z_{\beta}} \int dz d\bar{z} dz' d\bar{z}' \left(\underset{\rightarrow}{\Pi_{+}} G_{it}(z, z') \bar{z}' G_{\beta-it}(z', z) - (it \rightarrow it + \beta) \right) \quad (2.41)$$

et

$$\sigma_{\beta}^{-}(t) = \frac{ie^2}{2V} Y(t) \frac{1}{Z_{\beta}} \int dz d\bar{z} dz' d\bar{z}' \left(\underset{\rightarrow}{\Pi_{-}} G_{it}(z, z') z' G_{\beta-it}(z', z) - (it \rightarrow it + \beta) \right). \quad (2.42)$$

Nous constaterons qu'il peut être plus astucieux de calculer la dérivée par rapport au temps de $\sigma^{\pm}(t)$ plutôt que $\sigma^{\pm}(t)$ lui-même. Dans la situation de spin up, la relation $[H_u, \Pi_{+}] = -eB\Pi_{+}$ suggère qu'il est commode de calculer

$$\dot{\sigma}_{\beta}^{+}(t) = \frac{e^2}{V} \delta(t) + \frac{e^2}{2V} Y(t) \frac{1}{Z_{\beta}^u} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H_u} [(eB \Pi_{+})(t), \bar{z}] \right\} \quad (2.43)$$

et si le spin est down, $[H_d, \Pi_{-}] = eB\Pi_{-}$ suggère de considérer

$$\dot{\sigma}_{\beta}^{-}(t) = \frac{e^2}{V} \delta(t) - \frac{e^2}{2V} Y(t) \frac{1}{Z_{\beta}^d} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H_d} [(eB \Pi_{-})(t), z] \right\}. \quad (2.44)$$

Nous nous intéresserons aux conductivités statiques, c'est-à-dire aux transformées de Fourier des précédentes fonctions à fréquence nulle. Les relations (A.33) et (A.37) conduisent à

$$\sigma_{\beta, E_F}^{-}(\omega) = \frac{ie^2}{V\omega} + \frac{e^2}{2V\omega} \int_0^{\infty} dt e^{(i\omega - \epsilon)t} \langle [\Pi_{-}(t), \Pi_{+}] \rangle_{\beta, E_F} = \frac{ie^2}{2V} \int_0^{\infty} dt e^{(i\omega - \epsilon)t} \langle [\Pi_{-}(t), z] \rangle_{\beta, E_F} \quad (2.45)$$

où la moyenne est soit Boltzmann $\langle \dots \rangle_{\beta}$, soit Fermi-Dirac $\langle \dots \rangle_{E_F}$.

Pour obtenir les parties réelles et imaginaires des conductivités transverse et longitudinale on utilise

$$\frac{1}{2} [\sigma^{\pm}(\omega) + \sigma^{\pm}(-\omega)] = \text{Re } \sigma_{xx}(\omega) \pm i \text{Re } \sigma_{yx}(\omega) \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{2} [\sigma^{\pm}(\omega) - \sigma^{\pm}(-\omega)] = \mp \text{Im } \sigma_{yx}(\omega) + i \text{Im } \sigma_{xx}(\omega). \quad (2.47)$$

2.4 Transformations non unitaires pour la théorie de perturbation

2.4.1 Formalisme \tilde{H}

Pour traiter le champ magnétique de l'hamiltonien (2.1) perturbativement, il est intéressant d'utiliser les transformations non unitaires pour les hamiltoniens H_u et H_d :

$$U_u(\vec{r}) = e^{-\Phi(\vec{r})} \quad (2.48)$$

$$U_d(\vec{r}) = e^{\Phi(\vec{r})}, \quad (2.49)$$

qui correspondent aux redéfinitions des fonctions d'onde :

$$\psi_u(\vec{r}) = U_u(\vec{r}) \tilde{\psi}_u(\vec{r}) \quad (2.50)$$

$$\psi_d(\vec{r}) = U_d(\vec{r}) \tilde{\psi}_d(\vec{r}). \quad (2.51)$$

Dans le cas du vortex, nous verrons que cette transformation correspond à extraire le comportement à courte distance de la fonction d'onde, tandis que dans le cas du champ magnétique homogène, elle extrait le comportement à grande distance. Les opérateurs covariants se transforment comme :

$$U_u^{-1} \Pi_+ U_u = \Pi_+^0 \quad (2.52)$$

$$U_u^{-1} \Pi_- U_u = \Pi_-^0 + 4i\partial_z \Phi \quad (2.53)$$

$$U_d^{-1} \Pi_+ U_d = \Pi_+^0 - 4i\partial_z \Phi \quad (2.54)$$

$$U_d^{-1} \Pi_- U_d = \Pi_-^0 \quad (2.55)$$

où Π_+^0 et Π_-^0 sont les opérateurs covariants du problème libre. Les hamiltoniens H_u et H_d deviennent

$$\tilde{H}_u = \frac{1}{2} \Pi_-^0 \Pi_+^0 + 2i\partial_z \Phi \Pi_+^0 \quad (2.56)$$

$$\tilde{H}_d = \frac{1}{2} \Pi_+^0 \Pi_-^0 - 2i\partial_z \Phi \Pi_-^0 . \quad (2.57)$$

Ces deux hamiltoniens peuvent encore s'écrire :

$$\tilde{H}_u = \frac{1}{2} \Pi_-^0 \Pi_+^0 - \bar{A} \Pi_+^0 \quad (2.58)$$

$$\tilde{H}_d = \frac{1}{2} \Pi_+^0 \Pi_-^0 - A \Pi_-^0 . \quad (2.59)$$

où $A \equiv A_x + iA_y = 2i\partial_z \Phi$.

2.4.2 Formalisme \tilde{H}'

Considérons un champ magnétique aléatoire invariant par translation ; dans ce cas, la fonction Φ , lorsqu'elle est moyennée sur le désordre, s'identifie à celle du problème de Landau calculée pour le champ magnétique moyen $\langle B \rangle$:

$$\langle \Phi(\vec{r}) \rangle = \Phi^{(L)}(\vec{r}). \quad (2.60)$$

Il se révèle alors intéressant d'introduire une variante de la transformation précédente, permettant d'extraire le champ moyen. Considérons les redéfinitions des fonctions d'onde :

$$\psi_u(\vec{r}) = U'_u(\vec{r}) \tilde{\psi}'_u(\vec{r}) \quad (2.61)$$

$$\psi_d(\vec{r}) = U'_d(\vec{r}) \tilde{\psi}'_d(\vec{r}) \quad (2.62)$$

où

$$U'_u(\vec{r}) = e^{\langle \Phi(\vec{r}) \rangle - \Phi(\vec{r})} \quad (2.63)$$

$$U'_d(\vec{r}) = e^{-\langle \Phi(\vec{r}) \rangle + \Phi(\vec{r})}. \quad (2.64)$$

Les deux opérateurs covariants (2.7) sont modifiés comme

$$U'^{-1}_u \Pi_+ U'_u = \Pi_+^{(L)} \quad (2.65)$$

$$U'^{-1}_u \Pi_- U'_u = \Pi_-^{(L)} + 4i(\partial_z \Phi - \langle \partial_z \Phi \rangle) \quad (2.66)$$

$$U'^{-1}_d \Pi_+ U'_d = \Pi_+^{(L)} - 4i(\partial_z \Phi - \langle \partial_z \Phi \rangle) \quad (2.67)$$

$$U'^{-1}_d \Pi_- U'_d = \Pi_-^{(L)} \quad (2.68)$$

où $\Pi_+^{(L)}$ et $\Pi_-^{(L)}$ sont les deux opérateurs covariants de l'hamiltonien de Landau pour le champ magnétique moyen $\langle B \rangle$. Les deux hamiltoniens deviennent donc

$$\tilde{H}'_u = \frac{1}{2} \Pi_-^{(L)} \Pi_+^{(L)} + 2i (\partial_z \Phi - \langle \partial_z \Phi \rangle) \Pi_+^{(L)} \quad (2.69)$$

$$\tilde{H}'_d = \frac{1}{2} \Pi_+^{(L)} \Pi_-^{(L)} - 2i (\partial_{\bar{z}} \Phi - \langle \partial_{\bar{z}} \Phi \rangle) \Pi_-^{(L)} . \quad (2.70)$$

Il est naturel d'introduire le propagateur transformé

$$\tilde{G}'_\beta(z, z') \stackrel{\text{def}}{=} \langle z | e^{-\beta \tilde{H}'} | z' \rangle = U'^{-1}(z) G_\beta(z, z') U'(z') . \quad (2.71)$$

Si on considère des observables qui sont exprimées comme des traces (la fonction de partition, l'aimantation, les conductivités, . . .), il sera équivalent les calculer avec les hamiltoniens H , \tilde{H} ou \tilde{H}' . En théorie de perturbation, le désordre n'apparaît que linéairement dans les hamiltoniens transformés \tilde{H} et \tilde{H}' , ce qui offre une simplification notable de la série diagrammatique.

Chapitre 3

Champ magnétique homogène

3.1 La jauge de Landau

Rappelons que $\omega_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{eB}{2m_e}$ est la moitié de la fréquence cyclotron. Nous pouvons choisir par convention $eB > 0$, sans perdre en généralité.

La jauge de Landau est une jauge asymétrique telle que

$$\vec{A}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

L'hamiltonien s'exprime comme

$$H_L = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(p_y - eBx)^2. \quad (3.2)$$

Dans ce chapitre, nous ne prendrons pas en compte le terme d'interaction du spin avec le champ, qui ne produit qu'un décalage des énergies de $\pm\omega_c$ pour un spin down ou up.

L'hamiltonien commute avec le générateur des translations selon y et les fonctions propres sont donc de la forme $\psi(x, y) = e^{iky}\chi(x)$. L'équation de Schrödinger devient

$$\frac{1}{2} [p_x^2 + (k - eBx)^2] \chi(x) = E\chi(x). \quad (3.3)$$

Ce choix de jauge nous ramène à un problème libre suivant y et d'oscillateur harmonique suivant x . L'impulsion suivant y apparaît reliée au centre de l'oscillateur harmonique $x_c = \frac{k}{2\omega_c}$. Les états sont indicés par deux nombres quantiques n et k respectivement discret et continu. Le spectre est un spectre d'oscillateur harmonique

$$E_{n,k} = 2\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

pour lequel chaque niveau est infiniment dégénéré, ce qui reflète qu'une translation d'une orbite cyclotron ne coûte pas d'énergie. Les fonctions d'onde sont

$$\psi_{n,k}(x, y) = \left(\frac{2\omega_c}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\omega_c \left(x - \frac{k}{2\omega_c} \right)^2} H_n \left(\sqrt{2\omega_c} \left(x - \frac{k}{2\omega_c} \right) \right) \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.5)$$

où $H_n(z)$ sont les polynômes d'Hermite. Le facteur $\sqrt{2\omega_c}$ est l'inverse du rayon cyclotron $a_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ qu'aurait une orbite classique d'énergie $\hbar\omega_c$.

Si l'on se place sur un plan de grandes dimensions $L_x \times L_y$ ($\gg a_B^2$) et que l'on impose des conditions aux limites périodiques dans la direction y , l'impulsion ne peut prendre que des valeurs discrètes $k = m \frac{2\pi}{L_y}$ pour $m \in \mathbb{Z}$. D'autre part k est relié au centre de l'oscillateur harmonique par la relation $x_c = \frac{k}{eB} = m \frac{2\pi}{eBL_y}$. Si on exclut les solutions strictement évanescentes et que l'on contraint le centre du paquet d'onde à rester dans l'intervalle $0 < x_c < L_x$, m ne peut plus accéder qu'à un nombre fini de valeurs : $m = 1, \dots, E \left[\frac{eBL_x L_y}{2\pi} \right]$. Sur un plan de volume $V = L_x L_y$, la dégénérescence d'un niveau de Landau (LL) est donc

$$N_{LL} = \frac{eBV}{h} \quad (3.6)$$

où h est la constante de Planck. La divergence de la dégénérescence d'un niveau de Landau est donc une divergence volumique ; on peut vérifier que la densité d'états du problème libre est atteinte dans la limite où le champ magnétique devient nul, lorsque les niveaux de Landau se confondent. En effet, dans la limite $B \rightarrow 0$ la densité d'états est égale à la densité de niveaux de Landau multipliée par la dégénérescence d'un niveau de Landau : $\frac{1}{2\omega_c} N_{LL} = \frac{V}{2\pi} = \rho_0$.

Remarquons que la dégénérescence d'un niveau de Landau, $N_{LL} = \frac{BV}{\phi_0}$, n'est autre que le rapport du flux total qui traverse le plan et du quantum de flux $\phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{e}$. Cette dégénérescence est reliée au théorème Aharonov-Casher¹ dans le cas particulier d'une configuration de champ magnétique uniforme.

3.2 La jauge symétrique

3.2.1 Opérateurs de création et annihilation

Dans la jauge symétrique le potentiel vecteur prend la forme

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}. \quad (3.7)$$

Il est commode d'introduire les opérateurs a et b ainsi que leurs conjugués hermitiques :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\omega_c}} \left(-\partial_{\bar{z}} - \frac{\omega_c}{2} z \right) \quad (3.8)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\omega_c}} \left(\partial_z - \frac{\omega_c}{2} \bar{z} \right) \quad (3.9)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{\omega_c}} \left(\partial_z + \frac{\omega_c}{2} \bar{z} \right) \quad (3.10)$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\omega_c}} \left(-\partial_{\bar{z}} + \frac{\omega_c}{2} z \right) \quad (3.11)$$

on peut aisément vérifier que ces opérateurs vérifient les relations de commutations suivantes

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1 \quad (3.12)$$

¹L'hamiltonien (2.1) possède des modes zéros (états d'énergie nulle). Leur nombre est donné par le flux magnétique ϕ_{tot} qui traverse le système : $E \left[\frac{|\phi_{\text{tot}}|}{\phi_0} \right] - 1$ (Aharonov & Casher 1979). Notons que ce théorème doit être corrigé lorsqu'on considère des configurations de champ magnétique singulière, comme celle décrite par un potentiel Aharonov-Bohm (Moroz 1995).

et

$$[a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0, \quad (3.13)$$

qui sont celles de deux couples d'opérateurs de création et d'annihilation de deux oscillateurs harmoniques indépendants. On peut choisir d'indicer les états par les deux nombres quantiques n et \tilde{n} , respectivement valeurs propres de $a^\dagger a$ et $b^\dagger b$.

L'opérateur de moment orbital $L_z = z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ s'exprime à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation, comme

$$L_z = b^\dagger b - a^\dagger a \quad (3.14)$$

et l'hamiltonien comme

$$H_L = 2\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (3.15)$$

L'énergie est donc indépendante du nombre quantique \tilde{n} .

3.2.2 Construction du spectre

La construction des états se fait de la manière usuelle en exploitant

$$a |n; \tilde{n}\rangle = \sqrt{n} |n-1; \tilde{n}\rangle \quad (3.16)$$

$$a^\dagger |n; \tilde{n}\rangle = \sqrt{n+1} |n+1; \tilde{n}\rangle \quad (3.17)$$

$$b |n; \tilde{n}\rangle = \sqrt{\tilde{n}} |n; \tilde{n}-1\rangle \quad (3.18)$$

$$b^\dagger |n; \tilde{n}\rangle = \sqrt{\tilde{n}+1} |n; \tilde{n}+1\rangle \quad (3.19)$$

et en partant de l'état annihilé par a et b : $a|0;0\rangle = 0$ et $b|0;0\rangle = 0$

$$|n; \tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\tilde{n}!}} (a^\dagger)^n (b^\dagger)^{\tilde{n}} |0;0\rangle. \quad (3.20)$$

Ces états ont une énergie $E_{n,\tilde{n}} = 2\omega_c(n+1/2)$ et un moment orbital $m = \tilde{n} - n$.

Il se révèle plus intéressant de classer les états par leur moment orbital m et le niveau de Landau n auxquels ils appartiennent; nous utiliserons dorénavant la notation

$$|n, m\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |n; \tilde{n} = n + m\rangle. \quad (3.21)$$

En adoptant cette notation, les opérateurs de création et d'annihilation agissent sur les états de la manière suivante

$$a |n, m\rangle = \sqrt{n} |n-1, m+1\rangle \quad (3.22)$$

$$a^\dagger |n, m\rangle = \sqrt{n+1} |n+1, m-1\rangle \quad (3.23)$$

$$b |n, m\rangle = \sqrt{n+m} |n, m-1\rangle \quad (3.24)$$

$$b^\dagger |n, m\rangle = \sqrt{n+m+1} |n, m+1\rangle, \quad (3.25)$$

donc

$$|n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!(n+m)!}} (a^\dagger)^n (b^\dagger)^{n+m} |0,0\rangle. \quad (3.26)$$

Les états d'un niveau de Landau n sont indicés par des moments orbitaux allant de $-n$ jusqu'à l'infini (figure 3.1).

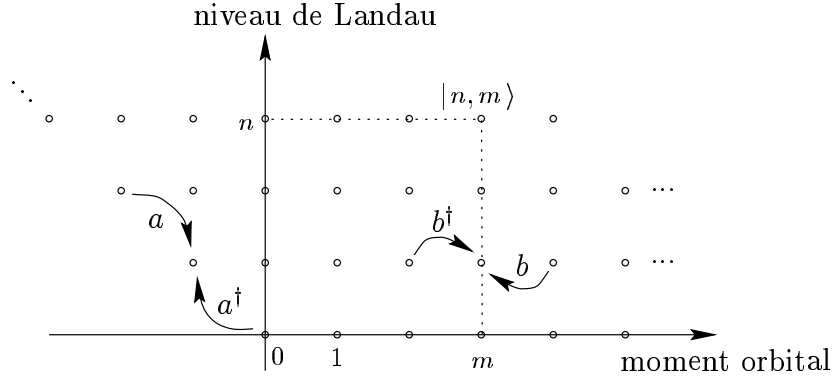


FIG. 3.1: Représentation du spectre de Landau.

Nous donnons les fonctions d'onde $\psi_{n,m}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | n, m \rangle$:

$$\psi_{n,m}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{\omega_c^{m+1} n!}{\pi(n+m)!}} z^m L_n^m(\omega_c z \bar{z}) e^{-\frac{1}{2}\omega_c z \bar{z}} \quad (3.27)$$

où $L_n^m(x)$ est un polynôme de Laguerre². Lorsque $m < 0$, remarquons³ que l'on peut réécrire l'expression précédente

$$\psi_{n,m < 0}(z, \bar{z}) = (-1)^m \sqrt{\frac{\omega_c^{-m+1} (n+m)!}{\pi n!}} \bar{z}^{-m} L_{n+m}^{-m}(\omega_c z \bar{z}) e^{-\frac{1}{2}\omega_c z \bar{z}}. \quad (3.28)$$

Ces deux relations permettent de réorganiser la classification des états propres en introduisant les fonctions d'onde

$$\phi_{n,m}(r, \theta) = \sqrt{\frac{\omega_c^{|m|+1} n!}{\pi(n+|m|)!}} r^{|m|} L_n^{|m|}(\omega_c r^2) e^{-\frac{1}{2}\omega_c r^2} e^{im\theta} \quad (3.29)$$

états propres de l'hamiltonien pour une énergie $E_{n,m} = (2n + |m| - m + 1)\omega_c$ et reliées aux précédentes fonctions d'onde par

$$m \geq 0 \quad \phi_{n,m} = \psi_{n,m} \quad (3.30)$$

$$m < 0 \quad \phi_{n,m} = (-1)^m \psi_{n+|m|,m}. \quad (3.31)$$

L'état $\phi_{n,m}$ appartient au niveau de Landau n si $m \geq 0$ et au niveau $n + |m|$ si $m < 0$.

3.2.3 Courant permanent

Calculons la contribution $I_{n,m}^{\text{L,orb}}$ de chaque état de Landau au courant permanent orbital. Le problème est invariant par rotation et les états sont classés par leur moment orbital m ; le courant permanent de tels états vaut d'après (2.27)

$$I_{n,m}^{\text{L,orb}} = e \int_0^\infty dr \left(\frac{m}{r} - \omega_c r \right) |\phi_{n,m}|^2. \quad (3.32)$$

²Les actions des opérateurs a , a^\dagger , b et b^\dagger sont obtenues respectivement à l'aide des relations :

$\frac{d}{dx} L_n^m(x) = -L_{n-1}^{m+1}(x)$, $(x \frac{d}{dx} - x + m) L_n^m(x) = (n+1) L_{n+1}^{m-1}(x)$, $(x \frac{d}{dx} + m) L_n^m(x) = (n+m) L_n^{m-1}(x)$ et $(-\frac{d}{dx} + 1) L_n^m(x) = L_n^{m+1}(x)$.

³Pour $m < 0$ on a $L_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{n!} (-x)^{-m} L_{n+m}^{-m}(x)$.

Le premier terme est la contribution de l'impulsion selon θ tandis que le second est celle du potentiel vecteur. On aboutit à⁴

$$\begin{aligned} I_{n,m}^{\text{L, orb}} &= \frac{e\omega_c}{2\pi} \left(\frac{m}{|m|} - 1 \right) \text{ pour } m \neq 0 \\ &= -\frac{e\omega_c}{2\pi} \text{ pour } m = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

On constate que seul les états de moments orbitaux négatifs créent des courants permanents. Ces derniers tournent dans le sens indirect et tendent à écranter le champ magnétique (diamagnétisme orbital).

Nous verrons dans la section 3.5 que l'utilisation de ce résultat microscopique pour calculer le courant permanent pour un électron à l'équilibre thermodynamique (Boltzmann) nécessite de prendre certaines précautions (l'origine de ce problème est liée à la dégénérescence infinie de chaque niveau de Landau).

3.2.4 Propagateur et projecteurs de Landau

Projecteurs

L'opérateur de projection sur le n ème niveau de Landau est

$$P_n = \sum_{m=-n}^{\infty} |n, m\rangle \langle n, m|. \quad (3.34)$$

Dans une représentation d'espace, cet opérateur s'exprime comme

$$P_n(z, z') \stackrel{\text{def}}{=} \langle z | P_n | z' \rangle = \frac{\omega_c}{\pi} L_n(\omega_c |z - z'|^2) e^{-\frac{1}{2}\omega_c(|z - z'|^2 - z\bar{z}' + \bar{z}z')} \quad (3.35)$$

($L_n(x) \equiv L_n^0(x)$). Le préfacteur $\frac{\omega_c}{\pi}$ est la dégénérescence d'un niveau de Landau par unité de volume.

Propagateur

Le propagateur de Landau

$$G_t^{\text{L}}(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{r} | e^{-tH_{\text{L}}} | \vec{r}' \rangle \quad (3.36)$$

se décompose sur les projecteurs de Landau comme

$$G_t^{\text{L}}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\vec{r}, \vec{r}') e^{-2\omega_c(n+\frac{1}{2})t}. \quad (3.37)$$

Cette série se resomme⁵

$$G_t^{\text{L}}(z, z') = \frac{\omega_c}{2\pi \text{sh}(t\omega_c)} \exp -\frac{\omega_c}{2} (\coth(t\omega_c)|z - z'|^2 - z\bar{z}' + \bar{z}z'). \quad (3.38)$$

Le préfacteur est la fonction de partition par unité de volume.

⁴ On utilise $\int_0^\infty dx x^{\alpha-1} [L_n^\alpha(x)]^2 e^{-x} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\alpha n!}$.

⁵ Cette expression fait intervenir la fonction génératrice des polynômes de Laguerre : $(1-t)^{-\alpha-1} \exp -\frac{zt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^\alpha(z)$, (Nikiforov & Ouvarov 1983).

Formulaire : action des opérateurs de Landau

Un opérateur \mathcal{O} peut agir sur un projecteur ou un propagateur soit par la droite soit par la gauche

$$\langle \vec{r} | \mathcal{O} e^{-tH} | \vec{r}' \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \underset{\rightarrow}{\mathcal{O}} G_t(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.39)$$

$$\langle \vec{r} | e^{-tH} \mathcal{O} | \vec{r}' \rangle \stackrel{\text{def}}{=} G_t(\vec{r}, \vec{r}') \underset{\leftarrow}{\mathcal{O}} \quad (3.40)$$

étant entendu que dans la première relation l'opérateur agit sur la variable \vec{r} tandis qu'il agit sur la variable \vec{r}' dans la seconde. L'action d'un opérateur \mathcal{O} par la gauche est la plus naturelle et se fait à l'aide de l'opérateur différentiel associé à \mathcal{O} dans une représentation d'espace. L'action d'un opérateur par la droite est donnée par la relation

$$\left(G_t(\vec{r}, \vec{r}') \underset{\leftarrow}{\mathcal{O}} \right)^* = \underset{\rightarrow}{\mathcal{O}^\dagger} G_{t^*}(\vec{r}', \vec{r}) \quad (3.41)$$

qui découle des définitions précédentes.

En présence d'une relation de fermeture un opérateur placé entre deux propagateurs agit indifféremment à droite ou à gauche

$$\int d\vec{r}_1 G(\vec{r}, \vec{r}_1) \underset{\leftarrow}{\mathcal{O}} G(\vec{r}_1, \vec{r}') = \int d\vec{r}_1 G(\vec{r}, \vec{r}_1) \underset{\rightarrow}{\mathcal{O}} G(\vec{r}_1, \vec{r}') . \quad (3.42)$$

Remarquons que dans ces notations, l'action d'un opérateur sur une fonction d'onde s'écrit $\langle \vec{r} | \mathcal{O} | \psi \rangle = \underset{\rightarrow}{\mathcal{O}} \psi(\vec{r})$ et $\langle \psi | \mathcal{O} | \vec{r} \rangle = \psi^*(\vec{r}) \underset{\leftarrow}{\mathcal{O}}$.

a) action des opérateurs sur le propagateur On introduit les quatre opérateurs

$$\Pi_-^L = -2i \left(\partial_z - \frac{1}{2} \omega_c \bar{z} \right) = -2i \sqrt{\omega_c} a^\dagger \quad (3.43)$$

$$\Pi_+^L = -2i \left(\partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2} \omega_c z \right) = 2i \sqrt{\omega_c} a \quad (3.44)$$

$$B_-^L = -2i \left(\partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2} \omega_c z \right) = 2i \sqrt{\omega_c} b^\dagger \quad (3.45)$$

$$B_+^L = -2i \left(\partial_z + \frac{1}{2} \omega_c \bar{z} \right) = -2i \sqrt{\omega_c} b \quad (3.46)$$

Π_-^L et Π_+^L sont les deux opérateurs covariants de Landau. L'hamiltonien de Landau s'exprime en fonction de ces opérateurs comme

$$H_L = \frac{1}{2} \Pi_+^L \Pi_-^L - \omega_c = \frac{1}{2} \Pi_-^L \Pi_+^L + \omega_c. \quad (3.47)$$

Ces deux opérateurs satisfont la relation de commutation $[\Pi_+^L, \Pi_-^L] = 4\omega_c$.

Les quatre opérateurs agissent sur le propagateur de Landau de la manière suivante

$$\underset{\rightarrow}{\Pi_-^L} G_\beta^L(z, z') = i\omega_c \frac{e^{\beta\omega_c}}{\text{sh} \beta\omega_c} (\bar{z} - \bar{z}') G_\beta^L(z, z') \quad (3.48)$$

$$\underset{\rightarrow}{\Pi_+^L} G_\beta^L(z, z') = i\omega_c \frac{e^{-\beta\omega_c}}{\text{sh} \beta\omega_c} (z - z') G_\beta^L(z, z') \quad (3.49)$$

$$\underset{\rightarrow}{B_-^L} G_\beta^L(z, z') = i\omega_c [\coth \beta\omega_c (z - z') + z + z'] G_\beta^L(z, z') \quad (3.50)$$

$$\underset{\rightarrow}{B_+^L} G_\beta^L(z, z') = i\omega_c [\coth \beta\omega_c (\bar{z} - \bar{z}') - \bar{z} - \bar{z}'] G_\beta^L(z, z'). \quad (3.51)$$

D'autre part on a

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_-^L G_\beta^L(z, z') = e^{2\beta\omega_c} G_\beta^L(z, z') \underset{\leftarrow}{\Pi}_-^L \quad (3.52)$$

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_+^L G_\beta^L(z, z') = e^{-2\beta\omega_c} G_\beta^L(z, z') \underset{\leftarrow}{\Pi}_+^L \quad (3.53)$$

qui se déduisent de (2.15). En outre les opérateurs B_-^L et B_+^L commutent avec l'hamiltonien de Landau, donc

$$\underset{\rightarrow}{B}_-^L G_\beta^L(z, z') = G_\beta^L(z, z') \underset{\leftarrow}{B}_-^L \quad (3.54)$$

$$\underset{\rightarrow}{B}_+^L G_\beta^L(z, z') = G_\beta^L(z, z') \underset{\leftarrow}{B}_+^L. \quad (3.55)$$

b) action des opérateurs sur les projecteurs

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_-^L P_n(z, z') = -2i \frac{\omega_c^2}{\pi} (\bar{z} - \bar{z}') L_{n+1}'(\omega_c |z - z'|^2) e^{-\frac{\omega_c}{2}(|z - z'|^2 - z\bar{z}' + \bar{z}z')} \quad (3.56)$$

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_+^L P_n(z, z') = -2i \frac{\omega_c^2}{\pi} (z - z') L_n'(\omega_c |z - z'|^2) e^{-\frac{\omega_c}{2}(|z - z'|^2 - z\bar{z}' + \bar{z}z')} \quad (3.57)$$

$$\underset{\rightarrow}{B}_-^L P_n(z, z') = -2i \frac{\omega_c^2}{\pi} [(z - z') L_n'(\omega_c |z - z'|^2) - z L_n(\omega_c |z - z'|^2)] e^{-\frac{\omega_c}{2}(|z - z'|^2 - z\bar{z}' + \bar{z}z')} \quad (3.58)$$

$$\underset{\rightarrow}{B}_+^L P_n(z, z') = -2i \frac{\omega_c^2}{\pi} [(\bar{z} - \bar{z}') L_n'(\omega_c |z - z'|^2) + \bar{z}' L_n(\omega_c |z - z'|^2)] e^{-\frac{\omega_c}{2}(|z - z'|^2 - z\bar{z}' + \bar{z}z')} \quad (3.59)$$

($L_n'(x)$ désigne $\frac{d}{dx} L_n(x)$). L'action des opérateurs par la droite est trouvée à l'aide de la relation (3.41). D'après les quatre relations précédentes⁶ on a

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_-^L P_n(z, z') = P_{n+1}(z, z') \underset{\leftarrow}{\Pi}_-^L \quad (3.60)$$

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_+^L P_n(z, z') = P_{n-1}(z, z') \underset{\leftarrow}{\Pi}_+^L \quad (3.61)$$

$$\underset{\rightarrow}{B}_-^L P_n(z, z') = P_n(z, z') \underset{\leftarrow}{B}_-^L \quad (3.62)$$

$$\underset{\rightarrow}{B}_+^L P_n(z, z') = P_n(z, z') \underset{\leftarrow}{B}_+^L \quad (3.63)$$

avec en particulier

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_+^L P_0(z, z') = 0 \quad (3.64)$$

$$P_0(z, z') \underset{\leftarrow}{\Pi}_-^L = 0. \quad (3.65)$$

Enfin notons que

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_-^L P_n(z, z') \underset{\leftarrow}{\Pi}_+^L = 4\omega_c(n+1) P_{n+1}(z, z') \quad (3.66)$$

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_+^L P_n(z, z') \underset{\leftarrow}{\Pi}_-^L = 4\omega_c n P_{n-1}(z, z') \quad (3.67)$$

et bien sûr

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_-^L \underset{\rightarrow}{\Pi}_+^L P_n(z, z') = 4\omega_c n P_n(z, z') \quad (3.68)$$

$$\underset{\rightarrow}{\Pi}_+^L \underset{\rightarrow}{\Pi}_-^L P_n(z, z') = 4\omega_c(n+1) P_n(z, z'). \quad (3.69)$$

⁶Une autre manière de démontrer ces relations est de revenir à la définition (3.34) à l'aide de laquelle on peut constater facilement que $a^\dagger P_n = P_{n+1} a^\dagger$, $a P_n = P_{n-1} a$, $b^\dagger P_n = P_n b^\dagger$ et $b P_n = P_n b$.

3.3 Translations magnétiques

Dans un point de vue actif, l'opérateur qui translate le système de \vec{u} est

$$T(\vec{u}) = e^{-i\vec{u}\cdot\vec{p}} \quad (3.70)$$

et agit comme

$$T(\vec{u})|\vec{r}\rangle = |\vec{r} + \vec{u}\rangle. \quad (3.71)$$

Rappelons que l'opérateur de rotation d'angle θ autour de l'origine dans le point de vue actif est

$$R(\theta) = e^{-i\theta L_z}. \quad (3.72)$$

L'opérateur unitaire pour une transformation de jauge est

$$U_\chi = e^{ie\chi(\vec{r})}, \quad (3.73)$$

il transforme les fonctions d'onde et le potentiel vecteur comme

$$\psi' = \psi e^{ie\chi(\vec{r})} \quad (3.74)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi. \quad (3.75)$$

Bien que le problème de Landau soit invariant par translation il est clair que l'hamiltonien de Landau n'est pas invariant sous les transformations (3.70) puisque le choix de jauge $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ privilégie l'origine. Cependant une translation \vec{u} de la jauge peut être absorbée dans une transformation de jauge définie par $\chi(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{u})$. C'est-à-dire que le hamiltonien est invariant sous les transformations

$$T_M(\vec{u}) = U_{\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{u})} T(\vec{u}) = e^{ie\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{u})} e^{-i\vec{u}\cdot\vec{p}}, \quad (3.76)$$

appelées translations magnétiques. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ permet d'écrire que :

$$T_M(\vec{u}) = e^{-i\vec{u}\cdot(\vec{p} + e\vec{A}(\vec{r}))}. \quad (3.77)$$

En introduisant $u = u_x + iu_y$ cet opérateur se réécrit encore comme

$$T_M(u) = e^{\sqrt{\omega_c}(u^* b^\dagger - ub)}. \quad (3.78)$$

L'invariance de l'hamiltonien sous le groupe des translations magnétiques et le groupe des rotations implique que le propagateur possède la structure suivante :

$$G_\beta^L(\vec{r}, \vec{r}') = f_\beta(|\vec{r} - \vec{r}'|) e^{ie \int_{\Delta(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{r}'' \cdot \vec{A}(\vec{r}'')} \quad (3.79)$$

où la circulation du potentiel vecteur est calculée sur le segment de droite $\Delta(\vec{r}, \vec{r}')$ joignant les deux points (on peut vérifier que le propagateur (3.38) a bien cette structure). Une conséquence est qu'un produit de n propagateurs $G_\beta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) G_\beta(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \cdots G_\beta(\vec{r}_n, \vec{r}_1)$ est proportionnel à $e^{ie\Phi}$, où Φ est le flux du champ magnétique qui traverse le polygone défini par les n points.

3.4 Conductivité pour le problème de Landau

Pour calculer la conductivité du problème de Landau on utilise (2.39) ou (2.40). Nous détaillons le calcul pour montrer comment exploiter efficacement l'algèbre des opérateurs présentée précédemment.

Si la moyenne est une moyenne de type Boltzmann on doit calculer

$$\Theta(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{r} | e^{-\beta H_L} [\Pi_-^L(t), z] | \vec{r}' \rangle \quad (3.80)$$

$$= \frac{i}{2\omega_c} \left(\langle \vec{r} | e^{-(\beta-it)H_L} \Pi_-^L e^{-itH_L} (\Pi_+^L - \mathbf{B}_-^L) | \vec{r}' \rangle \right. \quad (3.81)$$

$$\left. - \langle \vec{r} | e^{-\beta H_L} (\Pi_+^L - \mathbf{B}_-^L) e^{itH_L} \Pi_-^L e^{-itH_L} | \vec{r}' \rangle \right) \quad (3.82)$$

$$= \frac{i}{2\omega_c} (\Theta_1 - \Theta_2) \quad (3.83)$$

où l'on a utilisé $z = \frac{i}{2\omega_c} (\Pi_+^L - \mathbf{B}_-^L)$. Le premier terme s'écrit

$$\Theta_1(\vec{r}, \vec{r}') = \int d\vec{r}_1 G_{\beta-it}^L(\vec{r}, \vec{r}_1) \overset{\Pi_-^L}{\rightarrow} G_{it}^L(\vec{r}_1, \vec{r}') (\overset{\Pi_+^L}{\leftarrow} - \overset{\mathbf{B}_-^L}{\leftarrow}) . \quad (3.84)$$

Si on fait traverser le second propagateur par l'opérateur Π_-^L , les opérateurs n'agissent plus que sur la variable \vec{r}' et il est alors possible d'intégrer sur \vec{r}_1

$$\Theta_1(\vec{r}, \vec{r}') = e^{2it\omega_c} \int d\vec{r}_1 G_{\beta-it}^L(\vec{r}, \vec{r}_1) G_{it}^L(\vec{r}_1, \vec{r}') \overset{\Pi_-^L}{\leftarrow} (\overset{\Pi_+^L}{\leftarrow} - \overset{\mathbf{B}_-^L}{\leftarrow}) \quad (3.85)$$

$$= e^{2it\omega_c} G_{\beta}^L(\vec{r}, \vec{r}') \overset{\Pi_-^L}{\leftarrow} (\overset{\Pi_+^L}{\leftarrow} - \overset{\mathbf{B}_-^L}{\leftarrow}) . \quad (3.86)$$

Le second terme est

$$\Theta_2(\vec{r}, \vec{r}') = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 G_{\beta}^L(\vec{r}, \vec{r}_1) (\overset{\Pi_+^L}{\leftarrow} - \overset{\mathbf{B}_-^L}{\leftarrow}) G_{-it}^L(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \overset{\Pi_-^L}{\rightarrow} G_{it}^L(\vec{r}_2, \vec{r}') \quad (3.87)$$

De la même manière on fait traverser les propagateurs par les différents opérateurs pour qu'ils n'agissent plus sur les variables d'intégration et on aboutit à

$$\Theta_2(\vec{r}, \vec{r}') = e^{2it\omega_c} G_{\beta}^L(\vec{r}, \vec{r}') (\overset{\Pi_+^L}{\leftarrow} - \overset{\mathbf{B}_-^L}{\leftarrow}) \overset{\Pi_-^L}{\leftarrow} \quad (3.88)$$

si bien que

$$\Theta(\vec{r}, \vec{r}') = e^{2it\omega_c} G_{\beta}^L(\vec{r}, \vec{r}') [\overset{\Pi_-^L}{\leftarrow}, z] = -2i e^{2it\omega_c} G_{\beta}^L(\vec{r}, \vec{r}') . \quad (3.89)$$

La conductivité est donc

$$\sigma_{\beta}^{-}(t) = \frac{ie^2}{2VZ_{\beta}} \theta(t) \int d\vec{r} \Theta(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{e^2}{V} \theta(t) e^{2it\omega_c} . \quad (3.90)$$

On constate que la conductivité est indépendante de la température $1/\beta$, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la statistique choisie. Donc, chaque niveau de Landau contribue de la même manière à la conductivité. Une analyse microscopique (le calcul du corrélateur intervenant dans la conductivité pour un état de Landau donné) montre en effet que tous les états contribuent de la même manière.

La réponse fréquentielle est donnée par la transformée de Fourier de $\sigma_{\beta}^{-}(t)$

$$\sigma_{\beta}^{-}(\omega) = \frac{e^2}{V} \left(i\mathcal{P}\mathcal{P} \frac{1}{\omega + 2\omega_c} + \pi\delta(\omega + 2\omega_c) \right) \quad (3.91)$$

de laquelle on extrait les conductivités longitudinale et transverse à l'aide de (2.46) :

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \frac{e^2\pi}{2V} (\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c)) \quad (3.92)$$

$$\text{Re } \sigma_{yx}(\omega) = -\frac{e^2}{V} \frac{2\omega_c}{4\omega_c^2 - \omega^2}. \quad (3.93)$$

À fréquence nulle, on a donc

$$\sigma_{xx}(\omega = 0) = 0 \quad (3.94)$$

$$\sigma_{yx}(\omega = 0) = -\frac{e^2}{2V\omega_c}. \quad (3.95)$$

En utilisant la relation (A.20), on constate que la conductivité du gaz d'électrons est donnée en multipliant la contribution d'un état par le nombre d'états occupés :

$$\sigma_{xy} = \frac{n_e e}{B} \quad (3.96)$$

où $n_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{V}$ est la densité d'électrons. Si on introduit le facteur de remplissage

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_e h}{eB} = \frac{N}{N_{LL}} = \frac{N\phi_0}{BV} \quad (3.97)$$

on constate que la conductivité Hall est une fonction linéaire de ν : $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$. Chaque niveau de Landau contribue donc à la conductivité comme $\frac{e^2}{h}$. Ce résultat avait déjà été obtenu dans la théorie classique (*cf.* chapitre 1).

Mentionnons une manière plus rapide de procéder qui inspirera les calculs de conductivités dans les systèmes d'impuretés magnétiques. On peut remarquer que si l'on utilise (2.44) on aboutit directement à

$$\dot{\sigma}_{\beta}^{-}(t) = \frac{e^2}{V} \delta(t) + 2i\omega_c \sigma_{\beta}^{-}(t). \quad (3.98)$$

En faisant intervenir les relations (A.20, A.21), la conductivité du gaz d'électrons est

$$\dot{\sigma}^{-}(t; \beta, \mu) = \frac{e^2}{V} \delta(t) \text{Tr} \{f(H)\} + 2i\omega_c \sigma^{-}(t; \beta, \mu) \quad (3.99)$$

où $f(H) = N$ est le nombre d'électrons. L'intégration de cette relation est élémentaire et conduit de nouveau à

$$\sigma^{-}(\omega; \beta, \mu) = \frac{ie^2 N}{V(\omega + 2\omega_c + i\epsilon)}. \quad (3.100)$$

À fréquence nulle on retrouve que $\sigma_{xy} = \frac{n_e e}{B}$.

Pour le problème de Landau, considérer la bonne combinaison linéaire des conductivités longitudinale et transverse, puis la dériver par rapport au temps, est donc la manière la plus simple de procéder.

3.5 Calcul du courant permanent : une illustration du danger de sommer des contributions microscopiques dans le problème de Landau

Nous avons déjà évoqué une difficulté dans le calcul du courant permanent pour un électron thermalisé par une statistique de Boltzmann. Il semblerait pourtant que le courant permanent $I_{n,m}^{\text{L,orb}}$ pour chaque état quantique permette un calcul sans ambiguïté. À l'aide de (3.33) on obtient

$$I_{\beta}^{\text{L,orb}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_{n,m}}}{Z_{\beta}^{\text{L}}} I_{n,m}^{\text{L,orb}} = \frac{1}{Z_{\beta}^{\text{L}}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \omega_c (2n+|m|-m+1)} I_{n,m}^{\text{L,orb}} \quad (3.101)$$

où $Z_{\beta}^{\text{L}} = \frac{V \omega_c}{2\pi \text{sh} \beta \omega_c}$ est la fonction de partition de Landau. Dans cette expression on a utilisé la classification des états (3.29). Bien que chaque niveau de Landau soit infiniment dégénéré (comme $\frac{V \omega_c}{\pi}$), seuls les états de $m \leq 0$ d'un niveau de Landau, qui sont en nombre fini, apportent une contribution non nulle à la somme. La somme est donc convergente et conduit au résultat : $I_{\beta}^{\text{L,orb}} = -\frac{e}{2V} \coth \beta \omega_c$, qui est de toute évidence un résultat erroné. On peut s'en convaincre en constatant qu'il conduit à une divergence du courant permanent de l'électron à champ magnétique petit, ou haute température.

D'autre part pour un problème invariant par translation, le courant permanent est proportionnel à la partie orbitale de l'aimantation du système $M_{\beta}^{\text{orb}} = I_{\beta}^{\text{orb}} V$. Dans un calcul thermodynamique, l'aimantation peut être facilement calculée et vaut

$$M_{\beta}^{\text{L,orb}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z_{\beta}^{\text{L}} = \frac{e}{2} \left(\frac{1}{\beta \omega_c} - \coth \beta \omega_c \right). \quad (3.102)$$

(Remarquons qu'on n'a pas retranché de contribution de spin dans (3.102) comme il est indiqué dans (2.26). La raison est que, dans ce chapitre, le terme de couplage au spin n'est pas pris en compte dans l'hamiltonien et par conséquent dans la fonction de partition). Bien entendu, cette quantité reste finie dans la limite des hautes températures ou des faibles champs magnétiques $M_{\beta}^{\text{L,orb}} \simeq -\frac{e}{6} \beta \omega_c$.

On est donc en présence d'un calcul microscopique qui somme les contributions de chaque état quantique et donne un résultat incomplet. Ceci est une illustration des problèmes que peut amener le "Landau counting". En raison de la dégénérescence infinie des niveaux de Landau, il est dangereux de sommer les contributions individuelles des états pour obtenir une quantité thermodynamique, ce qui peut conduire à des sommes mal définies, du type $\sum_{m=0}^{\infty} 0$, qui ne sont pas nécessairement nulles. Nous aurons plus tard une seconde illustration de cette difficulté à propos du calcul de la variation de la fonction de partition de Landau lorsqu'on introduit un tube de flux (*cf.* annexe B).

Il existe cependant un moyen de calculer $I_{\beta}^{\text{L,orb}}$ en sommant des contributions microscopiques. Pour cela il faut s'affranchir de l'existence d'une divergence dans la dégénérescence d'un niveau de Landau, ce qui peut être réalisé par l'introduction d'un régulateur harmonique $\frac{1}{2} \omega_o^2 r^2$ ($\omega_t^2 = \omega_c^2 + \omega_o^2$). Le courant permanent d'un état quantique est donné par (*cf.* annexe B) :

$$\begin{aligned} I_{n,m}^{\omega_o, \text{orb}} &= \frac{e \omega_t}{2\pi} \left(\frac{m}{|m|} - \frac{\omega_c}{\omega_t} \right) \text{ pour } m \neq 0 \\ &= -\frac{e \omega_c}{2\pi} \text{ pour } m = 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

qui conduit bien à (3.33) lorsque $\omega_o \rightarrow 0$. Il est aisé de calculer I_β^{orb} à l'aide de cette expression :

$$I_\beta^{\omega_o, \text{orb}} = \frac{e\omega_t}{4\pi Z_\beta^{\omega_o} \text{sh } \beta\omega_t} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega_t}\right) \frac{1}{e^{\beta(\omega_t - \omega_c)} - 1} - \frac{\omega_c}{\omega_t} - \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega_t}\right) \frac{1}{e^{\beta(\omega_t + \omega_c)} - 1} \right\}. \quad (3.104)$$

Les trois termes dans l'accolade correspondent respectivement aux contributions des états de moments orbitaux positifs, nul et négatifs. Cette expression permet de prendre la limite $\omega_o \rightarrow 0$ pour retrouver le résultat de Landau; on constate que la contribution des états de moments orbitaux positifs vient précisément compenser la divergence indésirable à petit champ que nous avons rencontrée dans le calcul précédent. Le résultat est maintenant en accord avec le résultat thermodynamique (3.102)

$$\lim_{\omega_o \rightarrow 0} I_\beta^{\omega_o, \text{orb}} = I_\beta^{\text{L, orb}} = \frac{e}{2V} \left(\frac{1}{\beta\omega_c} - \coth \beta\omega_c \right). \quad (3.105)$$

Remarquons que la limite des basses températures s'écrit $I_{\beta \rightarrow \infty}^{\text{L, orb}} = -\frac{e}{2V}$, ce qui correspond à la contribution de l'état $\phi_{0,0} : -\frac{e\omega_c}{2\pi}$, pondérée par la probabilité pour que cet état soit occupé : $\frac{1}{N_{\text{LL}}} = \frac{\pi}{V\omega_c}$.

Chapitre 4

Électron couplé à un tube de flux Aharonov-Bohm

À moi, Vortex! Giaour!

Hector Berlioz, *La damnation de Faust*.

4.1 Le problème Aharonov-Bohm

4.1.1 Spectre

Dans le problème Aharonov-Bohm (Aharonov & Bohm 1959), un vortex magnétique modélise un tube de flux magnétique (solénoïde) infiniment fin et impénétrable. La physique d'un électron couplé au vortex est décrite par l'hamiltonien :

$$H_{\text{AB}} = \frac{1}{2} \left(\vec{p} - \alpha \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r^2} \right)^2 = -2\partial_z \partial_{\bar{z}} - \alpha \left(\frac{1}{\bar{z}} \partial_z - \frac{1}{z} \partial_{\bar{z}} \right) + \frac{\alpha^2}{2z\bar{z}}, \quad (4.1)$$

où $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\phi}{\phi_0}$ est le rapport du flux porté par le vortex et du quantum de flux $\phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{e}$. \vec{k} est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan. Le spectre est continu; la fonction d'onde d'énergie $E = \frac{1}{2}k^2$ et de moment orbital m s'écrit :

$$\psi_{k,m}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} J_{|m-\alpha|}(kr) e^{im\theta}. \quad (4.2)$$

Une translation du paramètre α d'une unité peut toujours être absorbée par une transformation de jauge rajoutant un quantum de flux à l'origine; le spectre est donc périodique en α de période 1. D'autre part, changer le signe de α correspond à une transformation de parité qui ne change pas la physique. On peut donc se limiter en toute généralité à $\alpha \in [0, 1/2]$. Notons toutefois qu'un champ magnétique supplémentaire donne une orientation privilégiée au plan et brise cette symétrie : il faut alors considérer $\alpha \in [0, 1]$.

L'étude de la diffusion d'une onde sur le potentiel Aharonov-Bohm a suscité de nombreuses études (Aharonov & Bohm 1959), (Hagen 1990b), (Hagen 1990a), (Hagen 1991), (Bordag & Voropaev 1993), (Dasnières de Veigy & Ouvry 1994), (Moroz 1996). Le déphasage de l'onde partielle de moment orbital m est donné par $\delta_m = \frac{\pi}{2}(|m| - |m - \alpha|)$; les déphasages restent finis

si $m \rightarrow \infty$, ce qui résulte de la portée infinie du potentiel Aharonov-Bohm. Bien que le potentiel vecteur Aharonov-Bohm brise l'invariance par parité, la section efficace est une fonction paire de l'angle de diffusion $f_{AB}(\theta) = -\frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{2i\pi k}} \frac{\sin \pi\alpha}{\sin(\theta/2)}$ (la question de la diffusion vers l'avant est discutée dans (Dasnières de Veigy & Ouvry 1994), (Dasnières de Veigy 1994)). Nous pourrions toutefois constater à travers le calcul du courant permanent, de l'aimantation ou de la conductivité, des effets explicites de la brisure de parité.

Tel que nous avons défini le problème, il existe une ambiguïté liée au fait que différents choix de fonctions normalisables sont permis pour l'onde s . Au lieu d'une fonction d'onde $J_\alpha(kr)$, qui s'annule à l'origine comme r^α , nous aurions aussi bien pu introduire $J_{-\alpha}(kr)$, qui se comporte comme $r^{-\alpha}$. Cette dernière est singulière à l'origine mais de carré sommable ; la même remarque s'applique pour l'onde de moment orbital $m = 1$. Une formulation rigoureuse du problème nécessite d'imposer des conditions spécifiques pour la fonction d'onde à l'origine ; ces différentes conditions conduisent à considérer une famille d'opérateurs auto-adjoints paramétrés par un paramètre dimensionné (Albeverio, Gesztesy, Hoegh-Krohn & Holden 1988) (voir également (de Sousa Gerbert 1989), (Moroz 1996)). Une autre façon de lever cette difficulté est d'introduire une régularisation du potentiel Aharonov-Bohm en donnant au tube de flux une dimension finie (Hagen 1990b) ; Bordag et Voropaev ont exploré la relation entre différentes régularisations et différentes extensions auto-adjointes (Bordag & Voropaev 1993).

Définir une théorie de perturbation pour l'hamiltonien H_{AB} conduit à des difficultés (Corinaldesi & Rafeli 1978) : l'ordre 1 se révèle incomplet et l'ordre 2 est divergent. Afin de régler ce problème il a été proposé une modification de l'hamiltonien Aharonov-Bohm (Jackiw & Pi 1990), (Manuel & Tarrach 1993), (Manuel & Tarrach 1994), (Bergman & Lozano 1994), (Ouvry 1994) : ajouter un terme de contact permet de donner un sens à la théorie de perturbation en compensant les divergences, et lève les ambiguïtés concernant les ondes de $m = 0, 1$ mentionnées ci-dessus.

$$H = \frac{1}{2} \left(\vec{p} - \alpha \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r^2} \right)^2 + \pi\alpha \delta^2(\vec{r}) . \quad (4.3)$$

Cette procédure est satisfaisante dans le sens où elle permet de sélectionner, parmi toutes les extensions auto-adjointes, celles qui respectent l'invariance d'échelle. Bergman & Lozano (1994) ont discuté la renormalisation de l'interaction Aharonov-Bohm en présence d'une interaction de contact additionnelle. Ils ont montré que l'invariance d'échelle du problème Aharonov-Bohm est restaurée à condition de fixer l'interaction de contact comme dans (4.3).

Le terme de contact peut s'interpréter comme un terme de couplage du moment magnétique de l'électron avec le champ magnétique singulier (Comtet, Mashkevich & Ouvry 1995b). L'hamiltonien (4.3) est donc un hamiltonien de Pauli pour un spin down : H_d . Par la suite nous nous limiterons à la situation de spin down (pour $\alpha > 0$) qui conduit à une régularisation à courte distance de telle sorte que l'impureté magnétique est répulsive et décrit un vortex impénétrable. La transformation (2.57) permet d'extraire le comportement à courte distance des fonctions d'onde en r^α , et conduit à une théorie de perturbation (McCabe & Ouvry 1991), (Ouvry 1994) qui ne fait pas apparaître de divergence. L'hamiltonien transformé s'écrit :

$$\tilde{H}_d = -2\partial_z \partial_{\bar{z}} - \frac{2\alpha}{\bar{z}} \partial_z . \quad (4.4)$$

Le propagateur pour l'hamiltonien (4.3) fait intervenir une série de fonction de Bessel mo-

difiées :

$$G_\beta(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi\beta} e^{-\frac{1}{2\beta}(r^2+r'^2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{|m-\alpha|} \left(\frac{rr'}{\beta} \right) e^{im(\theta-\theta')}. \quad (4.5)$$

Donnons également la fonction de Green retardée $G^+(\vec{r}, \vec{r}'; E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{r} | \frac{1}{E-H+i0^+} | \vec{r}' \rangle$:

$$G^+(\vec{r}, \vec{r}'; E = k^2/2) = \frac{1}{2i} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{|m-\alpha|}(kr_<) H_{|m-\alpha|}^{(1)}(kr_>) e^{im(\theta-\theta')} \quad (4.6)$$

où $r_< = \min(r, r')$ et $r_> = \max(r, r')$.

La fonction de partition du problème libre $Z_\beta^0 = \frac{V}{2\pi\beta}$ est modifiée par la présence du vortex (Comtet, Georgelin & Ouvry 1989) :

$$Z_\beta(\alpha) = Z_\beta^0 - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha). \quad (4.7)$$

Cette correction peut être calculée en utilisant différentes méthodes de régularisation (régularisation harmonique ou régularisation ζ). Remarquons que cette correction est indépendante de la température β^{-1} et sous dominante en volume comparée à Z_β^0 , c'est-à-dire qu'elle est apportée par un nombre fini d'états de la base du spectre.

4.1.2 Courant permanent

Calculons le courant permanent induit par le vortex autour de lui-même. La prescription d'impureté répulsive impose aux fonctions d'onde de s'annuler sur le vortex, avec pour conséquence la nullité de la contribution de spin : $I^{\text{spin}} = 0$. D'autre part, il est équivalent de dériver l'énergie libre par rapport au flux du vortex fictif puis de prendre la limite $\alpha' \rightarrow 0$ ou de dériver directement par rapport au flux du vortex. On a donc :

$$I_\beta(\alpha) = \frac{e}{2\pi\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z_\beta(\alpha). \quad (4.8)$$

On peut également calculer le courant permanent associé à un état quantique d'énergie $E_n(\alpha)$:

$$I_n(\alpha) = -\frac{e}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} E_n(\alpha) + \frac{e}{2} |\psi_n(\vec{0})|^2, \quad (4.9)$$

où $\psi_n(\vec{r})$ est la fonction d'onde. Si α est fini $\psi_n(\vec{0}) = 0$, toutefois ce terme permet de prendre la limite $\alpha \rightarrow 0$ dans l'équation (4.9).

Calcul global

D'après (4.7,4.8), le courant permanent est donné par :

$$I_\beta(\alpha) = I_\beta^{\text{orb}} = \frac{e}{V} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right). \quad (4.10)$$

Dans la limite où le flux s'annule, ce résultat doit être corrigé pour tenir compte du terme de spin, qui n'est plus nul en l'absence du vortex. D'après (2.32) :

$$I_\beta^{\text{orb}}(\alpha = 0) = \frac{e}{V} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \Big|_{\alpha=0} + \frac{e}{2V} = 0. \quad (4.11)$$

Le terme de courant de spin est donc crucial. En son absence, l'expression du courant permanent pour le vortex serait non nulle en $\alpha = 0$.

(4.10) permet de trouver facilement le courant permanent du gaz d'électrons à l'aide de (2.17) :

$$I(\alpha; \beta, \mu) = e \frac{N}{V} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right). \quad (4.12)$$

Mentionnons le lien entre le courant permanent et les propriétés de la diffusion Aharonov-Bohm. Le courant permanent du gaz d'électrons peut être décomposé comme

$$I(\phi) = -\text{Tr} \left\{ f(H) \frac{\partial H}{\partial \phi} \right\} = \int dI(E, \phi) f(E) \quad (4.13)$$

où $dI(E, \phi)$ désigne la contribution de la bande d'énergie $[E, E + dE]$. On peut donc écrire que $dI(E, \phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} \text{Tr} \{ Y(E - H) \} dE$. La trace s'identifie à la densité d'états intégrée : $N(E) = \text{Tr} \{ Y(E - H) \}$. On peut aussi bien introduire la variation de densité d'états intégrée $\Delta N(E, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} N(E, \phi) - N(E, 0)$, reliée aux déphasages à l'aide de la formule de Krein (Krein 1953), (Friedel 1958) : $\Delta N(E, \phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m(E, \phi)$. On trouve la relation entre matrice S et courant permanent (Akkermans, Auerbach, Avron & Shapiro 1991) [*cf.* le comment (Comtet, Moroz & Ouvry 1995c)] :

$$dI(E, \phi) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial \phi} \text{Tr}_E \{ \ln S \} dE \quad (4.14)$$

où la trace est prise sur les états d'énergie E .

Calcul microscopique

Il est instructif de calculer la contribution au courant permanent de chaque état individuel. Pour un spectre continu, l'expression (4.9) est inadaptée et il faut revenir à la définition (2.27). On doit alors calculer $e \int_0^\infty dr \psi_{k,m}^* v_\theta \psi_{k,m}$ qui conduit à

$$I_m(k) = \frac{ek}{4\pi} \frac{m - \alpha}{|m - \alpha|}. \quad (4.15)$$

Plaçons nous dans la situation où le gaz d'électrons est à température nulle; dans ce cas le courant permanent total est

$$I_{E_F}(\alpha) = \int_0^{k_F} dk \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m(k) = \frac{eE_F}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{sign}(m - \alpha). \quad (4.16)$$

L'énergie de Fermi E_F est reliée au nombre d'électrons par $N = \frac{V}{2\pi} E_F$, à une correction sous dominante en volume près. La somme qui apparaît n'est pas définie, cependant il existe différentes manières de la régulariser. Nous nous inspirons des méthodes de régularisation utilisées pour calculer la fonction de partition.

Les manipulations formelles suivantes

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{sign}(m - \alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \text{sign}(m - \alpha) - \sum_{m=0}^{\infty} \text{sign}(m + \alpha) \quad (4.17)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \text{sign}(m + 1 - \alpha) - \sum_{m=0}^{\infty} \text{sign}(m + \alpha) \quad (4.18)$$

suggèrent de régulariser la somme à l'aide de la fonction de Hurwitz :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{sign}(m - \alpha) = \left(\zeta(s, 1 - \alpha) - \zeta(s, \alpha) \right) \Big|_{s=0} . \quad (4.19)$$

Rappelons que la fonction de Hurwitz, généralisation la fonction ζ de Riemann, admet la représentation $\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + \alpha)^{-s}$. On peut utiliser la relation $\zeta(-n, x) = -\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}$ où $B_n(x)$ est un polynôme de Bernoulli (en particulier $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$; cf. (Gradshteyn & Ryzhik 1994)). On trouve finalement que la somme précédente, lorsqu'elle est régularisée ζ est égale à $2\alpha - 1$. En introduisant la densité d'électrons $n_e = \frac{N}{V}$, on retrouve le résultat (4.12) :

$$I_{E_F}^{\zeta}(\alpha) = en_e \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) . \quad (4.20)$$

Une autre façon de régulariser le calcul du courant permanent est d'introduire un régulateur harmonique $\frac{1}{2}\omega_o r^2$ dans l'hamiltonien. Le spectre de l'hamiltonien est donné (cf. annexe B) par $E_{n,m}^{\omega_o} = \omega_o(2n + |m - \alpha| + 1)$. Le courant permanent de chaque état peut être trouvé à l'aide de (4.9) : $I_{n,m}^{\omega_o} = \frac{e\omega_o}{2\pi} \text{sign}(m - \alpha)$. Pour une statistique de Boltzmann, le courant moyen est donc donné par

$$I_{\beta}^{\omega_o} = \frac{e\omega_o}{2\pi} \text{th} \beta\omega_o(\alpha - 1/2) . \quad (4.21)$$

En multipliant ce résultat par la fonction de partition

$$Z_{\beta}^{\omega_o} = \frac{1}{2 \text{sh} \beta\omega_o} \frac{\text{ch} \beta\omega_o(\alpha - 1/2)}{\text{sh} \frac{\beta\omega_o}{2}} , \quad (4.22)$$

on constate que

$$\lim_{\omega_o \rightarrow 0} Z_{\beta}^{\omega_o} I_{\beta}^{\omega_o} = \frac{e}{2\pi\beta} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) . \quad (4.23)$$

La régularisation harmonique montre que $e \text{Tr} \left\{ \frac{v_{\theta}}{r} e^{-\beta H} \right\} = \frac{e}{V} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} \right\}$. Cette relation permet d'obtenir le courant permanent pour le gaz d'électrons $e \text{Tr} \left\{ \frac{v_{\theta}}{r} f(H) \right\} = \frac{e}{V} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \text{Tr} \left\{ f(H) \right\}$. Ce résultat correspond bien à (4.12).

À condition de conserver la prescription d'impureté répulsive, toutes les observables du problème Aharonov-Bohm sont périodiques en α de période 1. Les expressions (4.7,4.12) doivent donc être comprises pour $\alpha \in [0, 1]$ et, si α est en dehors de cet intervalle, on doit remplacer α par $\alpha - E[\alpha]$ ($E[\alpha]$ désigne la partie entière de α).

Notons pour finir que le résultat est bien antisymétrique sous la transformation $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$ qui correspond à changer le sens du vortex.

4.1.3 Aimantation

Contrairement au problème de Landau, le problème Aharonov-Bohm n'est pas invariant par translation et il n'y a donc pas de relation simple entre le courant permanent et l'aimantation.

Comme pour le courant permanent, nous proposons un calcul thermodynamique puis un calcul microscopique qui décompose l'aimantation sur les contributions des états individuels.

La méthode proposée pour calculer l'aimantation du problème, est de rajouter un champ magnétique uniforme et d'utiliser la relation (2.26). On utilise la fonction de partition (4.56).

Dériver l'énergie libre par rapport à B conduit à l'aimantation (4.57). En prenant la limite $B \rightarrow 0$ on aboutit finalement à l'aimantation due au vortex :

$$M_{\beta}^{\text{orb}}(\alpha) = \frac{e}{6Z_{\beta}}\alpha(1-\alpha)(\alpha-1/2). \quad (4.24)$$

Cette quantité est sous dominante en volume comparée à l'aimantation du problème de Landau (3.102). Contrairement au cas d'un système invariant pas translation, le vortex est responsable d'une aimantation du même ordre ($1/V$) que le courant permanent. (4.24) est de signe négatif pour $\alpha \in [0, 1/2]$, ce qui indique une rotation de l'électron dans le sens indirect, et inversement pour $\alpha \in [1/2, 1]$.

La dépendance en température de (4.24) montre que seule la base du spectre contribue. Ceci apparaît plus clairement sur l'expression de l'aimantation du gaz d'électrons qu'on obtient facilement en notant que $\frac{e}{2} \text{Tr} \{rv_{\theta} e^{-\beta H}\} = \frac{e}{6}\alpha(1-\alpha)(\alpha-1/2)$:

$$M^{\text{orb}}(\alpha; \beta, \mu) = \frac{e}{6}\alpha(1-\alpha)(\alpha-1/2)\frac{1}{e^{-\beta\mu} + 1}. \quad (4.25)$$

La fraction est le facteur d'occupation des états d'énergie nulle.

Une autre façon d'obtenir l'aimantation est de calculer les contributions des états en introduisant un régulateur harmonique. La contribution de l'état $\phi_{n,m}^{\omega_o}$

$$\frac{e}{2}\langle \phi_{n,m}^{\omega_o} | \vec{r} \times \vec{v} | \phi_{n,m}^{\omega_o} \rangle = \frac{e}{2}(m-\alpha) \quad (4.26)$$

permet de calculer la moyenne thermique

$$M_{\beta}^{\omega_o, \text{orb}}(\alpha) = \frac{e(1-\alpha) \text{sh} \alpha\beta\omega_o - \alpha \text{sh}(1-\alpha)\beta\omega_o}{4 \text{sh} \frac{\beta\omega_o}{2} \text{ch}(\alpha-1/2)\beta\omega_o}. \quad (4.27)$$

On vérifie que la limite $\omega_o \rightarrow 0$ reproduit le résultat (4.24) :

$$\lim_{\omega_o \rightarrow 0} Z_{\beta}^{\omega_o} M_{\beta}^{\omega_o, \text{orb}}(\alpha) = \frac{e}{6}\alpha(1-\alpha)(\alpha-1/2). \quad (4.28)$$

La méthode de la régularisation ζ que nous avons utilisée pour calculer le courant permanent n'est pas suffisante dans ce cas. On doit alors régulariser l'expression $dM(E, \alpha) \propto \frac{e}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (m-\alpha)$ qui donne la contribution des états de la bande d'énergie $[E, E+dE]$. La somme est régularisée par $\left(\zeta(s, 1-\alpha) - \zeta(s, \alpha)\right) \Big|_{s=-1} = 0$, ce qui montre qu'une éventuelle contribution ne peut venir que de la base du spectre, mais ne donne pas sa valeur.

4.1.4 Conductivité

Pour calculer la conductivité associée à l'hamiltonien (4.3) il est avantageux de dériver $\sigma_{\beta}^{-}(t)$ par rapport au temps. Rappelons que dans le cas du champ magnétique uniforme, cela a grandement simplifié le calcul. On a

$$\dot{\sigma}_{\beta}^{-}(t) = \frac{e^2}{V}\delta(t) - Y(t)\frac{e^2}{2VZ_{\beta}} \int d\vec{r}d\vec{r}' \left(z' G_{\beta-it}(\vec{r}, \vec{r}') eB(\vec{r}) \Pi_{\rightarrow} G_{it}(\vec{r}', \vec{r}) - (it \rightarrow it + \beta) \right). \quad (4.29)$$

L'opérateur covariant pour le problème est :

$$\Pi_- = -i \left(2\partial_z - \frac{\alpha}{z} \right). \quad (4.30)$$

Le champ magnétique est proportionnel à une distribution δ^2 . Sa présence dans l'intégrale fait disparaître les termes qui s'annulent avec r à l'origine. Finalement seules les contributions de $m = 0$ et $m = 1$ des propagateurs (4.5) sont ainsi retenues :

$$\dot{\sigma}_\beta^-(t) = \frac{e^2}{V} \delta(t) + \frac{e^2}{V} Y(t) \frac{1}{\beta^2 Z(\beta)} \frac{e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \left(t^\alpha (t+i\beta)^{1-\alpha} - t^{1-\alpha} (t-i\beta)^\alpha \right). \quad (4.31)$$

La transformée de Fourier fait intervenir des fonctions hypergéométriques dégénérées de deuxième espèce $\Psi(a, b; z)$:

$$\sigma_\beta^-(\omega) = \frac{ie^2}{V(\omega+i\epsilon)} - \frac{e^2}{V Z_\beta} \frac{ie^{i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\omega+i\epsilon} \left\{ \Gamma(1+\alpha) \Psi(1+\alpha, 3; \beta(\omega+i\epsilon)) - \Gamma(2-\alpha) \Psi(2-\alpha, 3; -\beta(\omega+i\epsilon)) \right\}. \quad (4.32)$$

On peut extraire le comportement à grande fréquence $\beta\omega \gg 1$:

$$\text{Re } \sigma_{yx}^\beta(\omega) = \frac{e^2}{V^2} \frac{\sin \pi\alpha}{\omega^2} \left(\Gamma(1+\alpha)(\cos \pi\alpha + 1) \frac{1}{(\beta\omega)^\alpha} - (\alpha \rightarrow 1-\alpha) \right). \quad (4.33)$$

À petite fréquence $\beta\omega \ll 1$, on a

$$\text{Re } \sigma_{yx}^\beta(\omega) = \frac{e^2}{V^2} \frac{\sin(2\pi\alpha)}{\omega^2} \left(1 + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} (\beta\omega)^2 \ln(\beta\omega) + \dots \right). \quad (4.34)$$

Ce résultat est sous dominant en volume, comparé à la conductivité d'un électron dans le problème de Landau. Il est en revanche divergent à petite fréquence comme $1/\omega^2$. Cette divergence n'est pas surprenante : le premier terme d'un développement en puissances de α , qui est aussi le terme dominant à petite fréquence, est

$$\text{Re } \sigma_{yx}^{\text{vortex}}(\omega) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\simeq} \frac{e^2}{V^2} 2\pi\alpha \frac{1}{\omega^2}. \quad (4.35)$$

Comme il sera démontré dans le prochain chapitre, le terme d'ordre 1 en α de la conductivité du vortex doit correspondre au terme d'ordre 1 en $\langle B \rangle$ du résultat du problème de Landau pour le champ magnétique moyen des impuretés, or (3.93) présente bien la même divergence à petite fréquence :

$$\text{Re } \sigma_{yx}^{\langle L \rangle}(\omega) \underset{\langle B \rangle \rightarrow 0}{\simeq} \frac{e^2}{V} \frac{e \langle B \rangle}{\omega^2}. \quad (4.36)$$

La correspondance précise s'établit en identifiant $\langle B \rangle$ à $\frac{2\pi\alpha}{eV}$, qui représente le champ magnétique moyen produit par le vortex.

Le calcul de la conductivité offre une troisième illustration, avec le courant permanent et l'aimantation, de manifestation de la brisure de symétrie de parité qui n'était pas apparente dans la section efficace.

Approche microscopique

Nous nous intéressons maintenant à la conductivité associée à chaque état quantique. Puisque la matrice densité est $\rho_{k,m} = |k, m\rangle\langle k, m|$, l'expression (4.29) devient

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{k,m}^-(t) &= \frac{e^2 k}{V} \delta(t) - \frac{e^2}{2V} Y(t) \int d\vec{r} d\vec{r}' \left(e^{i\frac{k^2}{2}t} z' \psi_{k,m}(\vec{r}') \psi_{k,m}^*(\vec{r}) eB(\vec{r}) \Pi_{\rightarrow} G_{it}(\vec{r}', \vec{r}) \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\frac{k^2}{2}t} z' \psi_{k,m}^*(\vec{r}') eB(\vec{r}) \Pi_{\rightarrow} \psi_{k,m}(\vec{r}) G_{-it}(\vec{r}, \vec{r}') \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

La présence du champ magnétique singulier sélectionne les termes du développement des fonctions d'onde et du propagateur qui ne s'annulent pas à l'origine :

$$\dot{\sigma}_{E,m}^-(t) = \frac{e^2}{V} \delta(t) + \frac{ie^2}{2V} \frac{Y(t)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[\delta_{m,0} \frac{(iEt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \Phi(-1+\alpha, 1+\alpha; iEt) \right. \quad (4.39)$$

$$\left. - \delta_{m,1} \frac{(-iEt)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \Phi(-\alpha, 2-\alpha; -iEt) \right]. \quad (4.40)$$

où $\Phi(a, b; z) \equiv {}_1F_1(a; b; z)$ est une fonction hypergéométrique dégénérée. Puisque le spectre est continu, on a : $\sigma_{k,m}^-(t) dk = \sigma_{E,m}^-(t) dE$.

Après transformée de Fourier on obtient

$$\sigma_{E,m}^-(\omega) = \frac{ie^2}{V(\omega + i\epsilon)} - \frac{ie^2 \sin(\pi\alpha) e^{i\pi\alpha} E}{V\pi (\omega + i\epsilon)^3} \left[\delta_{m,0} \left(1 + \frac{\omega + i\epsilon}{E}\right)^{1-\alpha} - \delta_{m,1} \left(1 - \frac{\omega + i\epsilon}{E}\right)^\alpha \right]. \quad (4.41)$$

Si on moyenne cette expression avec un poids de Boltzmann $\frac{1}{Z_\beta} \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \sum_m \sigma_{E,m}^-(t)$, on retrouve¹ comme il se doit l'expression (4.32). Il apparaît clairement que seuls les états de moments orbitaux $m = 0$ ou $m = 1$ contribuent à la conductivité. Ceci explique que la conductivité soit sous dominante en volume comparée à la conductivité de Landau : parmi les états d'énergie E , qui sont en nombre proportionnel à V , seuls deux états participent à la conductivité.

On peut extraire de cette expression la partie réelle de la conductivité transverse ; la coupure de z^α est placée sur l'axe réel négatif, ce qui amène à distinguer deux cas : si $0 < \omega \leq E$

$$\text{Re } \sigma_{yx}^{E,m}(\omega) = \frac{e^2 \sin 2\pi\alpha}{V4\pi} \frac{E}{\omega^3} \left\{ \delta_{m,0} \left[\left(1 + \frac{\omega}{E}\right)^{1-\alpha} - \left(1 - \frac{\omega}{E}\right)^{1-\alpha} \right] \right. \quad (4.42)$$

$$\left. + \delta_{m,1} \left[\left(1 + \frac{\omega}{E}\right)^\alpha - \left(1 - \frac{\omega}{E}\right)^\alpha \right] \right\} \quad (4.43)$$

et si $E \leq \omega$

$$\text{Re } \sigma_{yx}^{E,m}(\omega) = \frac{e^2 \sin \pi\alpha}{V2\pi} \frac{E}{\omega^3} \left\{ \delta_{m,0} \left[\cos \pi\alpha \left(\frac{\omega}{E} + 1\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{\omega}{E} - 1\right)^{1-\alpha} \right] \right. \quad (4.44)$$

$$\left. + \delta_{m,1} \left[\cos \pi\alpha \left(\frac{\omega}{E} + 1\right)^\alpha - \left(\frac{\omega}{E} - 1\right)^\alpha \right] \right\}. \quad (4.45)$$

¹On utilise la représentation intégrale

$\Psi(a, b; z) = \frac{z^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty ds e^{-s} s^{a-1} \left(1 + \frac{s}{z}\right)^{b-a-1}$ (Nikiforov & Ouvarov 1983).

On peut vérifier que $\sum_m \text{Re} \sigma_{yx}^{E,m}(\omega)$ est bien antisymétrique sous la transformation $\alpha \leftrightarrow 1 - \alpha$. On donne les comportements limites de la conductivité :

$$\text{Re} \sigma_{yx}^{E,m}(\omega) \underset{\omega \ll E}{\simeq} \frac{e^2 \sin(2\pi\alpha)}{V2\pi} \frac{1}{\omega^2} \{(1 - \alpha) \delta_{m,0} + \alpha \delta_{m,1}\} \quad (4.46)$$

et

$$\text{Re} \sigma_{yx}^{E,m}(\omega) \underset{\omega \gg E}{\simeq} \frac{e^2 \sin(\pi\alpha)}{V2\pi} \frac{1}{\omega^2} \left\{ \delta_{m,0} (\cos(\pi\alpha) + 1) \left(\frac{E}{\omega}\right)^\alpha + \delta_{m,1} (\cos(\pi\alpha) - 1) \left(\frac{E}{\omega}\right)^{1-\alpha} \right\}. \quad (4.47)$$

Conductivité du gaz d'électrons à $T = 0$

À partir des résultats précédents il est possible d'obtenir une expression de la conductivité pour le gaz d'électrons. D'après les propriétés mentionnées dans l'annexe A, il suffit de sommer les contributions microscopiques jusqu'à l'énergie de Fermi :

$$\sigma_{yx}(\omega; E_F) = \int_0^{E_F} dE \sum_m \sigma_{yx}^{E,m}(\omega). \quad (4.48)$$

si $0 < \omega \leq E_F$:

$$\begin{aligned} \text{Re} \sigma_{yx}(\omega; E_F) &= \frac{e^2 \sin 2\pi\alpha}{V4\pi} \frac{1}{\omega} \frac{1}{1+\alpha} \left[\left(\frac{E_F}{\omega}\right)^{1+\alpha} F(\alpha - 1, \alpha + 1; \alpha + 2; -E_F/\omega) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{\omega}{E_F}\right)^{1+\alpha} F(3, \alpha + 1; \alpha + 2; 1 - \omega/E_F) \right] - (\alpha \rightarrow 1 - \alpha) \end{aligned} \quad (4.49)$$

et si $E_F \leq \omega$:

$$\begin{aligned} \text{Re} \sigma_{yx}(\omega; E_F) &= \frac{e^2 \sin \pi\alpha}{V2\pi} \frac{1}{\omega} \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{E_F}{\omega}\right)^{1+\alpha} \left[\cos \pi\alpha F(\alpha - 1, \alpha + 1; \alpha + 2; -E_F/\omega) \right. \\ &\quad \left. + F(\alpha - 1, \alpha + 1; \alpha + 2; E_F/\omega) \right] - (\alpha \rightarrow 1 - \alpha). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Lorsque la fréquence est petite devant l'énergie de Fermi, un développement en puissances de ω/E_F conduit à :

$$\text{Re} \sigma_{yx}(\omega; E_F) \underset{E_F \gg \omega}{\simeq} \frac{e^2 \sin 2\pi\alpha}{V2\pi} \frac{E_F}{\omega^2} \simeq N(E_F) \frac{e^2 \sin 2\pi\alpha}{V^2} \frac{1}{\omega^2}. \quad (4.51)$$

4.2 Champ magnétique et tube de flux Aharonov-Bohm

Finalement, intéressons-nous au problème d'un électron soumis à un tube de flux et à un champ magnétique uniforme. Ce problème contient des informations intéressantes en relation avec le problème d'impuretés magnétiques.

4.2.1 Spectre

Nous considérons l'hamiltonien de Pauli :

$$H = \frac{1}{2} \left(\vec{p} - \alpha \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r^2} - \omega_c \vec{k} \times \vec{r} \right)^2 + \pi \alpha \delta^2(\vec{r}) + \omega_c \quad (4.52)$$

Les états propres de cet hamiltonien sont donnés par les fonctions

$$\phi_{n,m}(r, \theta) = \sqrt{\frac{\omega_c^{|m-\alpha|+1} n!}{\pi \Gamma(n + |m - \alpha| + 1)}} r^{|m-\alpha|} L_n^{|m-\alpha|}(\omega_c r^2) e^{-\frac{1}{2}\omega_c r^2} e^{im\theta} \quad (4.53)$$

associées aux énergies

$$E_{n,m} = (2n + |m - \alpha| - (m - \alpha) + 2)\omega_c . \quad (4.54)$$

On constate que l'énergie d'un état de moment orbital positif n'est pas affectée par le vortex alors que l'énergie d'un état de moment orbital négatif est décalée de $+2\alpha\omega_c$.

Le propagateur est donné par

$$G_\beta(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\omega_c e^{-\beta\omega_c}}{2\pi \operatorname{sh} \beta\omega_c} e^{-\frac{\omega_c}{2} \coth \beta\omega_c (r^2 + r'^2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{|m-\alpha|} \left(\frac{\omega_c r r'}{\operatorname{sh} \beta\omega_c} \right) e^{\beta\omega_c (m-\alpha)} e^{im(\theta-\theta')} . \quad (4.55)$$

La fonction de partition peut être calculée par différentes méthodes, comme par exemple la méthode du régulateur harmonique (*cf.* annexe B). Elle est donnée par une partie proportionnelle au volume V , la fonction de partition de Landau, à laquelle s'ajoute une correction sous dominante en volume apportée par la présence du vortex :

$$Z_\beta(B, \alpha) = Z_\beta^L + \frac{e^{-\beta\omega_c}}{2 \operatorname{sh} \beta\omega_c} \left(\alpha - e^{(1-\alpha)\beta\omega_c} \frac{\operatorname{sh} \alpha \beta\omega_c}{\operatorname{sh} \beta\omega_c} \right) . \quad (4.56)$$

Rappelons que la fonction de partition de Landau est $Z_\beta^L = Z_\beta^0 \frac{x e^{-x}}{\operatorname{sh} x}$, où $Z_\beta^0 = \frac{V}{2\pi\beta}$ est la fonction de partition libre et $x \equiv \beta\omega_c$.

Cette expression permet de calculer l'aimantation orbitale (2.26) :

$$M_\beta^{\text{orb}}(B, \alpha) = M_\beta^{L, \text{orb}} - \frac{\mu_B}{Z_\beta^0} \frac{1}{2x^2} \left\{ \left(\alpha - e^{(1-\alpha)x} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} x} \right) + \frac{x}{\operatorname{sh} x} e^{(1-2\alpha)x} \left(\alpha - e^{-(1-\alpha)x} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} x} \right) \right\} \quad (4.57)$$

où $\mu_B = \frac{e}{2}$ est le magnéton de Bohr. Rappelons que l'aimantation du problème de Landau est donnée par : $M_\beta^{L, \text{orb}} = \mu_B \left(\frac{1}{x} - \coth x \right)$. (4.57) montre que le vortex apporte une correction en $1/V$ à l'aimantation de Landau.

4.2.2 Conductivité

Le calcul de la conductivité se fait en suivant la ligne tracée dans le cas du vortex sans champ magnétique, c'est-à-dire en considérant la dérivée de la fonction $\sigma_\beta^-(t)$. L'apparition du champ magnétique créé par le vortex permet de sélectionner dans l'intégrale les termes du développement des propagateurs qui restent finis à l'origine. On est conduit à :

$$\dot{\sigma}_\beta^-(t) = \frac{e^2}{V} \delta(t) + 2i\omega_c \sigma_\beta^-(t) + \frac{e^2}{V} i \frac{\omega_c e^{-\beta\omega_c (\alpha+1)} \sin(\pi\alpha)}{Z_\beta \operatorname{sh}^2(\beta\omega_c)} \frac{1}{\pi} G(t) , \quad (4.58)$$

où on a introduit la fonction

$$G(t) \stackrel{\text{def}}{=} Y(t) \left\{ e^{it\omega_c} (\text{sh } it\omega_c)^\alpha (\text{sh}(\beta - it)\omega_c)^{1-\alpha} - (it \rightarrow it + \beta) \right\} . \quad (4.59)$$

On peut vérifier que la limite $\omega_c \rightarrow 0$ conduit bien à la relation (4.31). La transformée de Fourier est donnée par

$$\sigma_{\beta}^{-}(\omega) = \frac{1}{\omega + 2\omega_c + i\epsilon} \frac{ie^2}{V} \left\{ 1 + i \frac{1}{Z_{\beta}} \frac{\omega_c e^{-\beta\omega_c(\alpha+1)}}{\text{sh}^2(\beta\omega_c)} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} G(\omega) \right\} \quad (4.60)$$

où $G(\omega)$ est la transformée de Fourier de $G(t)$:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\omega/\omega_c}} \int_0^{2\pi/\omega_c} dt G(t) e^{i\omega t} . \quad (4.61)$$

Le premier terme correspond à la conductivité de Landau. Le deuxième terme qui est d'ordre $1/V$ correspond à la contribution du vortex.

Évaluons les corrections apportées par le vortex par un développement de $G(\omega = 0)$ en puissance de α . On peut montrer que lorsque la température $\beta = it'$ est imaginaire, ce qu'il conviendra de considérer pour calculer la conductivité du gaz d'électrons, G admet le développement suivant :

$$G(\omega = 0) = \frac{i}{2\omega_c} \text{sh } it'\omega_c + O(\alpha^2) . \quad (4.62)$$

La conductivité du gaz d'électrons pour le problème s'exprime alors par le développement :

$$\sigma_{E_F}^{-}(\omega = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{e^{iE_F t'}}{it' + \eta} \frac{ie^2}{2V\omega_c} \left\{ Z_{it'} + \frac{Z_{it'}^L}{V} \left(-\frac{\pi\alpha}{\omega_c} + \pi\alpha^2 it' + O(\alpha^3) \right) \right\} \quad (4.63)$$

où Z_{β} est la fonction de partition (4.56) alors que Z_{β}^L est la fonction de partition du problème de Landau. Le terme d'ordre α a une interprétation physique explicite lorsqu'on écrit

$$\sigma_{E_F}^{-}(\omega = 0) = \frac{ie^2}{2V\omega_c} \left(N(E_F) - N^L(E_F) \frac{\pi\alpha}{V\omega_c} \right) + O(\alpha^2) = \frac{iN(E_F)e^2}{2V(\omega_c + \frac{\pi\alpha}{V})} + O(\alpha^2) \quad (4.64)$$

où $N(E_F)$ est la densité d'états intégrée du problème avec le vortex, dont l'ordre 0 en α est la densité d'états intégrée de Landau $N^L(E_F)$. La correction d'ordre α traduit donc l'effet du champ magnétique moyen dû au vortex.

Chapitre 5

Le modèle d'impuretés magnétiques

5.1 Définition du modèle et propriétés spectrales

Considérons maintenant une configuration de champ magnétique aléatoire créé par une assemblée de vortex portant un flux $\phi = \alpha\phi_0$, répartis aléatoirement sur le plan avec une distribution de Poisson. Si la densité moyenne d'impuretés est ρ , la densité de probabilité de trouver N impuretés en $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ dans un volume V est donnée par :

$$P(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; N) = \frac{\rho^N}{N!} e^{-\rho V} . \quad (5.1)$$

Nous considérons l'hamiltonien :

$$H_d = \frac{1}{2} \left(\vec{p} - \alpha \sum_{i=1}^N \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \right)^2 + \pi\alpha \sum_{i=1}^N \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i) . \quad (5.2)$$

Nous nous intéressons à la configuration de spin down pour laquelle les impuretés sont répulsives. Ceci est réalisé lorsque $\alpha > 0$. Pour $\alpha < 0$, la situation physique analogue est décrite par l'hamiltonien H_u . On peut se limiter, sans restreindre la généralité à $\alpha \in [0, 1/2]$.

Les propriétés spectrales de ce modèle ont été étudiées dans (Desbois, Furtlehner & Ouvry 1996), (Desbois *et al.* 1995). Deux approches ont été menées parallèlement : (i) une approche "mouvement brownien" qui utilise la correspondance, via l'intégrale de chemin, entre la fonction de partition moyenne et certaines propriétés du mouvement brownien (voir également (Comtet, Desbois & Ouvry 1990), (Furtlehner 1997)), (ii) une approche perturbative pour l'hamiltonien (5.2).

Le champ magnétique est la superposition de distributions δ à l'emplacement des vortex, une configuration de champ particulièrement inhomogène. Le flux magnétique qui traverse le système de volume V est égal à $\rho V \phi$, par conséquent le champ magnétique moyen est donné par

$$e \langle B \rangle = 2\pi\rho\alpha . \quad (5.3)$$

($\langle \omega_c \rangle = \pi\rho\alpha$). Dans la limite $\rho \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ tout en gardant $\rho\alpha$ fini, la distribution d'impuretés est de plus en plus dense et l'on doit rejoindre la situation du champ magnétique homogène. Dans cette limite de champ moyen, les propriétés du système doivent être celles du problème de Landau. Le modèle est caractérisé par deux paramètres α et ρ , cependant, en utilisant les propriétés d'échelle de l'hamiltonien Aharonov-Bohm, on remarque qu'une dilatation du système

d'un facteur $\lambda : \vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}$ se traduit uniquement par une dilatation de l'échelle d'énergie d'un facteur λ^{-2} . Par conséquent la densité d'états est une fonction de $E/\rho : \rho(E) = f(E/\rho, \alpha)$. Le paramètre ρ peut donc être fixé arbitrairement.

On peut aussi comprendre qualitativement pourquoi la limite $\alpha \rightarrow 0$ correspond à celle du champ magnétique moyen à l'aide de l'argument semi-classique suivant : on admet que l'électron est sensible au champ magnétique moyen, les trajectoires qu'il suit sont des orbites cyclotron pour le champ moyen. Les orbites cyclotrons associées au premier niveau de Landau ont pour rayon $a_{(B)} = \sqrt{\frac{\hbar}{e\langle B \rangle}}$. Le nombre de vortex magnétiques qu'une telle orbite enclôt est $N_v \simeq \rho \pi a_{(B)}^2 = \frac{1}{2\alpha}$. Pour que l'électron soit peu sensible aux inhomogénéités du champ magnétique, il faut que les orbites cyclotron contiennent un grand nombre de vortex, ce qui exige donc $\alpha \sim 0$.

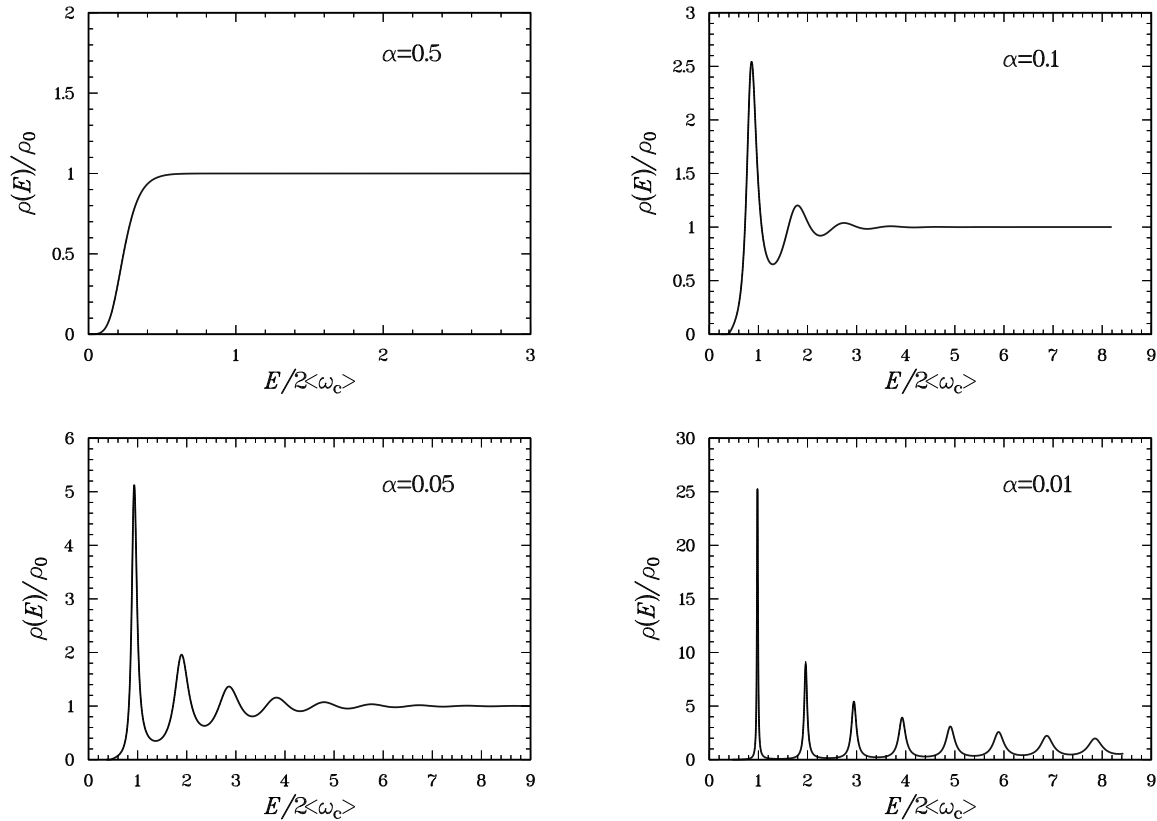


FIG. 5.1: Résultats numériques (Desbois *et al.* 1995) ; $\rho_0 = \frac{V}{2\pi}$ désigne la densité d'états libre.

Jean Desbois, Cyril Furtlehner et Stéphane Ouvry (Desbois *et al.* 1995) ont montré que la densité d'états présente deux phases, atteintes en faisant varier le paramètre α . Lorsque le flux est maximum ($\alpha = 1/2$), le spectre est un spectre libre avec un comportement à l'origine ayant l'apparence d'une queue de Lifshits caractéristique d'un système désordonné. Le système est dans une phase dite désordonnée ; le fait que le système soit traversé par un flux magnétique ne se manifeste pas dans le spectre par l'apparition de niveaux de Landau. En revanche, lorsque le flux diminue, des oscillations de type Landau apparaissent. Pour $\alpha \sim 0$ le spectre présente une succession de pics séparés par des intervalles réguliers de largeur $2\pi\rho\alpha$. Le système se trouve dans une phase dite ordonnée. Le spectre est un spectre de Landau pour un champ $\langle B \rangle$ avec des niveaux élargis par le désordre. On peut penser que cet élargissement des niveaux s'accompagne

de la localisation d'une partie des états quantiques.

Pour $\alpha = 1/2$, le système est invariant par parité et la conductivité Hall doit s'annuler. En revanche lorsque $\alpha \rightarrow 0$, le système rejoint une phase ordonnée et on doit s'attendre à retrouver la conductivité Hall du problème de Landau pour le champ moyen. Lorsque α reste fini, mais voisin de 0, le modèle possède les caractéristiques spectrales d'un système Hall, la question qui se pose donc naturellement est de savoir si la conductivité Hall montre ou non une déviation par rapport au résultat classique. Cette question a un sens pour les petites valeurs de la constante de couplage, ce qui motive donc une analyse perturbative de la conductivité Hall.

On notera l'existence d'un travail relatif au même problème (Empanan & Valle Basagoiti 1994). Par une approche perturbative différente de la nôtre (en particulier le champ moyen n'est pas pris en compte), ces auteurs sont arrivés à la conclusion que la conductivité transverse est donnée par une constante universelle indépendante des paramètres du modèle. Nous aboutirons à des conclusions différentes.

5.2 Théorie de perturbation

Une façon de définir de manière non ambiguë la théorie de perturbation pour l'hamiltonien (5.2) (Ouvry 1994), (Comtet *et al.* 1995b), (Desbois *et al.* 1995) est de considérer les transformations non unitaires introduites au chapitre 2. La fonction Φ s'exprime comme

$$\Phi(\vec{r}) = \alpha \sum_{i=1}^N \ln |\vec{r} - \vec{r}_i| . \quad (5.4)$$

La transformation correspond à redéfinir les fonctions d'onde de la manière suivante :

$$\psi(\vec{r}) = U'_d(\vec{r})\tilde{\psi}'(\vec{r}) = e^{-\frac{1}{2}\langle\omega_c\rangle r^2} \prod_{i=1}^N |\vec{r} - \vec{r}_i|^\alpha \tilde{\psi}'(\vec{r}) . \quad (5.5)$$

D'après les relations (2.67,2.68), les opérateurs covariants sont transformés comme

$$(U'_d)^{-1}\Pi_+U'_d = \Pi_+^{(L)} - 2i\alpha(\Omega - \langle\Omega\rangle) \quad (5.6)$$

$$(U'_d)^{-1}\Pi_-U'_d = \Pi_-^{(L)} \quad (5.7)$$

où $\Omega = \sum_i \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i}$. L'hamiltonien transformé s'écrit

$$\tilde{H}'_d = \frac{1}{2}\Pi_+^{(L)}\Pi_-^{(L)} - i\alpha(\Omega - \langle\Omega\rangle)\Pi_-^{(L)} . \quad (5.8)$$

Lorsque l'on s'intéresse à des traces d'opérateurs ou de produits d'opérateurs, tels que la fonction de partition, l'aimantation, le courant permanent ou la conductivité, il est équivalent de considérer le point de vue H_d ou \tilde{H}'_d ; dans ce cas les opérateurs intervenant dans la trace sont transformés par U'_d .

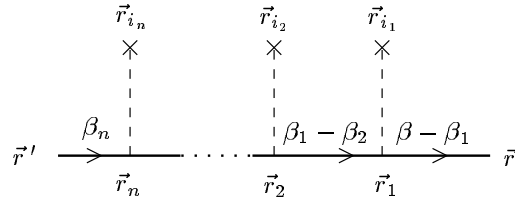
L'hamiltonien \tilde{H}'_d donné par (5.8) appartient à la classe d'hamiltoniens $H = H_0 + v \sum_{i=1}^N u(\vec{r} - \vec{r}_i)$, pour lesquels la théorie de perturbation se présente sous la forme d'une série de termes $\rho^m v^n$ (avec $m \leq n$ comme nous allons le voir), où v est l'intensité du potentiel et ρ la densité d'impuretés (Lifshits *et al.* 1988, Ch. V). Considérons le développement perturbatif du propagateur $G_\beta(\vec{r}, \vec{r}')$:

$$G_\beta(\vec{r}, \vec{r}') = G_\beta^0(\vec{r}, \vec{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \delta G_\beta^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}') , \quad (5.9)$$

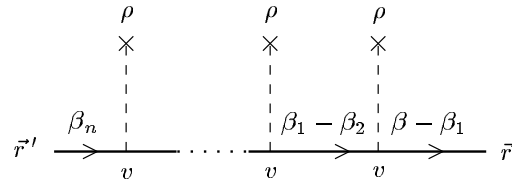
où $G_\beta^0(\vec{r}, \vec{r}')$ est le propagateur pour l'hamiltonien H_0 . Le terme d'ordre n s'écrit

$$\delta G_\beta^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}') = (-v)^n \int_0^\beta d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \cdots \int_0^{\beta_{n-1}} d\beta_n \int d\vec{r}_1 \cdots \int d\vec{r}_n G_{\beta-\beta_1}^0(\vec{r}, \vec{r}_1) \sum_{i_1} u(\vec{r}_1 - \vec{r}_{i_1}) \\ G_{\beta_1-\beta_2}^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \sum_{i_2} u(\vec{r}_2 - \vec{r}_{i_2}) \cdots \sum_{i_n} u(\vec{r}_n - \vec{r}_{i_n}) G_{\beta_n}^0(\vec{r}_n, \vec{r}') \quad (5.10)$$

il est représenté par le diagramme

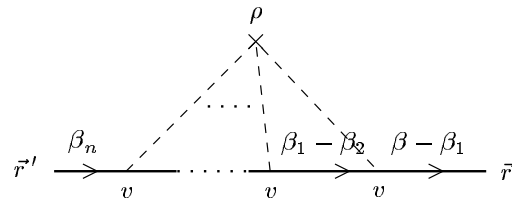


Chaque ligne pointillée est associée à l'interaction avec une impureté localisée en \vec{r}_{i_k} que l'on précise pour indiquer que la moyenne sur le désordre n'a pas encore été effectuée. Lors de la moyenne sur les positions \vec{r}_{i_k} des impuretés, on est amené à distinguer les cas $i_k = i_{k'}$ et $i_k \neq i_{k'}$; dans le premier cas, deux interactions ont lieu avec la même impureté, ce qui correspond diagrammatiquement à joindre les pattes des impuretés i_k et $i_{k'}$, alors que dans le second cas les interactions se font avec deux impuretés distinctes dont on moyenne séparément les positions. La moyenne sur le désordre conduit donc à considérer toutes les possibilités pour regrouper les pattes du diagramme précédent entre elles. Parmi les diagrammes ainsi obtenus, il existe un diagramme pour lequel toutes les impuretés sont différentes, représenté par :



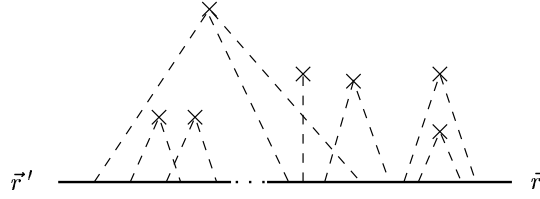
Ce diagramme est un diagramme de champ moyen. Tous les potentiels apparaissant dans (5.10) sont moyennés indépendamment les uns des autres. La moyenne sur chaque position d'impureté produit un facteur ρ , le terme de champ moyen est donc proportionnel à $(\rho v)^n$.

Un autre diagramme produit par la moyenne est le diagramme pour lequel $i_1 = i_2 = \cdots = i_n$. Toutes les pattes sont alors regroupées :



Ce diagramme est appelé diagramme de cumulants (il fait intervenir le n ème cumulants de la densité d'impuretés). Il correspond à n interactions successives avec la même impureté, il est proportionnel à ρv^n .

Entre ces deux situations, on doit également considérer toutes les possibilités de regrouper les pattes, comme par exemple :



Un terme en $\rho^m v^n$ correspond à n interactions avec m impuretés distinctes.

Extraire le champ moyen au niveau de l'hamiltonien : $H = H_0 + W - \langle W \rangle$, où $W = v \sum_{i=1}^N u(\vec{r} - \vec{r}_i)$, conduit à une certaine simplification de la série diagrammatique. Tous les diagrammes qui contiennent une patte isolée sont nuls alors que les autres diagrammes sont calculés de la même manière qu'en l'absence de $\langle W \rangle$.

Règles de Feynman pour la théorie de perturbations pour \tilde{H}'_d :

1. On commence par construire tous les diagrammes inéquivalents sans patte isolée.
2. Chaque ligne est associée à un propagateur de Landau pour le champ moyen $G_{\beta_i - \beta_{i+1}}^{(L)}(z_i, z_{i+1})$. Le propagateur est donné par (3.38) en tenant compte du décalage d'énergie supplémentaire dans $\frac{1}{2}\Pi_+^{(L)}\Pi_-^{(L)}$:

$$G_{\beta}^{(L)}(z, z') = \frac{\langle \omega_c \rangle e^{-\beta \langle \omega_c \rangle}}{2\pi \text{sh}(\beta \langle \omega_c \rangle)} \exp - \frac{\langle \omega_c \rangle}{2} (\coth(\beta \langle \omega_c \rangle) |z - z'|^2 - z\bar{z}' + \bar{z}z'). \quad (5.11)$$

3. Une interaction avec une impureté en z_j se traduit par l'introduction d'un opérateur :

$$\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_j} \Pi_-^{(L)}. \quad (5.12)$$

4. On moyenne sur les positions des impuretés distinctes à l'aide des relations :

$$\int dz_i d\bar{z}_i \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} = \pi z \quad (5.13)$$

$$\int dz_i d\bar{z}_i \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} \frac{1}{\bar{z}' - \bar{z}_i} = \pi \left(\frac{z}{\bar{z}' - \bar{z}} + \frac{z'}{\bar{z} - \bar{z}'} \right) \quad (5.14)$$

$$\int dz_i d\bar{z}_i \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} \frac{1}{\bar{z}' - \bar{z}_i} \frac{1}{\bar{z}'' - \bar{z}_i} = \pi \left(\frac{z}{(\bar{z}' - \bar{z})(\bar{z}'' - \bar{z})} + \frac{z'}{(\bar{z} - \bar{z}')(\bar{z}'' - \bar{z}')} + \frac{z''}{(\bar{z} - \bar{z}'')(\bar{z}' - \bar{z}'')} \right)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

5. On intègre sur les positions intermédiaires et sur les températures, puis on multiplie le diagramme à m impuretés distinctes par $(i\alpha)^n \rho^m$.

Calculons la correction d'ordre 2 pour illustrer ces règles et montrer comment le calcul peut être simplifié en utilisant les relations données au chapitre 3. Il n'y a qu'un seul diagramme à l'ordre 2 :

$$= (i\alpha)^2 \rho \pi \int_0^\beta d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \int dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2$$

$$G_{\beta_{01}}^{(L)}(z, z_1) \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \Pi_-^{(L)} \xrightarrow{\quad} G_{\beta_{12}}^{(L)}(z_1, z_2) \Pi_-^{(L)} \xrightarrow{\quad} G_{\beta_2}^{(L)}(z_2, z') , \quad (5.15)$$

où $\beta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_i - \beta_j$, on a posé $\beta_0 \equiv \beta$. Concentrons-nous dans un premier temps sur les intégrales spatiales ; en utilisant (3.48,3.49) on remarque que

$$\frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \Pi_{-}^{(L)} G_{\beta_{12}}^{(L)}(z_1, z_2) = -e^{2\beta_{12}\langle\omega_c\rangle} \Pi_{+}^{(L)} G_{\beta_{12}}^{(L)}(z_1, z_2) . \quad (5.16)$$

L'intégrale spatiale du diagramme vaut donc :

$$-e^{2\beta_{12}\langle\omega_c\rangle} \int dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2 G_{\beta_{01}}^{(L)}(z, z_1) \Pi_{+}^{(L)} G_{\beta_{12}}^{(L)}(z_1, z_2) \Pi_{-}^{(L)} G_{\beta_2}^{(L)}(z_2, z') ; \quad (5.17)$$

en présence de l'intégration sur z_2 , l'opérateur $\Pi_{+}^{(L)}$ agit indifféremment à droite ou à gauche. D'autre part, (3.52,3.53) permettent de faire traverser les propagateurs par les opérateurs afin que ces derniers n'agissent plus que sur les variables externes z et z' . On peut alors intégrer sur z_1 et z_2 . On aboutit à

$$-e^{2\beta\langle\omega_c\rangle} \Pi_{+}^{(L)} G_{\beta}^{(L)}(z, z') \Pi_{-}^{(L)} = -\Pi_{+}^{(L)} \Pi_{-}^{(L)} G_{\beta}^{(L)}(z, z') = 2 \frac{\partial}{\partial \beta} G_{\beta}^{(L)}(z, z') . \quad (5.18)$$

Finalement les intégrations sur les températures sont triviales et le diagramme est égal à

$$\begin{array}{c} \rho \\ \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad \alpha \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \vec{r}' \quad \vec{r} = -\pi \rho \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} G_{\beta}^{(L)}(z, z') . \quad (5.19)$$

Ce résultat permet en particulier de calculer la première correction à la fonction de partition :

$$\delta Z_{\beta}^{(2)} = V \rho \alpha^2 \frac{(\beta\langle\omega_c\rangle)^2}{2 \text{sh}^2 \beta\langle\omega_c\rangle} = \alpha \frac{V\langle\omega_c\rangle}{\pi} \frac{(\beta\langle\omega_c\rangle)^2}{2 \text{sh}^2 \beta\langle\omega_c\rangle} . \quad (5.20)$$

Pour certains diagrammes, tels que celui qui vient d'être calculé, il est possible de progresser dans les calculs en exploitant les propriétés des opérateurs. Cela n'est pas le cas pour les diagrammes croisés (Furtlehner 1997).

Terminons par quelques remarques d'importance pour la suite. Considérons une quantité quelconque F , intégrée sur le volume. Dans le modèle d'impuretés magnétiques, elle se calcule perturbativement sous la forme d'un développement $F_{\text{IM}} = F_0 + \sum_{n \geq m=1}^{\infty} F_{n,m} \rho^m \alpha^n$. Puisque le champ moyen est proportionnel à $\rho\alpha$, cette série peut être réorganisée en $F_{\text{IM}} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p f_p(\langle\omega_c\rangle)$.

1. Le terme F_0 correspond au calcul de F pour le problème libre.
2. Les termes $m = n$ sont les termes de champ moyen. Ils correspondent au calcul de F pour le problème de Landau pour le champ moyen $\langle B \rangle$: $F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n,n} (\rho\alpha)^n = f_0(\langle\omega_c\rangle) = F_{\langle L \rangle}$. Si la théorie de perturbation était construite dans le formalisme \tilde{H} , ces termes seraient donnés par les diagrammes de champ moyen. Dans le formalisme \tilde{H}' que nous avons adopté, ces termes sont automatiquement inclus dans l'ordre 0.
3. Les termes pour $m = 1$ correspondent physiquement aux interactions avec une seule impureté ; ces termes doivent résulter d'un calcul de F pour le problème à un vortex : $F_0 + \rho \sum_{n=1}^{\infty} F_{n,1} \alpha^n = F_0 + V \rho (F_{\text{vortex}} - F_0)$. Dans le formalisme \tilde{H} , ces termes correspondent aux diagrammes de cumulants. Notons que le terme $F_{1,1} \rho \alpha$ est également donné

par le terme d'ordre $\langle \omega_c \rangle$ de $F_{\langle L \rangle}$. Par exemple, le terme d'ordre 1 en α de l'aimantation créée par le vortex (4.24) $-\frac{\epsilon}{8}\beta\frac{\pi\alpha}{V}$, correspond bien au terme d'ordre 1 en ω_c de l'aimantation de Landau (3.102) $-\frac{\epsilon}{8}\beta\omega_c$. Nous avons fait une remarque analogue concernant la conductivité du vortex.

4. À l'ordre 2 de la théorie de perturbation développée précédemment, la correction au champ moyen est de la forme $\rho\alpha^2 \times$ (fonction de $\langle \omega_c \rangle$). Si on considère que $\langle \omega_c \rangle = \pi\rho\alpha$ est fixée, il s'agit donc d'une correction d'ordre α par rapport au champ moyen. Tous les termes en $\rho^m\alpha^{m+1}$ sont issus de ce calcul qui correspond au terme $\alpha f_1(\langle \omega_c \rangle)$. Physiquement, ces termes décrivent deux interactions de l'électron avec une impureté, les autres impuretés n'étant ressenties qu'à travers le champ magnétique moyen. Ils sont donc contenus dans un calcul de F pour le problème à champ magnétique en présence d'un vortex : $F_{B+\text{vortex}}$. Le terme d'ordre α^2 de $F_{B+\text{vortex}}$ correspond en effet à deux interactions de l'électron avec le vortex en présence d'un champ magnétique, et donc au terme $\alpha f_1(\langle \omega_c \rangle)$. Si le développement de $F_{B+\text{vortex}}$ en puissances de α s'écrit $F_{B+\text{vortex}} = F_L + \Delta F^{(1)} + \Delta F^{(2)} + \dots$, on aura :

$$(F_L + \rho V \Delta F^{(2)})|_{B \rightarrow \langle B \rangle} = F_{\langle L \rangle} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \alpha^{m+1} F_{m+1,m} = F_{\langle L \rangle} + \alpha f_1(\langle \omega_c \rangle) \quad (5.21)$$

donc

$$F_{\text{IM}} = F_{\langle L \rangle} + \alpha f_1(\langle \omega_c \rangle) + O(\alpha^2) \quad (5.22)$$

Pour illustrer le dernier point, on considère le développement de la fonction de partition (4.56) pour le problème avec champ magnétique et vortex : $Z_\beta(B, \alpha) = Z_\beta^L + \alpha(\dots) + \alpha^2 \frac{(\beta\omega_c)^2}{2\text{sh}^2\beta\omega_c} + O(\alpha^3)$. On vérifie que le terme en α^2 est bien égal, à un facteur $N = V\rho$ près, à la correction $\delta Z_\beta^{(2)}$ calculée ci-dessus.

5.3 Aimantation

Le terme de champ moyen de l'aimantation est donné par l'aimantation du problème de Landau pour le champ moyen. La première correction (d'ordre α) est donnée par le problème avec un champ magnétique et un vortex. L'objet naturel qu'on développe en perturbation est $Z_\beta M_\beta^{\text{orb}}$ (4.57) dont on peut extraire le terme en α^2 , et le multiplier par ρV pour obtenir la correction en α du problème d'impuretés magnétiques. Il est également possible de revenir à la fonction de partition (4.56) dont le terme en α^2 est donné par $\Delta Z^{(2)} = \alpha^2 \frac{x^2}{2\text{sh}^2 x}$ (où $x \equiv \beta\omega_c$). En remarquant que $\frac{\partial \Delta Z^{(2)}}{\partial x} = 2\Delta Z^{(2)} \left(\frac{1}{x} - \coth x \right)$ il est aisé de montrer que :

$$\begin{aligned} M_\beta^{\text{orb}} &= M_\beta^{\langle L \rangle, \text{orb}} \left(1 + \frac{\delta Z_\beta^{(2)}}{Z_\beta^{\langle L \rangle}} \right) + \mu_B \frac{\delta Z_\beta^{(2)}}{Z_\beta^{\langle L \rangle}} + O(\alpha^2) \\ &= M_\beta^{\langle L \rangle, \text{orb}} + \mu_B \alpha \left(\frac{\beta \langle \omega_c \rangle e^{\beta \langle \omega_c \rangle}}{\text{sh} \beta \langle \omega_c \rangle} - \frac{(\beta \langle \omega_c \rangle)^2}{\text{sh}^2 \beta \langle \omega_c \rangle} \right) + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dans le domaine des hautes températures ($\beta \langle \omega_c \rangle \rightarrow 0$) on aboutit à

$$M_\beta^{\text{orb}} \simeq -\mu_B \frac{\beta \langle \omega_c \rangle}{3} (1 - 3\alpha) \quad (5.24)$$

où $\mu_B = e/2$.

5.4 Restriction de l'espace de Hilbert à celui d'un niveau Landau

Restreindre l'espace de Hilbert au sous espace correspondant à un niveau de Landau apporte certaines simplifications. Différents auteurs ont utilisé cette projection pour étudier les propriétés spectrales d'un modèle avec champ magnétique uniforme et potentiel (scalaire) aléatoire. Wegner a montré, dans le cas d'un potentiel distribué par une loi gaussienne que la densité d'états pouvait être calculée exactement (Wegner 1983). Brézin, Gross et Itzykson ont suivi une approche similaire pour d'autres types de potentiels désordonnés (Brézin *et al.* 1984). Citons également les travaux de Dorlas, Macris et Pulé (Macris & Pulé 1992), (Dorlas *et al.* 1995). Parmi différents types de désordres, Brézin *et al.* ont considéré le cas où le potentiel est une somme d'impuretés δ . Notons que la projection dans le premier niveau de Landau (LLL) d'un champ magnétique uniforme introduit une régularisation du problème pour le potentiel bruit blanc ou somme d'impuretés δ . Pour ces deux modèles, la théorie de perturbation à partir de la fonction de Green libre $G^+(\vec{r}, \vec{r}'; k^2/2) = -\frac{i}{2}H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|)$ présente des divergences ultraviolettes dont l'origine réside dans la divergence logarithmique de la fonction de Green à courte distance; dans le cas des impuretés δ , ces divergences peuvent être traitées par une procédure de renormalisation (Jackiw 1991), (Bergman 1992). En revanche, le propagateur du problème restreint au LLL ne présente pas de singularité à courte distance et la théorie de perturbation ne nécessite aucune régularisation supplémentaire.

Desbois *et al.* (1996) ont montré que le modèle d'impuretés magnétiques projeté dans le LLL d'un champ magnétique extérieur conduit au modèle étudié par Brézin *et al.* dans le cas des impuretés δ . L'hamiltonien que nous considérons est $P_0\tilde{H}'_dP_0$ où P_0 est le projecteur dans le LLL de $H^{(L)}$ (*cf.* chapitre 3).

$$(\tilde{H}'_d)_{\langle LLL \rangle} = P_0 2 \langle \omega_c \rangle - 2iP_0 (\partial_{\bar{z}}\Phi - \partial_{\bar{z}}\langle \Phi \rangle) \Pi_{-}^{(L)} P_0 \quad (5.25)$$

On remarque que

$$-2i\partial_{\bar{z}}\Phi \Pi_{-}^{(L)} = -2i\Pi_{-}^{(L)}\partial_{\bar{z}}\Phi - 2i[\partial_{\bar{z}}\Phi, \Pi_{-}^{(L)}] = -2i\Pi_{-}^{(L)}\partial_{\bar{z}}\Phi + 4\partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\Phi, \quad (5.26)$$

d'autre part, en utilisant que $P_0\Pi_{-}^{(L)} = 0$ on aboutit à

$$(\tilde{H}'_d)_{\langle LLL \rangle} = P_0 2 \langle \omega_c \rangle + P_0 4 \partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}(\Phi - \langle \Phi \rangle)P_0; \quad (5.27)$$

on peut encore simplifier cette expression :

$$(\tilde{H}'_d)_{\langle LLL \rangle} = P_0 eB(\vec{r})P_0. \quad (5.28)$$

Pour le problème d'impuretés magnétiques, l'hamiltonien projeté dans le LLL est donc un hamiltonien d'impuretés δ de poids $\lambda = 2\pi\alpha$, projeté dans le LLL. C'est un cas particulier du modèle étudié par Brézin *et al.* (1984). Si le champ magnétique aléatoire est choisi avec une mesure d'intégration gaussienne avec une valeur moyenne non nulle, on est conduit au modèle étudié par Wegner (1983).

La projection du modèle d'impuretés magnétiques dans le LLL du champ moyen extrait à l'aide de la transformation non unitaire, conduit-elle à des simplifications pour le calcul de la conductivité? Considérons de manière plus générale un hamiltonien restreint à un niveau de Landau n particulier $H^{(n)} = E_n P_n + P_n V P_n$, où E_n désigne l'énergie du niveau de Landau. Le propagateur pour le problème restreint au niveau de Landau est par définition :

$$G_{\beta}^{(n)}(z, z') \stackrel{\text{def}}{=} \langle z | P_n e^{-\beta H^{(n)}} | z' \rangle . \quad (5.29)$$

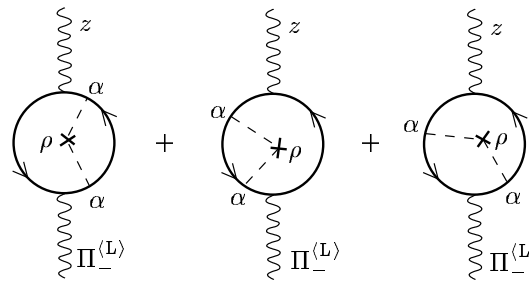
D'après l'expression (2.42), on constate que l'opérateur Π_{-}^L est placé entre deux projecteurs P_n , ce qui est nul en vertu de (3.60). La conductivité pour le problème restreint à un niveau de Landau particulier est donc nulle : $\sigma_{\beta}^{- (n)}(t) = 0$. On conclut que seuls les couplages entre niveaux de Landau distincts contribuent à la conductivité. Le problème restreint à un niveau de Landau ne peut donc donner aucune information sur le transport.

5.5 Analyse perturbative de la conductivité Hall

Le spectre du système est un spectre de Landau avec des niveaux élargis par le désordre pour les petites valeurs de la constante de couplage α . On cherche donc à calculer les corrections au résultat de champ moyen. Pour donner une analyse perturbative de (2.42), on va utiliser l'hamiltonien transformé \tilde{H}'_d , ce qui nécessite de transformer les opérateurs apparaissant dans (2.42) :

$$\sigma_{\beta}^{-}(t) = \frac{i e^2}{2V} Y(t) \frac{1}{Z_{\beta}} \int dz d\bar{z} dz' d\bar{z}' \left(\Pi_{-}^{(L)} \tilde{G}'_{it}(z, z') z' \tilde{G}'_{\beta-it}(z', z) - (it \rightarrow it + \beta) \right) . \quad (5.30)$$

Nous nous intéressons au calcul de la conductivité moyenne, *i.e.* la moyenne sur le désordre est sous entendue dans le second membre. Cette expression montre que l'utilisation de la transformation non unitaire offre un double avantage : d'une part elle permet de définir sans ambiguïté la théorie de perturbation et fait disparaître les termes quadratiques dans le désordre dans l'hamiltonien, mais d'autre part, alors que le désordre se manifeste dans l'opérateur covariant dans l'expression (2.42), il n'apparaît plus que dans les propagateurs dans (5.30), ce qui conduit à une nouvelle simplification de la série de perturbation pour la conductivité. La première correction à la conductivité s'exprime à l'aide des règles de Feynman présentées plus haut. La moyenne du produit de propagateurs fait apparaître trois termes qu'on représente par les trois diagrammes



$$(5.31)$$

Les lignes ondulées signalent l'introduction d'un opérateur pour le calcul d'une fonction de corrélation. Les deux premiers diagrammes correspondent à remplacer la moyenne du produit de propagateurs dans (5.30) par le produit des propagateurs moyens.

Nous avons remarqué que cette correction était contenue dans la conductivité du problème avec champ magnétique et vortex (4.60). On peut donc extraire de cette dernière le terme d'ordre α^2 puis le multiplier par $V\rho$ afin d'obtenir le résultat souhaité. D'après (4.63), on aboutit finalement à :

$$\sigma_{E_F}^-(\omega = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{e^{iE_F t'}}{it' + \eta} \frac{ie^2}{2V\langle\omega_c\rangle} \left\{ Z_{it'} + Z_{it'}^{(L)} \alpha\langle\omega_c\rangle it' + O(\alpha^2) \right\} \quad (5.32)$$

où Z_β est la fonction de partition pour (5.2). Cette dernière s'exprime elle-même comme un développement en puissance de α , dont le terme d'ordre zéro est $Z_\beta^{(L)}$. Puisque l'expression précédente est valable à l'ordre 1 en α , on peut remplacer $Z_{it'}^{(L)}$ par $Z_{it'}$, ce qui rajoutera des termes non pertinents d'ordre α^2 . On aboutit alors à

$$\sigma_{E_F}^-(\omega = 0) = \frac{ie^2}{2V\langle\omega_c\rangle} \left(1 + \alpha\langle\omega_c\rangle \frac{d}{dE_F} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{e^{iE_F t'}}{it' + \eta} Z_{it'} + O(\alpha^2) . \quad (5.33)$$

L'intégrale correspond à la densité d'états intégrée. $\sigma_{E_F}^-(\omega = 0)$ est purement imaginaire à cet ordre, ce qui implique que la conductivité longitudinale est nulle et que la conductivité Hall est donnée par :

$$\sigma_{xy}(E_F) = \frac{eN(E_F + \alpha\langle\omega_c\rangle)}{\langle B \rangle V} + O(\alpha^2) . \quad (5.34)$$

Pour interpréter ce résultat considérons la conductivité comme une fonction du facteur de remplissage $\nu = \frac{N\hbar}{e\langle B \rangle V}$. Pour faire varier ν , agissons sur la densité d'électrons, contrôlée par le niveau de Fermi.

La fonction $N(E_F)$ est monotone, la conductivité Hall à l'ordre 1 en α est donc nécessairement supérieure ou égale au résultat classique pour le problème de Landau. Nous avons discuté de l'allure de la densité d'états qui présente des pics de Landau élargis par le désordre et séparés par des "gaps" $2\langle\omega_c\rangle$. Lorsque l'énergie de Fermi se trouve dans un "gap", c'est-à-dire que le facteur de remplissage est égal à un entier n , $E_F + \alpha\langle\omega_c\rangle$ se trouve également dans le "gap" si bien que $N(E_F + \alpha\langle\omega_c\rangle) = N(E_F)$ et la conductivité Hall vaut $\sigma_{xy}(E_F \in \text{gap}) = n \frac{e^2}{h}$. D'autre part lorsque E_F se trouve dans une bande de Landau $N(E_F + \alpha\langle\omega_c\rangle) > N(E_F)$, ce qui induit une augmentation de la conductivité Hall par rapport au résultat classique. Cet argument montre que la conductivité Hall oscille au-dessus du résultat classique, et le rejoint pour les facteurs de remplissage entiers.

Ces oscillations de la conductivité au-dessus de la droite classique, illustrées sur la figure 5.2, peuvent sembler *a priori* surprenantes. Alors qu'il paraîtrait naturel, d'après les arguments présentés dans le chapitre 1, que la conductivité développe des oscillations de part et d'autre de la droite classique sous l'effet du désordre, (5.34) montre une augmentation de la conductivité Hall. Certains résultats expérimentaux nous fournissent toutefois une indication de l'origine d'un tel comportement. Haug, Gerhardts, von Klitzing et Ploog ont étudié l'influence des impuretés dans les échantillons d'hétérostructures GaAs/AlGaAs (Haug, Gerhardts, von Klitzing & Ploog 1987), (Gerhardts, Haug & Ploog 1987). Ils ont observé que l'introduction d'ions donneurs Si, qui jouent le rôle d'impuretés attractives pour le gaz d'électrons, décale les plateaux de Hall de la conductivité sous la droite classique, alors que l'introduction d'ions accepteurs Be, qui agissent donc comme des impuretés répulsives, décale les plateaux de Hall au-dessus de la droite classique (*cf.* figure 5.3). Tout en étant conscients des limites de la comparaison entre ces expériences

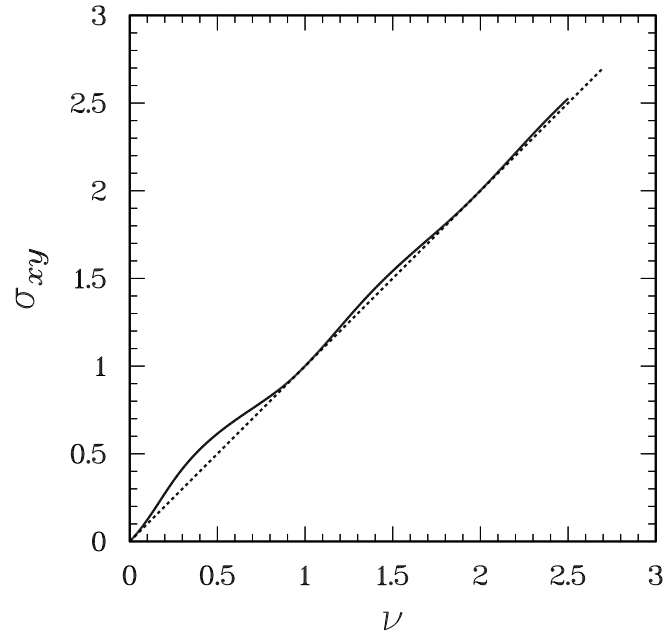


FIG. 5.2: Conductivité Hall en fonction du facteur de remplissage $\nu = \frac{N\hbar}{e\langle B \rangle V}$ pour le modèle d'impuretés magnétiques ($\alpha = 0.01$). Ligne continue : résultat perturbatif. Ligne pointillée : champ moyen (résultat classique).

et le modèle d'impuretés magnétiques que nous avons étudié, insistons sur le fait que les deux situations décrivent un gaz d'électrons soumis à des impuretés répulsives : le modèle d'impuretés magnétiques décrit des électrons couplés à des tubes de flux impénétrables. À la lumière des résultats expérimentaux, il paraît donc naturel d'aboutir à un décalage de la conductivité au dessus de la droite classique.

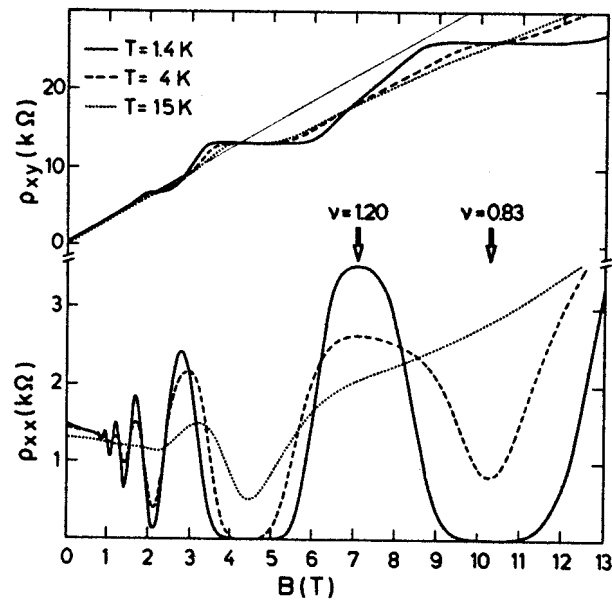


FIG. 1. Measured resistivities ρ_{xx} and ρ_{xy} as functions of the magnetic field B for a sample ($n_s = 2.1 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, $\mu = 30000 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$) with additional Be impurities ($n_i = 4 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$). The thin straight line indicates $\rho_{xy}^0 = B/en_s$, with n_s calculated from the ρ_{xx} minima for $\nu > 2$.

FIG. 5.3: (Haug *et al.* 1987). Sous l'effet des impuretés répulsives les plateaux (pour la résistivité) sont décalés sous le résultat classique ; pour la conductivité σ_{xy} en fonction de $1/B$, les plateaux seraient donc décalés au-dessus de la droite classique.

Annexe A

Conductivité : formalisme général

A.1 Théorie de la réponse linéaire

Nous rappelons les éléments essentiels de la théorie de la réponse linéaire qu'on peut trouver dans de nombreux ouvrages (par exemple (Kubo, Toda & Hashitsume 1992), (Pottier 1994)).

Si on soumet un système qui se trouve initialement dans un état d'équilibre statistique à une perturbation extérieure, la dynamique hors équilibre du système pourra se "lire" sur certaines observables. Pour prendre un exemple précis, le système peut être un gaz d'électrons et la perturbation un champ électrique extérieur; la présence de ce dernier induit notamment des courants électriques. L'objet de la théorie de la réponse linéaire est d'exprimer l'évolution de certaines observables au premier ordre dans la perturbation.

Dans cette partie on distinguera les opérateurs à l'aide d'un chapeau. $\langle \dots \rangle$ désigne une moyenne thermique et non une moyenne sur le désordre.

On considère un système d'hamiltonien \hat{H}_0 dont l'équilibre statistique est décrit par la matrice densité $\hat{\rho}_0$. Le système est soumis à une force extérieure $f(t)$ qui se couple à une observable \hat{Q} du système; si $f(t)$ représente un champ électrique uniforme, l'observable à laquelle il se couple est le moment dipolaire électrique du système. En présence de la perturbation extérieure, l'hamiltonien du système s'écrit

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 - f(t)\hat{Q}. \quad (\text{A.1})$$

La matrice densité $\hat{\rho}(t)$ du système hors équilibre suit une évolution donnée par l'équation de Liouville :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}(t), \hat{H}(t)]. \quad (\text{A.2})$$

Nous supposons que la perturbation est branchée adiabatiquement depuis un instant très lointain dans le passé : $f(t \rightarrow -\infty) = 0$. La condition initiale sera donc

$$\hat{\rho}(t \rightarrow -\infty) = \hat{\rho}_0. \quad (\text{A.3})$$

La théorie de la réponse linéaire cherche à calculer la réponse d'une observable \hat{P} à la perturbation. À cette fin on résout l'équation (A.2) au premier ordre des perturbations. Posons $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(t)$, si on ne garde que les termes du premier ordre dans l'équation satisfaite par $\delta\hat{\rho}(t)$, on aboutit à :

$$\frac{d}{dt}\delta\hat{\rho}(t) \simeq -\frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_0, \hat{Q}] f(t) + \frac{i}{\hbar} [\delta\hat{\rho}(t), \hat{H}_0]. \quad (\text{A.4})$$

Finalement la solution de cette équation est

$$\hat{\rho}(t) \simeq \hat{\rho}_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t'-t)} [\hat{\rho}_0, \hat{Q}] e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t'-t)} f(t'). \quad (\text{A.5})$$

Elle permet de calculer l'évolution de la valeur de l'observable \hat{P} :

$$\langle \hat{P} \rangle(t) \simeq \langle \hat{P} \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G_{PQ}(t-t') f(t') \quad (\text{A.6})$$

où la fonction G_{PQ} est définie par

$$G_{PQ}(t-t') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{\hbar} \mathbf{Y}(t-t') \left\langle [\hat{P}(t), \hat{Q}(t')] \right\rangle. \quad (\text{A.7})$$

$\mathbf{Y}(t)$ est la fonction de Heaviside ; $\hat{P}(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{P} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}$ désigne l'opérateur \hat{P} dans la représentation d'interaction. Dans les expressions précédentes il est entendu que $\langle \dots \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} \{ \hat{\rho}_0 \dots \}$ désigne la moyenne d'équilibre tandis que $\langle \dots \rangle(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \dots \}$ désigne la moyenne hors équilibre.

La fonction G_{PQ} donne la réponse sur l'observable \hat{P} à une perturbation extérieure couplée à l'observable \hat{Q} . Les relations (A.6) et (A.7) indiquent que cette fonction de réponse, qui décrit la dynamique du système hors équilibre, est donnée, au premier ordre des perturbations (réponse linéaire), par une fonction de corrélation du système à l'équilibre. Cette fonction de réponse est appelée réponse impulsionnelle; cette appellation trouve son origine dans le fait qu'une force extérieure $f(t) = f_0 \delta(t)$ induirait une réponse $\langle \hat{P} \rangle(t) = G_{PQ}(t) f_0$.

Si la perturbation $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$ est sinusoïdale, la réponse le sera également :

$$\langle \hat{P} \rangle(t) \simeq \langle \hat{P} \rangle + \tilde{G}_{PQ}(\omega) f_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{A.8})$$

où $\tilde{G}_{PQ}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $G_{PQ}(t)$:

$$\tilde{G}_{PQ}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} dt e^{(i\omega - \epsilon)t} G_{PQ}(t) \quad (\text{A.9})$$

$\tilde{G}_{PQ}(\omega)$ est appelée fonction de réponse fréquentielle. ϵ est un facteur de convergence qui peut s'interpréter physiquement comme l'établissement adiabatique depuis $t \rightarrow -\infty$ de la perturbation $f_0 e^{-i\omega t}$.

• Fonction de réponse pour un système à N corps (sans interaction)

Les équations (A.6) et (A.7) sont valables aussi bien pour un problème à un corps que pour un problème à N corps. Pour un problème à un corps la matrice densité d'équilibre pourra être du type Boltzmann $\hat{\rho}_0 = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta \hat{h}_0}$ alors que pour un problème à N corps on adoptera plus naturellement un point de vue grand canonique $\hat{\rho}_0 = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})}$. Dans ce paragraphe nous choisissons de noter avec des minuscules les opérateurs à un corps et avec des majuscules les opérateurs à N corps. L'objet de ce paragraphe est d'examiner si on peut relier, sous certaines conditions, une fonction de réponse à N corps à une fonction de réponse à un corps.

En pratique les fonctions de réponses font intervenir des opérateurs \hat{Q} et \hat{P} qui sont la plupart du temps des sommes d'opérateurs à un corps $\hat{Q} = \sum_{i=1}^N \hat{q}^{(i)}$. Dans un formalisme "second quantifié" de tels opérateurs peuvent s'écrire comme

$$\hat{Q} = \sum_{\alpha, \beta} q_{\alpha\beta} \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta \quad (\text{A.10})$$

où $\{|\alpha\rangle\}$ désigne une base d'états propres de l'hamiltonien à un corps ($\hat{h}_0|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha|\alpha\rangle$), et $q_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha | \hat{q} | \beta \rangle$ un élément de matrice de l'opérateur à un corps. \hat{c}_α^\dagger (respectivement \hat{c}_α) est l'opérateur qui crée¹(respectivement détruit) un électron dans l'état $|\alpha\rangle$. Ces deux opérateurs obéissent à la relation d'anticommuation : $\{\hat{c}_\alpha, \hat{c}_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}$.

Quelques opérateurs qui nous intéressent particulièrement : l'opérateur "nombre d'électrons" $\hat{N} = \sum_\alpha \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\alpha$, l'hamiltonien $\hat{H}_0 = \sum_i \hat{h}_0^{(i)} = \sum_\alpha \epsilon_\alpha \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\alpha$. Nous serons également amené à utiliser l'opérateur de densité d'électrons ou de densité de courant, qui sont reliées à l'opérateur de champ $\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(\vec{r}) \hat{c}_\alpha$ où $\varphi_\alpha(\vec{r})$ est la fonction d'onde de l'état individuel $|\alpha\rangle$. La densité d'électrons est $\hat{N}(\vec{r}) = \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha | \hat{n}(\vec{r}) | \beta \rangle \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta$. L'opérateur de densité de courant est $\hat{J}(\vec{r}) = \frac{e}{2i} \left(\vec{D}^* \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) - \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \vec{D} \hat{\Psi}(\vec{r}) \right)$ où $\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} - ie\vec{A}$ est la dérivée covariante. À partir de cette définition il est facile de vérifier que $\hat{J}(\vec{r}) = \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha | \hat{j}(\vec{r}) | \beta \rangle \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta$. (voir plus loin pour la définition de $\hat{n}(\vec{r})$ et $\hat{j}(\vec{r})$).

Si le gaz d'électrons se trouve à l'équilibre thermodynamique, on a

$$\langle \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta \rangle = \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta \right\} = f_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.11})$$

où f_α désigne la statistique de Fermi-Dirac $f_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f(\epsilon_\alpha) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} + 1}$. La valeur moyenne d'un opérateur du type de \hat{Q} s'écrit donc

$$\langle \hat{Q} \rangle = \text{Tr} \left\{ f(\hat{h}_0) \hat{q} \right\}. \quad (\text{A.12})$$

La relation

$$\langle \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta \hat{c}_\lambda^\dagger \hat{c}_\nu \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\nu} (\delta_{\alpha\lambda} f_\alpha + (1 - \delta_{\alpha\lambda}) f_\alpha f_\lambda) + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\lambda\beta} (1 - \delta_{\alpha\lambda}) f_\alpha (1 - f_\lambda) \quad (\text{A.13})$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\nu} f_\alpha f_\lambda + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\lambda\beta} f_\alpha (1 - f_\lambda) \quad (\text{A.14})$$

permet de calculer la moyenne d'un produit d'opérateurs

$$\langle \hat{P} \hat{Q} \rangle = \text{Tr} \left\{ f(\hat{h}_0) \hat{p} \left(1 - f(\hat{h}_0) \right) \hat{q} \right\} + \langle \hat{P} \rangle \langle \hat{Q} \rangle \neq \text{Tr} \left\{ f(\hat{h}_0) \hat{p} \hat{q} \right\}. \quad (\text{A.15})$$

On s'intéresse également à des commutateurs d'opérateurs. On vérifie² que

$$\left\langle \left[\hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta, \hat{c}_\lambda^\dagger \hat{c}_\nu \right] \right\rangle = \delta_{\alpha\nu} \delta_{\lambda\beta} (f_\alpha - f_\lambda), \quad (\text{A.16})$$

¹Rappelons que l'action des opérateurs sur un état de Fock est

$$\begin{aligned} \hat{c}_\alpha |n_1 \cdots n_\alpha \cdots\rangle &= (-1)^{r_\alpha} n_\alpha |n_1 \cdots n_\alpha - 1 \cdots\rangle \\ \hat{c}_\alpha^\dagger |n_1 \cdots n_\alpha \cdots\rangle &= (-1)^{r_\alpha} (1 - n_\alpha) |n_1 \cdots n_\alpha + 1 \cdots\rangle \end{aligned}$$

où $r_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\alpha-1} n_\lambda$.

² $[AB, CD] = A\{B, C\}D - \{A, C\}BD + CA\{B, D\} - C\{A, D\}B$.

on a donc

$$\langle [\hat{P}, \hat{Q}] \rangle = \text{Tr} \left\{ f(\hat{h}_0) [\hat{p}, \hat{q}] \right\}. \quad (\text{A.17})$$

Comme pour le calcul de la moyenne d'un opérateur isolé, la moyenne d'un commutateur fait intervenir les résultats du calcul à un corps, pondérés par la statistique de Fermi-Dirac.

À l'aide de (A.17), la fonction de réponse du problème à N corps s'écrit

$$\mathcal{G}_{PQ}(t) = \frac{i}{\hbar} Y(t) \frac{1}{\Xi} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} [\hat{P}(t), \hat{Q}] \right\} = \frac{i}{\hbar} Y(t) \text{Tr} \left\{ f(\hat{h}_0) [\hat{p}(t), \hat{q}] \right\} \quad (\text{A.18})$$

qui peut donc être reliée à la fonction de réponse du problème à un corps calculée avec une statistique de Boltzmann :

$$g_{pq}^\beta(t) = \frac{i}{\hbar} Y(t) \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta\hat{h}_0} [\hat{p}(t), \hat{q}] \right\}. \quad (\text{A.19})$$

À température finie on décompose formellement la distribution de Fermi-Dirac comme une série en $e^{-\beta\hat{h}_0}$

$$\mathcal{G}_{PQ}(t; \beta, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{n\beta\mu} \left(Z_\beta g_{pq}^\beta(t) \right) \Big|_{\beta \rightarrow n\beta} \quad (\text{A.20})$$

et à température nulle $f(\hat{h}_0)$ est une fonction de Heaviside dont on utilise la représentation intégrale

$$\mathcal{G}_{PQ}(t; \infty, \mu) = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0^+ \\ \epsilon' \rightarrow 0^+}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{i\mu\tau}}{i\tau + \eta} \left(Z_\beta g_{pq}^\beta(t) \right) \Big|_{\beta \rightarrow i\tau + \epsilon'} \quad (\text{A.21})$$

où ϵ' est un régulateur qui assure la convergence de la trace.

A.2 Conductivités locales

On considère un électron soumis à un champ électrique extérieur $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$. On choisit une jauge de telle sorte que $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}, t)$. Le hamiltonien du système en présence de la perturbation est donc en toute généralité

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{r}}) - e\vec{A}_{\text{ext}}(\hat{\vec{r}}, t) \right)^2 + V(\hat{\vec{r}}). \quad (\text{A.22})$$

On utilisera l'opérateur vitesse $\hat{\vec{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_e} (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{r}}))$. La conductivité est le tenseur qui relie le champ électrique à la densité de courant. Pour utiliser la théorie de la réponse linéaire, nous identifions l'hamiltonien de perturbation à

$$\hat{V}_{\text{pert}}(t) = -\frac{e}{2} \left(\hat{\vec{v}} \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\hat{\vec{r}}, t) + \vec{A}_{\text{ext}}(\hat{\vec{r}}, t) \cdot \hat{\vec{v}} \right). \quad (\text{A.23})$$

On introduit les opérateurs de densité d'électron au point \vec{r}

$$\hat{n}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \quad (\text{A.24})$$

et de densité de courant électrique

$$\hat{\vec{j}}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e}{2} \left(\hat{\vec{v}} \hat{n}(\vec{r}) + \hat{n}(\vec{r}) \hat{\vec{v}} \right) \quad (\text{A.25})$$

à l'aide desquels la perturbation peut s'écrire

$$\hat{V}_{\text{pert}}(t) = - \int d\vec{r} \hat{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}, t). \quad (\text{A.26})$$

$\hat{j}(\vec{r})$ est l'opérateur de densité de courant en l'absence de la perturbation extérieure. En présence de \vec{A}_{ext} , la densité de courant est donnée par :

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) = \hat{j}(\vec{r}) - \frac{e^2}{m_e} \hat{n}(\vec{r}) \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}, t). \quad (\text{A.27})$$

On cherche à calculer la valeur moyenne de cet opérateur au premier ordre dans la perturbation. La moyenne de la première partie est donnée par (A.6) et (A.7) :

$$\langle \hat{j}_i(\vec{r}) \rangle(t) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \langle [\hat{j}_i(\vec{r}, t), \hat{j}_j(\vec{r}', t')] \rangle A_j^{\text{ext}}(\vec{r}', t') \quad (\text{A.28})$$

tandis que la deuxième partie est d'ordre 1 dans la perturbation si la densité d'électron est moyennée à l'équilibre. Finalement, la densité de courant totale est, au premier ordre dans la perturbation

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_i(\vec{r}) \rangle(t) = -\frac{e^2}{m_e} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle A_i^{\text{ext}}(\vec{r}, t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \langle [\hat{j}_i(\vec{r}, t), \hat{j}_j(\vec{r}', t')] \rangle A_j^{\text{ext}}(\vec{r}', t'). \quad (\text{A.29})$$

Si le champ appliqué est périodique $\mathcal{E}_j(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_j(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ on pourra écrire que

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_i(\vec{r}) \rangle(t) = e^{-i\omega t} \int d\vec{r}' \sigma_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \mathcal{E}_j(\vec{r}') \quad (\text{A.30})$$

où le tenseur de conductivité est donné par

$$\sigma_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \frac{ie^2}{m_e \omega} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{i,j} + \frac{1}{\hbar \omega} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle [\hat{j}_i(\vec{r}, t), \hat{j}_j(\vec{r}', 0)] \rangle, \quad (\text{A.31})$$

il est entendu que comme dans (A.9) on ajoute une petite partie imaginaire à la fréquence $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$ ($\epsilon \rightarrow 0^+$) pour faire converger l'intégrale.

A.3 Conductivités globales

Si le système est soumis à un champ électrique uniforme, la densité de courant, moyennée sur le volume V de l'échantillon, s'exprime comme

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_i \rangle(t) = \sigma_{ij}(\omega) \mathcal{E}_j e^{-i\omega t} \quad (\text{A.32})$$

où la conductivité moyenne est donc

$$\sigma_{ij}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \int d\vec{r} d\vec{r}' \sigma_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \frac{ie^2}{V m_e \omega} \delta_{i,j} + \frac{e^2}{V \hbar \omega} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} dt e^{(i\omega - \epsilon)t} \langle [\hat{v}_i(t), \hat{v}_j] \rangle. \quad (\text{A.33})$$

Une autre alternative pour dériver la fonction de réponse à un champ électrique uniforme est de se placer dans une jauge de telle sorte que la perturbation s'écrive

$$\hat{V}_{\text{pert}}(t) = -e\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t). \quad (\text{A.34})$$

L'opérateur de densité de courant moyenne est $\hat{j} = \frac{1}{V} \int d\vec{r} \hat{j}(\vec{r}) = \frac{e}{V} \hat{v}$. On utilise (A.6) et (A.7) :

$$\langle \hat{j}_i \rangle(t) = \int dt' \sigma_{ij}(t-t') \mathcal{E}_j(t') \quad (\text{A.35})$$

où

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{ie^2}{V\hbar} Y(t) \langle [\hat{v}_i(t), \hat{r}_j] \rangle. \quad (\text{A.36})$$

C'est-à-dire que la réponse fréquentielle est donnée par

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{ie^2}{V\hbar} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty dt e^{i(\omega - \epsilon)t} \langle [\hat{v}_i(t), \hat{r}_j] \rangle. \quad (\text{A.37})$$

On peut aisément vérifier qu'une intégration par parties dans (A.37) donne (A.33).

Annexe B

Régularisation harmonique

L'étude de certaines quantités, telles que la fonction de partition, le courant permanent ou l'aimantation, a nécessité l'introduction d'un régulateur harmonique afin de contrôler les divergences infrarouges.

Nous donnons le spectre de l'hamiltonien avec champ magnétique, vortex et régulateur harmonique :

$$H = \frac{1}{2} \left(\vec{p} - \omega_c \vec{k} \times \vec{r} - \alpha \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_o^2 r^2 + \pi \alpha \delta^2(\vec{r}) + \omega_c . \quad (\text{B.1})$$

Les états propres de cet hamiltonien sont classés par un nombre quantique n et par leur moment orbital m

$$E_{n,m}^{\omega_o} = \omega_t (2n + |m - \alpha| + 1) - \omega_c (m - \alpha) + \omega_c \quad (\text{B.2})$$

où $\omega_t^2 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_c^2 + \omega_o^2$. Les fonctions d'onde sont données par

$$\phi_{n,m}^{\omega_o}(r, \theta) = \sqrt{\frac{\omega_t^{|m-\alpha|+1} n!}{\pi \Gamma(n + |m - \alpha| + 1)}} r^{|m-\alpha|} L_n^{|m-\alpha|}(\omega_t r^2) e^{-\frac{1}{2}\omega_t r^2} e^{im\theta}. \quad (\text{B.3})$$

Le propagateur est donné par l'expression suivante

$$G_{\beta}^{\omega_o}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\omega_t e^{-\beta\omega_c}}{2\pi \text{sh } \beta\omega_t} e^{-\frac{\omega_t}{2} \coth \beta\omega_t (r^2 + r'^2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{|m-\alpha|} \left(\frac{\omega_t r r'}{\text{sh } \beta\omega_t} \right) e^{\beta\omega_c (m-\alpha)} e^{im(\theta-\theta')}. \quad (\text{B.4})$$

En l'absence du vortex, la série se resomme¹ :

$$G_{\beta}^{\omega_o}(z, z') \Big|_{\alpha=0} = \frac{\omega_t e^{-\beta\omega_c}}{2\pi \text{sh } \beta\omega_t} \exp -\frac{\omega_t}{2 \text{sh } \beta\omega_t} \left(\text{ch } \beta\omega_t (|z|^2 + |z'|^2) - z \bar{z}' e^{\beta\omega_c} - z' \bar{z} e^{-\beta\omega_c} \right). \quad (\text{B.5})$$

On calcule la fonction de partition soit par intégration du propagateur, soit à l'aide du spectre :

$$Z_{\beta}^{\omega_o}(B, \alpha) = \frac{e^{-\beta\omega_c}}{2 \text{sh } \beta\omega_t} \left\{ \frac{e^{-\alpha\beta(\omega_t + \omega_c)}}{1 - e^{-\beta(\omega_t + \omega_c)}} + \frac{e^{-(1-\alpha)\beta(\omega_t - \omega_c)}}{1 - e^{-\beta(\omega_t - \omega_c)}} \right\}. \quad (\text{B.6})$$

En l'absence de vortex on aboutit à :

$$Z_{\beta}^{\omega_o}(B, 0) = \frac{e^{-\beta\omega_c}}{2(\text{ch } \beta\omega_t - \text{ch } \beta\omega_c)}. \quad (\text{B.7})$$

¹La fonction génératrice des fonctions de Bessel modifiée est (cf. (Gradshteyn & Ryzhik 1994, §8.511)) : $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} t^m I_m(z) = \exp \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) z$.

La fonction de partition du problème en champ magnétique avec vortex (sans régulateur harmonique) est obtenue en prenant la limite $\omega_o \rightarrow 0$. L'expression précédente possède un terme divergeant comme ω_o^{-2} qui correspond à un terme volumique ($\propto V$) et des corrections finies. Le premier correspond à la fonction de partition du problème de Landau et le deuxième aux corrections apportées par le vortex. Pour isoler ces dernières il est commode de considérer la différence $\Delta Z_\beta^{\omega_o}(B, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} Z_\beta^{\omega_o}(B, \alpha) - Z_\beta^{\omega_o}(B, 0)$ qui reste finie lorsqu'on fait disparaître le régulateur :

$$\Delta Z_\beta(B, \alpha) = \frac{e^{-\beta\omega_c}}{2 \operatorname{sh} \beta\omega_c} \left(\alpha - e^{(1-\alpha)\beta\omega_c} \frac{\operatorname{sh} \alpha\beta\omega_c}{\operatorname{sh} \beta\omega_c} \right). \quad (\text{B.8})$$

Remarquons que le calcul de $\Delta Z_\beta(B, \alpha)$ fournit une deuxième illustration des dangers de sommer des contributions des états individuels de Landau, même si celles-ci sont en nombre fini (voir la section 3.5). L'introduction d'un vortex dans le problème de Landau (sans régulateur harmonique) décale les états de moments orbital $m \leq 0$ uniquement. On pourrait donc écrire naïvement que la variation de la fonction de partition est donnée par : $\Delta Z_{\text{naïf}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^0 (e^{-\beta E_{nm}(\alpha)} - e^{-\beta E_{nm}(0)})$. Bien que les sommes soient convergentes, cette expression conduit à un résultat incomplet, d'où la nécessité d'introduire un régulateur harmonique.

Article 4

Hall conductivity for two-dimensional magnetic systems

Jean Desbois, Stéphane Ouvry & Christophe Texier,

Nucl. Phys. B **500** [FS], 486-510 (1997).

Article 5

Hall conductivity in the presence of repulsive magnetic impurities

Jean Desbois, Stéphane Ouvry & Christophe Texier,

Eur. Phys. J. B **7**, 527-528 (1999).

Article 6

Persistent currents and magnetization in two-dimensional magnetic systems

Jean Desbois, Stéphane Ouvry & Christophe Texier,
Nucl. Phys. B **528** [FS], 727-745 (1998).

Bilan, perspectives

Nous avons présenté un formalisme de réponse linéaire qui a permis de calculer la conductivité Hall pour différents systèmes magnétiques bidimensionnels. Nous avons tout d'abord calculé la conductivité transverse dynamique pour un seul vortex, un effet explicite de la brisure de parité due au vortex. Rappelons que la conductivité transverse est sous dominante en volume mais divergente à petite fréquence : $\text{Re } \sigma_{yx}^\beta \sim \frac{1}{V^2} \frac{1}{\omega^2}$. Nous avons souligné que ce comportement est justifié par sa relation avec le problème de Landau pour le champ moyen dû au vortex : $\langle eB \rangle = \frac{2\pi\alpha}{V}$. Remarquons que les orbites cyclotron correspondant aux états de Landau pour ce champ magnétique ont des rayons $a_{\langle B \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle eB \rangle}} \sim \sqrt{V}$ de l'ordre de la taille du système. Si le vortex dévie les trajectoires de l'électron, comme le suggère l'existence d'un courant permanent ou d'une aimantation, il n'a toutefois pas un effet suffisant pour fermer les trajectoires, ce qui peut expliquer la divergence de la conductivité à petite fréquence (associée à un comportement en temps $\sigma_{yx}(t) \propto t$).

L'étude perturbative du modèle d'impuretés magnétiques a montré que le désordre entraîne une déviation de la conductivité Hall par rapport au résultat classique du champ magnétique moyen. Certes, on ne peut ainsi obtenir une quantification de la conductivité Hall, qui est un effet non perturbatif. Un argument plus global permettrait peut être de mettre en évidence la quantification de la conductivité Hall pour ce modèle. Notre résultat montre une augmentation de la conductivité Hall par rapport au résultat classique ce qui peut s'expliquer, ainsi que le suggèrent des résultats expérimentaux (Gerhardtts *et al.* 1987), (Haug *et al.* 1987), par le fait que les impuretés magnétiques sont répulsives. La formulation brownienne utilisée pour l'étude des propriétés spectrales (Desbois *et al.* 1995) s'est révélée être efficace pour étudier les propriétés spectrales du modèle. Une formulation des propriétés de transport en ces termes permettrait peut-être d'apporter des progrès dans la compréhension du problème.

Enfin, nous avons clarifié la notion de courant permanent pour les systèmes magnétiques bidimensionnels. Lors de l'introduction du vortex fictif utilisé pour calculer le courant permanent, nous avons souligné le rôle important de l'interaction de contact, due au couplage du spin de l'électron avec le champ magnétique singulier du vortex. Contrairement au cas d'une géométrie annulaire, le courant permanent n'est pas simplement relié à l'aimantation et donne donc une information supplémentaire sur la distribution des courants dans le système.

L'étude des propriétés statistiques du temps de Wigner a été réalisée pour différents modèles et en utilisant différentes techniques. Une première méthode, adaptée au cas d'un potentiel distribué par une loi gaussienne, repose sur l'analyse des équations différentielles obtenues pour des variables reliées au déphasage et au temps de Wigner (τ). À haute énergie (faible désordre), τ admet une distribution stationnaire (dans la limite où la taille L de la région désordonnée

est infinie). Cette distribution limite est une loi large possédant une queue algébrique, tous ses moments sont infinis. À L finie les moments croissent exponentiellement avec L . Nous avons étendu ces résultats au cas d'un modèle de mécanique quantique supersymétrique désordonné présentant des propriétés spectrales et de localisation différentes du modèle gaussien. τ possède les mêmes propriétés statistiques que pour le modèle gaussien.

En partant d'une relation obtenue par Smith (1960) nous avons montré que τ admet une représentation en termes de fonctionnelle exponentielle du mouvement brownien apparaissant naturellement pour des systèmes désordonnés unidimensionnels; cela nous a permis d'expliquer le caractère universel de la distribution dans le régime de haute énergie (faible désordre), qui est une conséquence de l'universalité des propriétés statistiques de l'exposant de Lyapunov. Il faut insister sur le fait que les propriétés statistiques de τ sont en étroite relation avec celles de l'exposant de Lyapunov. L'analyse de la distribution limite de τ (2.68) donne non seulement la valeur moyenne de l'exposant de Lyapunov à travers la valeur typique de τ , mais en plus une information sur les fluctuations de l'exposant de Lyapunov. En effet, comme nous l'avons mentionné au chapitre 5, l'exposant de la queue algébrique de la distribution de τ est une conséquence directe de la relation entre les deux premiers cumulants de la variable ξ : $\langle \xi(L) \rangle = \langle \langle \xi(L)^2 \rangle \rangle$ (rappelons que $\gamma = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \xi(L) \rangle}{L}$).

Le rôle des résonances dans les processus de transmission à travers un système désordonné unidimensionnel avait été discuté par Azbel (1983) mais aussi par Frisch *et al.* (1973) pour la transmission d'ondes électromagnétiques. Nous avons exploité cette idée et montré que le comportement dominant des moments de τ peut être obtenu de façon heuristique. Nous avons ainsi pu comprendre l'origine physique de la distribution large.

Nous avons également étudié un régime physique différent du régime localisé dont nous avons discuté jusqu'à présent. Rappelons que dans ce dernier cas la taille de la région désordonnée est grande devant la longueur de localisation $L \gg \lambda$. C'est également un régime pour lequel les résonances ne se recouvrent pas : $\Gamma \ll \Delta$ (Γ est la largeur d'une résonance et Δ l'écart moyen entre les résonances). Dans ce cas τ possède de très larges fluctuations. Les contributions dominantes sont associées aux résonances : $\tau \sim \frac{1}{\Gamma} \gg \frac{1}{\Delta}$. À l'inverse, dans le régime balistique, pour lequel $L \ll \lambda$, un régime de fort recouvrement des résonances $\Gamma \gg \Delta$, τ est distribué par une loi gaussienne et possède de faibles fluctuations : $\tau \simeq \langle \tau \rangle = \frac{2\pi}{\Delta} \gg \frac{1}{\Gamma}$.

Un troisième modèle, celui des impuretés δ , nous a permis de réaliser une étude numérique de ces questions. Ces résultats numériques sont en très bon accord avec les arguments analytiques pour les différents régimes (localisé et balistique). Dans le cadre de ce modèle nous avons pu explorer le régime de basse énergie pour lequel on observe une disparition de la queue algébrique caractéristique de la distribution universelle obtenue pour le régime localisé, remplacée par une queue exponentielle. Une interprétation possible de ce résultat est que la probabilité pour qu'un état soit capable de piéger la particule devient trop faible car la densité d'états dans la région désordonnée est elle-même très petite.

En dernier lieu nous nous sommes intéressés à l'effet d'une transition de délocalisation sur les propriétés statistiques de τ . Nous avons montré que la distribution est alors similaire à celle obtenue dans le régime balistique, ce qui est physiquement satisfaisant puisque dans les deux situations la particule est diffusée à travers toute la région désordonnée. Nous avons également souligné que τ reste sensible au désordre, alors que le spectre y est insensible lors de la transition.

Ceci est également vrai si on introduit une impureté parmi les dimères : alors que cet effet est sous dominant en volume pour la densité d'états intégrée et l'exposant de Lyapunov, il a une conséquence importante sur la distribution de τ .

Dans cette étude nous nous sommes intéressés aux propriétés statistiques de τ pour une énergie fixée. En particulier, la représentation en terme de fonctionnelle exponentielle du mouvement brownien fournit toutes les propriétés statistiques à E fixée : distribution, moments, mais ne donne aucune information sur les corrélations de τ pour différentes énergies. À ce titre un objet qu'il serait intéressant de considérer serait la fonction de corrélation $\langle\langle\tau(E)\tau(E')\rangle\rangle$. Une telle étude se révèle plus compliquée, en partie parce qu'il est alors plus délicat de moyenner sur les déphasages qui sont eux mêmes corrélés pour différentes énergies.

Il serait également intéressant d'étendre cette étude à des géométries plus générales. Une première question naturelle serait de considérer la situation à deux canaux de diffusion, cependant l'argument heuristique que nous avons développé pour obtenir les moments laisse penser qu'il n'y aurait pas une grande différence avec la situation déjà étudiée. Un cas plus intéressant serait celui d'une géométrie annulaire. En particulier, l'introduction d'un flux qui brise la symétrie par renversement du temps pourrait avoir des conséquences intéressantes sur la distribution du temps de Wigner, comme c'est le cas dans le cadre de la théorie des matrices aléatoires. Explorer d'autres dimensionnalités (arbre, système bidimensionnel) pourrait également être un champ d'étude attractif parce que plus riche mais aussi beaucoup plus ardu, à cause de l'abandon des méthodes spécifiques aux systèmes unidimensionnels utilisées dans ce travail.

Références bibliographiques

- ABRAHAMAS, E., ANDERSON, P. W., LICCIARDELLO, D. C. & RAMAKRISHNAN, T. V., (1979). Scaling theory of localization: absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **42**(10), 673.
- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. (eds.), (1964). *Handbook of Mathematical functions*. Dover, New York.
- AHARONOV, Y. & BOHM, D., (1959). Significance of electromagnetic potentials in the quantum mechanics. *Phys. Rev.* **115**(3), 485–491.
- AHARONOV, Y. & CASHER, A., (1979). Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field. *Phys. Rev. A* **19**(6), 2461–2462.
- AKKERMANS, E., AUERBACH, A., AVRON, J. E. & SHAPIRO, B., (1991). Relation between persistent currents and the scattering matrix. *Phys. Rev. Lett.* **66**(1), 76–79.
- ALBEVERIO, S., GESZTESY, S. A., HOEGH-KROHN, R. & HOLDEN, H., (1988). *Solvable models in quantum mechanics*. Springer, New York.
- ALTSHULER, B. L. & PRIGODIN, V. N., (1988). Dynamical properties of a finite one-dimensional conductor. *JETP Lett.* **47**(1), 43.
- ANDERSON, P. W., (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* **109**, 1492.
- ANDO, T., MATSUMOTO, Y. & UEMURA, Y., (1975). Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system. *Journal of the Physical Society of Japan* **39**(2), 279.
- ANTOINE, M., (1991). *Champ magnétique sur des variétés - applications au chaos quantique et au mouvement brownien*. Ph.D. thesis, Université Paris 6.
- ANTOINE, M., COMTET, A. & OUVRY, S., (1990). Scattering on a hyperbolic torus in a constant magnetic field. *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 3699.
- ANTSYGINA, T. N., PASTUR, L. A. & SLYUSAREV, V. A., (1981). Localization of states and kinetic properties of one-dimensional disordered systems. *Sov. J. Low Temp. Phys.* **7**(1), 1–21.
- AOKI, H., (1987). Quantised Hall effect. *Rep. Prog. Phys.* **50**, 655.
- AOKI, H. & ANDO, T., (1981). *Solid State Commun.* **38**, 1079.
- ASHCROFT, N. W. & MERMIN, N. D., (1976). *Solid State Physics*. Saunders College.
- AVISHAI, Y. & BAND, Y. B., (1985). One-dimensional density of states and the phase of the transmission amplitude. *Phys. Rev. B* **32**(4), 2674.

- AVRON, J. E., KLEIN, M., PNUELLI, A. & SADUN, L., (1992). Hall conductance and adiabatic charge transport of leaky tori. *Phys. Rev. Lett.* **69**(1), 128.
- AVRON, J. E. & SEILER, R., (1985). Quantization of the Hall conductance for general, multi-particle Schrödinger Hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.* **54**(4), 259.
- AZBEL, M. YA., (1983). Resonance tunneling and localization spectroscopy. *Solid State Commun.* **45**(7), 527.
- BALAZS, N. & VOROS, A., (1986). Chaos on the pseudosphere. *Phys. Rep.* **143**, 109.
- BALENTS, L. & FISHER, M. P. A., (1997). Delocalization transition via supersymmetry in one dimension. *Phys. Rev. B* **56**(20), 12970.
- BARNES, C. & LUCK, J.-M., (1990). The distribution of the reflection phase of disordered conductors. *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 1717.
- BASTIN, A., LEWINER, C., BETBEDER-MATIBET, O. & NOZIÈRES, P., (1971). Quantum oscillations of the Hall effect of a fermion gas with random impurity scattering. *J. Phys. Chem. Solids* **32**, 1811.
- BENDERSKIĬ, M. M. & PASTUR, L. A., (1970). Calculation of the average number of states in a model problem. *Sov. Phys. JETP* **30**(1), 158.
- BENDING, S. J., VON KLITZING, K. & PLOOG, K., (1990). Weak localization in a distribution of magnetic flux tubes. *Phys. Rev. Lett.* **65**(8), 1060.
- BEREZINSKIĬ, V. L., (1974). Kinetics of a quantum particle in a one-dimensional random potential. *Sov. Phys. JETP* **38**(3), 620.
- BEREZINSKIĬ, V. L. & GOR'KOV, L. P., (1979). On the theory of electrons localized in the field of defect. *Sov. Phys. JETP* **50**(6), 1209.
- BERGMAN, O., (1992). Nonrelativistic field-theoretic scale anomaly. *Phys. Rev. D* **46**(12), 5474.
- BERGMAN, O. & LOZANO, G., (1994). Aharonov-Bohm scattering, contact interactions and scale invariance. *Ann. Phys. (N.Y.)* **229**, 416.
- BLOCH, F., (1965). Off-diagonal long-range order and persistent currents in a hollow cylinder. *Phys. Rev.* **157**(3A), A787.
- BOLLÉ, D. & OSBORN, T. A., (1976). Concepts of multiparticle time delay. *Phys. Rev. D* **13**(2), 299.
- BORDAG, M. & VOROPAEV, S., (1993). Charged particle with magnetic moment in the Aharonov-Bohm potential. *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 7637.
- BOUCHAUD, J.-P., COMTET, A., GEORGES, A. & LE DOUSSAL, P., (1987). The relaxation-time spectrum of diffusion in a one-dimensional random medium: an exactly solvable case. *Europhys. Lett.* **3**, 653.
- BOUCHAUD, J.-P., COMTET, A., GEORGES, A. & LE DOUSSAL, P., (1990). Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field. *Ann. Phys. (N.Y.)* **201**, 285–341.
- BOUCHAUD, J.-P. & GEORGES, A., (1990). Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications. *Phys. Rep.* **195**, 267.
- BOVIER, A., (1992). Perturbation theory for the random dimer model. *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 1021.

- BRÉZIN, É., GROSS, D. J. & ITZYKSON, C., (1984). Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities. *Nucl. Phys. B [FS]* **235**, 24–44.
- BROUWER, P. W., FRAHM, K. M. & BEENAKKER, C. W., (1997). Quantum mechanical time-delay matrix in chaotic scattering. *Phys. Rev. Lett.* **78**(25), 4737.
- BROUWER, P. W., FRAHM, K. M. & BEENAKKER, C. W., (1999). Distribution of the quantum mechanical time-delay matrix for a chaotic cavity. *Waves in Random Media* **9**, 91.
- BÜTTIKER, M., (1983). Larmor precession and the traversal time for tunneling. *Phys. Rev. B* **27**(10), 6178–6188.
- BÜTTIKER, M., (1988). Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors. *Phys. Rev. B* **38**(14), 9375.
- BÜTTIKER, M., (1990). Traversal, reflection and dwell time for quantum tunneling. In J. M. Chamberlain et al. (ed.), *Electronic properties of multilayers and low-dimensional semiconductor structures*, p. 297. Plenum Press, New York.
- BÜTTIKER, M., IMRY, Y. & LANDAUER, R., (1983). Josephson behavior in small normal one-dimensional rings. *Phys. Lett. A* **96**, 365.
- BÜTTIKER, M. & LANDAUER, R., (1982). Traversal time for tunneling. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1739.
- BYCHKOV, YU. A. & DYKHNE, A. M., (1966a). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **51**, 1923.
- BYCHKOV, YU. A. & DYKHNE, A. M., (1966b). Electron spectrum in a one-dimensional system with randomly arranged scattering centers. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **3**(8), 313.
- CHEUNG, H.-F., GEFEN, Y., RIEDEL, E. K. & SHIH, W.-H., (1988). Persistent current in small one-dimensional metal ring. *Phys. Rev. B* **37**(11), 6050.
- COMTET, A., (1987). On the Landau levels on the hyperbolic plane. *Ann. Phys. (N.Y.)* **173**, 185.
- COMTET, A., DESBOIS, J. & MONTHUS, C., (1995a). Localization properties in one-dimensional disordered supersymmetric quantum mechanics. *Ann. Phys. (N.Y.)* **239**, 312–350.
- COMTET, A., DESBOIS, J. & OUVRY, S., (1990). Winding of planar Brownian curves. *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 3563.
- COMTET, A., GEORGELIN, Y. & OUVRY, S., (1989). Statistical aspects of the anyon model. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 3917.
- COMTET, A., MASHKEVICH, S. & OUVRY, S., (1995b). Magnetic moment and perturbation theory with singular magnetic fields. *Phys. Rev. D* **52**(4), 2594–2597.
- COMTET, A. & MONTHUS, C., (1996). Diffusion in one-dimensional random medium and hyperbolic Brownian motion. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 1331.
- COMTET, A., MONTHUS, C. & YOR, M., (1998). Exponential functionals of Brownian motion and disordered systems. *J. Appl. Probab.* **35**, 255.
- COMTET, A., MOROZ, A. & OUVRY, S., (1995c). Persistent current of free electrons in the plane. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 828. Comment on “Relation between persistent currents and the scattering matrix”, Akkermans et al., *Phys. Rev. Lett.* **66**, 76 (1991).

- COOPER, F., KHARE, A. & SUKHATME, U., (1995). Supersymmetry and quantum mechanics. *Phys. Rep.* **251**, 267–385.
- CORINALDESI, E. & RAFELI, F., (1978). Aharonov-Bohm scattering by a thin impenetrable solenoid. *Am. J. Phys.* **46**, 1185.
- DASHEN, R., MA, S.-K. & BERNSTEIN, H. J., (1969). S -matrix formulation of statistical mechanics. *Phys. Rev.* **187**(1), 345.
- DASNIÈRES DE VEIGY, A., (1994). *Mécanique statistique d'un gaz d'anyons*. Ph.D. thesis, Université Paris 6.
- DASNIÈRES DE VEIGY, A. & OUVRY, S., (1994). De la diffusion Aharonov-Bohm. *C. R. Acad. Sci.* **318**, 19.
- DE CALAN, C., LUCK, J.-M., NIEUWENHUIZEN, T. M. & PÉTRITIS, D., (1985). On the distribution of a random variable occurring in 1D disordered systems. *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 501.
- DE SOUSA GERBERT, P., (1989). Fermions in an Aharonov-Bohm field and cosmic strings. *Phys. Rev. D* **40**(5), 1346.
- DERRIDA, B. & GARDNER, E. J., (1984). Lyapounov exponent of the one dimensional Anderson model: weak disorder expansions. *J. Physique* **45**, 1283.
- DESBOIS, J., FURTLERHNER, C. & OUVRY, S., (1995). Random magnetic impurities and the Landau problem. *Nucl. Phys. B [FS]* **453**, 759–776.
- DESBOIS, J., FURTLERHNER, C. & OUVRY, S., (1996). Random magnetic impurities and the δ impurity problem. *J. Phys. I (France)* **6**, 641–648.
- DIEZ, E., SÁNCHEZ, A. & DOMÍNGUEZ-ADAME, F., (1995). Intentionally disordered superlattices with high-DC conductance. *IEEE Journal of quantum electronics* **31**(11), 1919.
- DORLAS, T. C., MACRIS, N. & PULÉ, J. V., (1995). Localisation in a single-band approximation to random Schrödinger operators in a magnetic field. *Helv. Phys. Acta* **68**, 339.
- DOUÇOT, B. & RAMMAL, R., (1987). Invariant embedding approach to localization. II. Non-linear random media. *J. Physique* **48**, 527–546.
- DUNLAP, D. H., WU, H.-L. & PHILLIPS, P., (1990). Absence of localization in a Random-Dimer Model. *Phys. Rev. Lett.* **65**(1), 88.
- DYSON, F. J., (1953). The dynamics of a disordered linear chain. *Phys. Rev.* **92**, 1331.
- EISENBUD, L., (1948). Ph.D. thesis, Princeton.
- EMPARAN, R. & VALLE BASAGOITI, M. A., (1994). Parity violation in Aharonov-Bohm systems: the spontaneous Hall effect. *Phys. Rev. B* **49**(20), 14460.
- ERDÉLEYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. & TRICOMI, F. G. (eds.), (1954a). *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill. Harry Bateman project, 3 vol.
- ERDÉLEYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. & TRICOMI, F. G. (eds.), (1954b). *Tables of Integral Transforms*. McGraw-Hill. Harry Bateman project, 2 vol.
- FABRIZIO, M. & MÉLIN, R., (1997a). Coexistence of antiferromagnetism and dimerization in a disordered spin-Peierls model: exact results. *Phys. Rev. Lett.* **78**(17), 3382.

- FABRIZIO, M. & MÉLIN, R., (1997*b*). Enhanced magnetic fluctuations in doped spin-Peierls systems: a single-chain-model analysis. *Phys. Rev. B* **56**(10), 5996.
- FADDEEV, L. D. & PAVLOV, B. S., (1972). Scattering theory and automorphic functions. In *Seminar of Steklov Mathematical Institute of Leningrad*, vol. 27, p. 161.
- FARIS, W. G. & TSAY, W. J., (1994). Time delay in random scattering. *SIAM J. Appl. Math.* **54**, 443.
- FLORÈS, J., (1989). Transport in models with correlated diagonal and off-diagonal disorder. *J. Phys. Cond. Matter* **1**, 8471.
- FRIEDBERG, R. & LUTTINGER, J. M., (1975). Density of electronic energy levels in disordered systems. *Phys. Rev. B* **12**(10), 4460.
- FRIEDEL, J., (1958). Metallic alloys. *Nuovo Cimento Suppl.* **7**, 287.
- FRISCH, H. L. & LLOYD, S. P., (1960). Electron levels in a one-dimensional random lattice. *Phys. Rev.* **120**(4), 1175.
- FRISCH, U., FROESCHLE, C., SCHEIDECKER, J.-P. & SULEM, P.-L., (1973). Stochastic resonance in one-dimensional random media. *Phys. Rev. A* **8**(3), 1416.
- FURTLERNER, C., (1997). *Étude du spectre de Landau pour un champ magnétique aléatoire en dimension 2*. Ph.D. thesis, Université Paris 6.
- FYODOROV, Y. V. & MIRLIN, A. D., (1994). Statistical properties of eigenfunctions of random quasi 1D one-particle hamiltonians. *Int. J. of Mod. Phys. B* **8**(27), 3795–3842.
- FYODOROV, Y. V. & SOMMERS, H.-J., (1996). Parametric correlations of scattering phase shifts and fluctuations of delay times in few-channel chaotic scattering. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4709.
- FYODOROV, Y. V. & SOMMERS, H.-J., (1997). Statistics of resonance poles, phase shift and time delays in quantum chaotic scattering: Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. *J. Math. Phys.* **38**(4), 1918.
- GARDINER, C. W., (1989). *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*. Springer.
- GEIM, A. K., BENDING, S. J. & GRIGORIEVA, I. V., (1992). Asymmetric scattering and diffraction of two-dimensional electrons at a quantized tubes of magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.* **69**(15), 2252.
- GEIM, A. K., BENDING, S. J. & GRIGORIEVA, I. V., (1994). Ballistic two-dimensional electrons in a random magnetic field. *Phys. Rev. B* **49**(8), 5749.
- GENACK, A. Z., SEBBAH, P., STOYTCHIEV, M. & VAN TIGGELEN, B. A., (1999). Statistics of wave dynamics in random media. *Phys. Rev. Lett.* **82**(4), 715.
- GEORGEOT, B., (1993). *Chaos, courbure négative et arithmétique : aspects classiques, quantiques et semi-classiques*. Ph.D. thesis, Université Paris 11.
- GERHARDTS, R. R., HAUG, R. J. & PLOOG, K., (1987). Asymmetric Shubnikov-de Haas oscillations and Hall plateaus of heterojunctions in the quantum Hall regime. *J. Physique* **48**(11), C5–227. Colloque C5.

- GOGOLIN, A. A., MELNIKOV, V. I. & RASHBA, E. I., (1976). Conductivity in a disordered one-dimensional system induced by electron-phonon interaction. *Sov. Phys. JETP* **42**(1), 168.
- GOLDSHEIDT, I. Y., MOLCHANOV, S. A. & PASTUR, L. A., (1977). A pure point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger operator. *Funct. Anal. and App.* **11**, 1.
- GOPAR, V. A., MELLO, P. A. & BÜTTIKER, M., (1996). Mesoscopic capacitors: a statistical analysis. *Phys. Rev. Lett.* **77**(14), 3005.
- GRADSHTEYN, I. S. & RYZHIK, I. M., (1994). *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 5th edn.
- GUTZWILLER, M. C., (1983). *Physica D* **7**, 341.
- HAGEN, C. R., (1990a). Aharonov-Bohm scattering amplitude. *Phys. Rev. D* **41**(6), 2015.
- HAGEN, C. R., (1990b). Aharonov-Bohm scattering of particles with spin. *Phys. Rev. Lett.* **64**(5), 503.
- HAGEN, C. R., (1991). Spin dependence of the Aharonov-Bohm effect. *Int. J. of Mod. Phys. A* **16**(18), 3119.
- HALPERIN, B. I., (1965). Green's functions for a particle in a one-dimensional random potential. *Phys. Rev.* **139**, A104.
- HALPERIN, B. I., (1967). *Adv. Chem. Phys.* **13**, 123.
- HALPERIN, B. I., (1982). Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Phys. Rev. B* **25**(4), 2185.
- HANSEL, D. & LUCIANI, J. F., (1989). On diffusion equations for dynamical systems driven by noise. *J. Stat. Phys.* **54**, 971–995.
- HAUG, R. J., GERHARDTS, R. R., VON KLITZING, K. & PLOOG, K., (1987). Effect of repulsive and attractive scattering centers on the magnetotransport properties of a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.* **59**(12), 1349.
- HAUGE, E. H. & STØVNENG, J. A., (1989). Tunneling times: a critical review. *Rev. Mod. Phys.* **61**(4), 917.
- HEINRICHS, J., (1986). Invariant embedding approach to resistance fluctuations in disordered one-dimensional conductors. *Phys. Rev. B* **33**(8), 5261.
- HEINRICHS, J., (1988). Phase-shift randomness in one-dimensional disordered conductors in the quasi-metallic domain. *J. Phys. C: Solid St. Phys.* **21**, L1153.
- HEINRICHS, J., (1989). Statistics of the transmission coefficient and its dependence on a constant electric field in disordered one-dimensional disordered conductors. *J. Phys. Cond. Matter* **1**, 2651.
- HEINRICHS, J., (1990). Invariant embedding treatment of phase randomization and electrical noise at disordered surfaces. *J. Phys. Cond. Matter* **2**, 1559.
- HURT, N. E., (1997). *Quantum chaos and mesoscopic systems*. Kluwer academic publishers, Londres.

- ITZYKSON, C. & DROUFFE, J.-M., (1989). *Théorie statistique des champs*. Interéditions–CNRS, Paris. Tomes 1 et 2.
- JACKIW, R., (1991). δ -function potentials in two- and three-dimensional quantum mechanics. In A. Ali & P. Hoodbhoy (eds.), *M. A. B. Bég memorial volume*, p. 1. World Scientific, Singapore.
- JACKIW, R. & PI, S. Y., (1990). Classical and quantal nonrelativistic Chern-Simons theory. *Phys. Rev. D* **42**, 3500.
- JANSSEN, M., VIEHWEGER, O., FASTENRATH, U. & HAJDU, J., (1994). *Introduction to the theory of the integer quantum Hall effect*. VCH, Weinheim.
- JAYANNAVAR, A. M., VIJAYAGOVINDAN, G. V. & KUMAR, N., (1989). Energy dispersive backscattering of electrons from surface resonances of a disordered medium and $1/f$ noise. *Z. Phys. B - Cond. Mat.* **75**, 77.
- JOSHI, S. K., GUPTA, A. K. & JAYANNAVAR, A. M., (1997). Wigner delay time from a random passive and active medium pp. preprintcond–mat/9712251.
- JOSHI, S. K. & JAYANNAVAR, A. M., (1997). distribution of Wigner delay time from single channel disordered pp. preprint cond–mat/9712249.
- JUNKER, G., (1996). *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*. Springer.
- KESTEN, H., (1973). *Acta Math.* **131**, 208.
- KHAETSKII, A. V., (1991). The Hall effect and magnetoresistance of a two-dimensional electron gas upon scattering on microhomogeneities of a magnetic field. *J. Phys. Cond. Matter* **3**, 5115.
- KLEIN, A. & PEREZ, J. F., (1985). On the density of states for random potentials in the presence of a uniform magnetic field. *Nucl. Phys. B [FS]* **251**, 199.
- KREIN, M. G., (1953). Trace formulas in perturbation theory. *Matem. Sbornik* **33**, 597.
- KUBO, R., TODA, M. & HASHITSUME, N., (1992). *Statistical physics II: non-equilibrium statistical mechanics*. Springer-Verlag.
- LANDAU, L. D., (1930). *Z. Phys.* **64**, 629.
- LANDAU, L. D. & LIFCHITZ, E., (1966a). *Mécanique quantique*. Mir. Tome III.
- LANDAU, L. D. & LIFCHITZ, E., (1966b). *Physique statistique*. Mir. Tome V.
- LANDAUER, R. & MARTIN, T., (1994). Barrier interaction time in tunneling. *Rev. Mod. Phys.* **66**(1), 217.
- LAUGHLIN, R. B., (1981). Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B* **23**, 5632.
- LAX, M. & PHILLIPS, J. C., (1958). One-Dimensional Impurity Bands. *Phys. Rev.* **110**(1), 41.
- LÉVY-LEBLOND, J.-M., (1967). Nonrelativistic particles and wave equations. *Commun. math. Phys.* **6**, 286–311.
- LIFSHITS, I. M., (1963). *Sov. Phys. JETP* **17**, 1159.
- LIFSHITS, I. M., (1965). Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. *Sov. Phys. Usp.* **18**(4), 549.

- LIFSHITS, I. M., GREDESKUL, S. A. & PASTUR, L. A., (1988). *Introduction to the theory of disordered systems*. John Wiley & Sons.
- LUCK, J.-M., (1992). *Systèmes désordonnés unidimensionnels*. Aléa Saclay.
- LUTTINGER, J. M. & TAO, R., (1983). Electronic density of levels in a disordered system. *Ann. Phys. (N.Y.)* **145**, 185.
- LUTTINGER, J. M. & WAXLER, R., (1987). Low energy density of states in several disordered systems. *Ann. Phys. (N.Y.)* **175**, 319.
- MA, S.-K., (1985). *Statistical mechanics*. World Scientific, Singapore.
- MACDONALD, A. H. & STŘEDA, P., (1984). Quantized Hall effect and edge currents. *Phys. Rev. B* **29**(4), 1616.
- MACRIS, N. & PULÉ, J. V., (1992). Density of states of random Schrödinger operators with a uniform magnetic field. *Lett. Math. Phys.* **24**, 307.
- MAGARILL, L. I. & ENTIN, M. V., (1966). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **51**, 1852.
- MANUEL, C. & TARRACH, R., (1993). Contact interactions and Dirac anyons. *Phys. Lett. B* **301**, 72.
- MANUEL, C. & TARRACH, R., (1994). Perturbative renormalization in quantum mechanics. *Phys. Lett. B* **328**, 113.
- MCCABE, J. & OUVRY, S., (1991). Perturbative three-body spectrum and the third virial coefficient in the anyon model. *Phys. Lett. B* **260**, 113.
- MONTGOMERY, H. L., (1973). Analytic number theory. In H. G. Diamond (ed.), *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 24.
- MONTHUS, C., (1995). *Étude de quelques fonctionnelles du mouvement brownien et de certaines propriétés de la diffusion unidimensionnelle en milieu aléatoire*. Ph.D. thesis, Université Paris 6. published as : *Ann. Phys. (France)* **20**, 341 (1995).
- MONTHUS, C. & COMTET, A., (1994). On the flux distribution in a one-dimensional disordered system. *J. Phys. I (France)* **4**, 635–653.
- MONTHUS, C., OSHANIN, G., COMTET, A. & BURLATSKY, S., (1996). Sample-size dependence of the ground-state energy in a one-dimensional localization problem. *Phys. Rev. E* **54**(1), 231.
- MOROZ, A., (1995). The Aharonov-Casher theorem and the axial anomaly in the Aharonov-Bohm potential. *Phys. Lett. B* **358**, 305.
- MOROZ, A., (1996). Single-particle density of states, bound states, phase-shift flip and a resonance in the presence of an Aharonov-Bohm potential. *Phys. Rev. A* **53**(2), 669.
- MORRISON, J. A., (1962). On the number of electron levels in a one-dimensional random lattice. *J. Math. Phys.* **3**(5), 1023.
- MOTT, N. F. & TWOSE, W. O., (1961). The theory of impurity conduction. *Adv. Phys.* **10**, 107.
- MUCCIOLO, E. R., JALABERT, R. A. & PICHARD, J.-L., (1997). Parametric statistics of the scattering matrix: from metallic to insulating quasi-unidimensional disordered systems. *J. Phys. I (France)* **7**, 1267.

- MUZYKANTSKIĀ, B. A. & KHMELNITSKIĀ, D. E., (1997). Long-time trapping of an electron in a one-dimensional disordered chain. *Phys. Rep.* **288**, 259.
- NEUBERGER, H., (1982). The decay of a false vacuum and the density of states in a random, repulsive potential. *Phys. Lett. B* **112**(4/5), 341.
- NIELSEN, M. & HEDEGÅRD, P., (1995). Two-dimensional electron transport in the presence of magnetic flux vortices. *Phys. Rev. B* **51**(12), 7679.
- NIEUWENHUIZEN, T. M. & LUCK, J.-M., (1987). Lifshitz singularities in the total and the wavenumber-dependent spectral density of random harmonic chains. *Physica A* **145**, 161.
- NIKIFOROV, A. & OUVAROV, V., (1983). *Fonctions spéciales de la physique mathématique*. Mir, Moscou.
- OLVER, F. W. J., (1974). *Asymptotics and special functions*. Academic Press.
- OSHANIN, G., BURLATSKY, S. F., MOREAU, M. & GAVEAU, B., (1993a). Behaviour of transport characteristics in several one-dimensional disordered systems. *Chem. Phys.* **177**, 803–819.
- OSHANIN, G., MOGUTOV, A. & MOREAU, M., (1993b). Steady flux in a continuous-space Sinai chain. *J. Stat. Phys.* **73**, 379.
- OUVRY, S., (1994). δ perturbative interactions in Aharonov-Bohm and anyons models. *Phys. Rev. D* **50**, 5296.
- OVCHINNIKOV, A. A. & ERIKMANN, N. S., (1977). Density of states in a one-dimensional random potential. *Sov. Phys. JETP* **46**, 340.
- PASTUR, L. A. & FEL'DMAN, É. P., (1974). Wave transmittance for a thick layer of a randomly inhomogeneous medium. *Sov. Phys. JETP* **40**(2), 241.
- PASTUR, L. A. & FIGOTIN, A. L., (1978). *Teor. Math. Fiz.* **35**, 193.
- PENDRY, J. B., (1994). Symmetry and transport of waves in one-dimensional disordered systems. *Adv. Phys.* **43**(4), 461.
- PENDRY, J. B., KIRKMAN, P. D. & CASTANO, E., (1986). Electrons at disordered surfaces and $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.* **57**(23), 2983.
- POTTIER, N., (1994). *Mécanique statistique hors équilibre : équation de Boltzmann, réponse linéaire*. cours du DEA de physique des solides.
- PRANGE, R. & GIRVIN, S. (eds.), (1990). *The quantum Hall effect*. Springer-Verlag, New York.
- PRUDNIKOV, A. P., BRYCHKOV, YU. A. & MARICHEV, O. I., (1986). *Integrals and Series*. Gordon & Breach Science Publishers. 3 vol.
- RAMMAL, R. & DOUÇOT, B., (1987). Invariant embedding approach to localization. I. General framework and basic equations. *J. Physique* **48**, 509–526.
- SÁNCHEZ, A. & DOMÍNGUEZ-ADAME, F., (1994). Enhanced suppression of localization in a continuous random-dimer model. *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 3725.
- SCHENZLE, A. & BRAND, H., (1979). Multiplicative stochastic processes in statistical physics. *Phys. Rev. A* **20**, 1628.
- SCHMIDT, H., (1957). Disordered one-dimensional crystals. *Phys. Rev.* **105**(2), 425.

- SEBBAH, P. & GENACK, A. Z., (1996). Speckle statistics of microwaves in random media. In B. A. van Tiggelen (ed.), *Interdisciplinary view on wave diffusion*, Cargèse 1996. Springer.
- SEBBAH, P., LEGRAND, O. & GENACK, A. Z., (1999). Fluctuations in photon local delay time and their relation to phase spectra in random media. *Phys. Rev. E* **59**(2), 2406.
- SEBBAH, P., LEGRAND, O., VAN TIGGELEN, B. A. & GENACK, A. Z., (1997). Statistic of the cumulative phase of microwave radiation in random media. *Phys. Rev. E* **56**(3), 3619.
- SHUSHIN, A. & WARDLAW, D. M., (1992). Properties of time delay and S -matrix for chaotic scattering on a leaky surface of constant negative curvature. *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 1503.
- SMITH, F. T., (1960). Lifetime matrix in collision theory. *Phys. Rev.* **118**, 349.
- SMITH, F. T., (1963). Quantum virial expansion. *Phys. Rev.* **131**, 2803.
- SORNETTE, D., (1987). $1/f$ -colouring of white noise by Anderson localization. *Europhys. Lett.* **4**(10), 1157.
- STEINER, M., CHEN, Y., FABRIZIO, M. & GOGOLIN, A. O., (1999). Statistical properties of localization-delocalization transition in one dimension. *Phys. Rev. B* **59**(23), 14848.
- STEINER, M., FABRIZIO, M. & GOGOLIN, A. O., (1998). Random mass Dirac fermions in doped spin-Peierls and spin-ladder systems: one-particle properties and boundary effects. *Phys. Rev. B* **57**(14), 8290.
- STILLWELL, J., (1992). *Geometry of Surfaces*. Springer-Verlag.
- STŘEDA, P., (1982). Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions. *J. Phys. C: Solid St. Phys.* **15**, L717.
- SULEM, P. L., (1973). Total reflection of a plane wave from a semi-infinite, one-dimensional random medium: distribution of the phase. *Physica* **70**, 190–208.
- THOULESS, D. J., (1972). A relation between the density of states and range of localization for one-dimensional random systems. *J. Phys. C: Solid St. Phys.* **5**, 77.
- THOULESS, D. J., KOHMOTO, M., NIGHTINGALE, M. P. & DEN NIJS, M., (1982). Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.* **49**(6), 405.
- TSANG, T. Y. & OSBORN, T. A., (1975). The spectral property of time delay. *Nucl. Phys. A* **247**, 43.
- TSUI, D. C. & GOSSARD, A. C., (1981). Resistance standard using quantization of the Hall resistance of GaAs-Al_xGa_{1-x} heterostructures. *Appl. Phys. Lett.* **38**(7), 550.
- TSUI, D. C., STÖRMER, H. L. & GOSSARD, A. C., (1982). Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.* **48**(22), 1559.
- TSUI, D. C., STÖRMER, H. L., HWANG, J. C. M., BROOKS, J. S. & NAUGHTON, M. J., (1983). Observation of a fractional quantum number. *Phys. Rev. B* **28**(4), 2274.
- VAN KAMPEN, N. G., (1992). *Stochastic processes in physics and chemistry*. North-Holland, Amsterdam.
- VON KLITZING, K., (1986). The quantized Hall effect. *Rev. Mod. Phys.* **58**, 519.

- VON KLITZING, K., DORDA, G. & PEPPER, M., (1980). New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett.* **45**(6), 494.
- WARDLAW, D. M. & JAWORSKI, W., (1989). Time delay, resonances, Riemann zeros and chaos in a model quantum scattering system. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 3561.
- WEGNER, F., (1983). Exact density of states for Lowest Landau Level in white noise potential. Superfield representation for interacting systems. *Z. Phys. B - Cond. Matt.* **51**, 279.
- WIGNER, E. P., (1955). Lower limit for the energy derivative of the scattering phase shift. *Phys. Rev.* **98**(1), 145.
- WITTEN, E., (1981). Dynamical breaking of supersymmetry. *Nucl. Phys. B [FS]* **188**, 513.
- WU, H.-L., GOFF, W. & PHILLIPS, P., (1992). Insulator-metal transition in a random lattices containing symmetrical defects. *Phys. Rev. B* **45**(4), 1623.
- WU, H.-L. & PHILLIPS, P., (1991). Polyaniline is a Random-Dimer Model: a new transport mechanism for conducting polymers. *Phys. Rev. Lett.* **66**(10), 1366.
- YOR, M., (1992). On some exponential functionals of Brownian motion. *Adv. Appl. Probab.* **24**, 509.
- YOR, M. (ed.), (1997). *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*. Biblioteca de la revista matemática iberoamericana, Madrid. ISSN 0213-2230.
- ZIMAN, T., (1982). Localization and spectral singularities in random chains. *Phys. Rev. Lett.* **49**(5), 337.

Come, thou monarch of the vine,
Plumpy Bacchus with pink eyne !
In thy fats our cares be drowned,
With thy grapes our hairs be crowned.
Cup us, till the world go round,
Cup us, till the world go round !

William Shakespeare, *Antony and Cleopatra*.

Abstract

In the first part we study the statistical properties of the Wigner time delay for one-dimensional disordered systems with one scattering channel. The scattering problem is completely characterized by a single phase shift whose derivative with respect to the energy defines the time delay. This latter quantity is related to the time spent by the particle in the interaction region. We show that the statistical properties of the time delay are model independent in the high energy (low disorder) limit. The time delay obeys a distribution with algebraic tail, whose origin is due to the existence of long living states localized in the disordered region that can trap the particle for long times. Our analytical results are in good agreement with numerical simulations carried out for a model with randomly dropped delta-scatterers. We also discuss the low energy regime for this particular model. Finally, we consider a model that displays a delocalization transition and study the time delay distribution at the delocalization point.

The second part is devoted to the study of the electric transport for a two-dimensional non-interacting electron gas coupled to a random magnetic field. The magnetic field is produced by magnetic vortices carrying the same flux and randomly distributed on the plane. When their flux is small compared to the quantum flux, the spectrum consists of Landau levels broadened by the disorder. We compute the conductivity for one vortex, which is subleading in volume and also divergent at small frequency. We perform a perturbative analysis for the random field model that shows a departure from the classical result obtained for the average magnetic field. We also consider magnetization and persistent currents for arbitrary two-dimensional magnetic configurations.

Résumé

Nous étudions un aspect de la diffusion quantique dans un milieu désordonné unidimensionnel avec un seul canal de diffusion. La diffusion est donc caractérisée par un unique déphasage dont la dérivée par rapport à l'énergie définit le temps de Wigner ; le sens physique de celui-ci est relié au temps passé par la particule dans la région d'interaction. Nous étudions les propriétés statistiques du temps de Wigner et montrons qu'elles sont indépendantes du modèle dans la limite de haute énergie (faible désordre). Le temps de Wigner obéit à une loi large dont l'origine physique résulte de l'existence d'états localisés au sein de la région désordonnée, capables de piéger la particule pendant des temps très longs. Ces résultats sont en excellent accord avec des calculs numériques. En dernier lieu nous nous intéressons à l'influence d'une transition de délocalisation sur les propriétés statistiques du temps de Wigner.

La seconde partie est consacrée à l'étude du transport électrique dans un milieu bidimensionnel à champ magnétique aléatoire. Le champ magnétique est celui d'une assemblée de vortex magnétiques portant tous le même flux et distribués aléatoirement dans le plan. Dans la limite où le flux porté par chaque vortex est petit devant le quantum de flux, le spectre présente une succession de niveaux de Landau élargis par le désordre. Nous étudions la conductivité pour un vortex qui est sous-dominante en volume et divergente à petite fréquence. Par une analyse perturbative de la conductivité Hall du problème à plusieurs vortex, nous montrons que celle-ci présente une déviation par rapport au résultat classique obtenu pour le champ magnétique moyen. Parallèlement, nous indiquons comment définir une aimantation ou un courant permanent pour une configuration arbitraire de champ magnétique.