

TD n°1 : Prolégomènes

1 Moments et Cumulants

Soit une variable aléatoire $x \in \mathbb{R}$ distribuée par une loi $p(x)$. Les moments de cette loi sont définis comme : $\langle x^k \rangle = \int dx p(x) x^k$.

1/ Comment la fonction génératrice

$$g(b) \stackrel{\text{def}}{=} \langle e^{bx} \rangle \quad (1)$$

est elle reliée aux moments ?

2/ On introduit la fonction génératrice des cumulants

$$w(b) = \ln g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \quad (2)$$

Montrer en particulier que

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle \quad (3)$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (\text{variance}) \quad (4)$$

$$\langle x^3 \rangle_c = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \quad (\text{skewness}) \quad (5)$$

$$\langle x^4 \rangle_c = \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle - 3\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^2 \quad (\text{kurtosis}) \quad (6)$$

3/ Quels sont les moments et les cumulants de la distribution gaussienne : $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$?

4/ Même question pour la distribution de Poisson : $p(x) = e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

5/ **Cumulants de l'énergie.** – Montrer que $\langle E_n^m \rangle_c = (-\frac{\partial}{\partial \beta})^m \ln Z_\beta$ où $Z_\beta = \sum_n e^{-\beta E_n}$ est la fonction de partition canonique.

6/ On considère un modèle classique dont l'énergie est $H = H_0 + U$. Montrer que l'énergie libre se développe en fonction de U comme :

$$F = F_0 + \langle U \rangle_0 - \frac{\beta}{2} (\langle U^2 \rangle_0 - \langle U \rangle_0^2) + \dots \quad (7)$$

où $\langle \dots \rangle_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathcal{C}} \dots \frac{1}{Z_0} e^{-\beta H_0(\mathcal{C})}$ (la somme porte sur les différentes configurations \mathcal{C} du système).

7/ Appliquer la formule précédente au cas de l'oscillateur anharmonique : $H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2)$ et $U = \lambda x^4$.

2 Quelques intégrales gaussiennes

1/ Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx}$

2/ Pour intégrer dans \mathbb{R}^2 on introduit la notation complexe $dzd\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} dx dy$.
Calculer $\int dzd\bar{z} e^{-\bar{z}az + \bar{b}z + \bar{z}b}$ où a, b et c sont trois nombres complexes ($\text{Re } a > 0$).

3/ Soit X un vecteur colonne de \mathbb{R}^N dont les composantes sont x_1, \dots, x_N . On note $dX \stackrel{\text{def}}{=} dx_1 \cdots dx_N$ la mesure d'intégration dans \mathbb{R}^N . Calculer $\int_{\mathbb{R}^N} dX e^{-\frac{1}{2}X^T A X + B^T X}$ où A est une matrice $N \times N$ réelle symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

4/ Soit Z un vecteur de \mathbb{C}^N . On note $dZ dZ^\dagger$ la mesure d'intégration dans \mathbb{C}^N (i.e. si $Z = X + iY$ avec $X, Y \in \mathbb{R}^N$ alors $dZ dZ^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} dx_1 dy_1 \cdots dx_N dy_N$). Calculer $\int_{\mathbb{C}^N} dZ dZ^\dagger e^{-Z^\dagger A Z + B^\dagger Z + Z^\dagger B}$ où A est une matrice $N \times N$ hermitique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. B est un vecteur de \mathbb{C}^N .

3 Mesure gaussienne, fonction génératrice et théorème de Wick

Le vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^N$ regroupe N variables aléatoires (x_1, \dots, x_N) distribuées selon une mesure gaussienne :

$$d^N X P(X) = d^N X \mathcal{N} \exp -\frac{1}{2} X^T A X \quad (8)$$

où A est une matrice $N \times N$ réelle symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

0/ Donner un exemple de situation physique où une telle mesure apparaît.

1/ Que vaut la constante de normalisation \mathcal{N} ?

2/ Fonction génératrice.— On introduit la fonction du vecteur $B \in \mathbb{R}^N$:

$$G(B) \stackrel{\text{def}}{=} \langle e^{B^T X} \rangle \quad (9)$$

où $\langle \cdots \rangle$ désigne la moyenne sur une mesure $d^N X P(X)$.

a/ Comment les fonctions de corrélation $\langle x_{i_1} \cdots x_{i_n} \rangle$ peuvent-elles se déduire de $G(B)$?

b/ Calculer explicitement $G(B)$ pour la mesure (8). En déduire la fonction de corrélation à deux points $\langle x_i x_j \rangle$, puis celle à quatre points $\langle x_i x_j x_k x_l \rangle$.

3/ Théorème de Wick.— Pour une mesure gaussienne, la fonction de corrélation à $2n$ points est obtenue en “contractant” de toutes les manières possibles les variables deux à deux :

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \cdots x_{i_{2n-1}} x_{i_{2n}} \rangle = \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle \langle x_{i_3} x_{i_4} \rangle \times \cdots \times \langle x_{i_{2n-1}} x_{i_{2n}} \rangle + (\text{autres contractions}) \quad (10)$$

Quel est le nombre de contractions ?

4/ On considère deux variables gaussiennes x et y telles que $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$ et $\langle x^2 \rangle = 5$, $\langle y^2 \rangle = 2$ et $\langle xy \rangle = 3$.

a/ Calculer $\langle x^4 \rangle$, $\langle x^3 y \rangle$, $\langle x^2 y^2 \rangle$ et $\langle xy^5 \rangle$.

b/ Quelle est la mesure $P(x, y)$?

4 Mesure gaussienne $P(X) \propto \exp -\frac{1}{2} X^T A X$ avec $\det A = 0$

Dans certains problèmes on peut être amené à considérer une mesure $P(X) \propto \exp -\frac{1}{2} X^T A X$ dans \mathbb{R}^N pour une matrice réelle symétrique A telle que $\det A = 0$. Dans ce cas $P(X)$ n'est

une mesure acceptable (normalisable) que dans le sous espace de \mathbb{R}^N complémentaire de $\text{Ker}A$.
 Considérons une telle situation :

$$X^T A X = \sum_{n=2}^N (x_n - x_{n-1})^2 \quad (11)$$

1/ Exprimer A . Donner le vecteur propre $V^{(0)}$ associé à la valeur propre 0.

2/ On note λ_m et $V^{(m)}$, $m = 0, \dots, N-1$ les valeurs propres et les vecteurs propres. Montrer que :

$$\lambda_m = 4 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2N} \right) \quad (12)$$

et

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (13)$$

$$V_n^{(m)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left(\frac{m\pi}{N} (n - 1/2) \right) \quad \text{pour } m > 0 \quad (14)$$

Orthonormalisation : On pourra vérifier l'orthonormalisation des vecteurs propres en utilisant $\sum_{n=1}^N z_n^m = N \delta_{m,0}$ où $z_n = \exp \frac{2i\pi n}{N}$ sont les racines Nièmes de l'unité.

3/ On introduit la matrice orthogonale $\mathcal{O} = (V^{(0)} \dots V^{(N-1)})$ qui relie le vecteur X à Q par : $X = \mathcal{O}Q$. Une mesure satisfaisante peut être exprimée en fonction des nouvelles variables comme :

$$dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1} \mathcal{N} \exp -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n q_n^2 \quad (15)$$

On note $\langle \dots \rangle$ la moyenne par rapport à cette mesure. Si on choisit $q_0 = 0$, donner l'expression de la fonction de corrélation à deux points $C_{n,n'} = \langle x_n x_{n'} \rangle$.

4/ Si on choisit maintenant $q_0 = \text{cste} \neq 0$, montrer que l'on obtient une autre fonction de corrélation $\tilde{C}_{n,n'} = \langle x_n x_{n'} \rangle$.

5/ Application : chaîne de ressorts classique à l'équilibre thermodynamique.— Une chaîne de ressorts est décrite par son hamiltonien :

$$H(\{x_n, p_n\}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N p_n^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{n=2}^N (x_n - x_{n-1})^2 \quad (16)$$

où x_n, p_n désignent les positions et les impulsions de N masses reliées par des ressorts.

a/ Écrire la mesure de Gibbs de la chaîne. Montrer que la fonction de partition peut s'écrire $Z_\beta = Z_\beta^{\text{cin}} Z_\beta^{\text{pot}}$. Par la suite on ne s'intéressera qu'à la partie potentielle de l'énergie.

b/ Quelle est l'origine physique de la valeur propre nulle de la matrice A ?

c/ Écrire la mesure associée à l'énergie de *vibration*.

d/ Donner l'expression des corrélations $\langle q_m q_{m'} \rangle$ entre coordonnées normales.

e/ En déduire les corrélations entre les positions des masses $\langle x_n x_{n'} \rangle$.

f/ Fluctuations.— Nous étudions ce résultat dans la limite de grande échelle (limite continue $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ avec $L = Na$ fixée). Analyser $\langle x_n^2 \rangle$ en fonction de n dans la limite continue.

Théorème de Mermin-Wagner.— En négligeant l’effet des bords, étudier $\langle (x_n - x_m)^2 \rangle$. Discuter la stabilité de la phase “cristalline” 1D sous l’effet des fluctuations thermiques.

Indication : Dans la limite continue on peut remplacer la somme finie sur les modes par une somme infinie. On utilise : $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m\pi)^2} \cos(m\pi x) \cos(m\pi x') = \frac{1}{4}[x_{<}^2 + (1 - x_{>})^2]$ où $x_{<} = \min(x, x')$ et $x_{>} = \max(x, x')$.

5 Dérivation et intégration fonctionnelles

Soit $f(t)$ une fonction réelle d’un espace de fonctions $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $F[f(t)]$ une fonctionnelle (on rappelle qu’une fonctionnelle est une application de $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$). On définit les dérivées fonctionnelles par le développement¹ :

$$F[f] = F[0] + \int dt f(t) \frac{\delta F}{\delta f(t)}[0] + \frac{1}{2!} \int dt dt' f(t) f(t') \frac{\delta^2 F}{\delta f(t) \delta f(t')} [0] + \dots \quad (17)$$

Remarques :

- La dérivée fonctionnelle $\frac{\delta F}{\delta f(t)}$ est une fonction de t .
- Une façon commode de la calculer est d’utiliser :

$$\frac{\delta F}{\delta f(t)}[f] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(t') + \epsilon \delta(t' - t)] - F[f(t')]}{\epsilon} \quad (18)$$

A. Dérivation fonctionnelle

Calculer les dérivées fonctionnelles premières de

$$F_1[f] = \int dt f(t),$$

$$F_2[f] = \int dt f(t)^n,$$

$$F_3[f] = \int dt e^{f(t)},$$

$$F_4[f] = \exp \int dt e^{f(t)},$$

$$G_{t_0}[f] = f(t_0)$$

et la dérivée fonctionnelle seconde de $F_4[f]$.

B. Fonctionnelle génératrice

De même qu’on a étendu le concept de dérivée partielle à celui de dérivée fonctionnelle, on extrapole la notion d’intégration sur N variables $\int d^N X \dots$ à celle d’intégration sur des espaces de fonctions, notée $\int \mathcal{D}f(t) \dots$

En particulier, ce nouvel outil est nécessaire si l’on souhaite considérer une fonction aléatoire distribuée avec une certaine mesure $\mathcal{D}f(t) P[f]$. On définit la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation comme :

$$G[b(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \langle e^{\int dt b(t) f(t)} \rangle \quad (19)$$

où la moyenne est définie par

$$\langle \dots \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{D}f(t) \dots P[f] \quad (20)$$

¹ Notez l’analogie avec le développement d’une fonction $F(X)$ de N variables : $F(X) = F(0) + \sum_i X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} X_i X_j \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}(0) + \dots$

1/ Bruit blanc gaussien.— On considère la mesure gaussienne $\mathcal{D}f(t) \exp -\frac{1}{2w} \int dt f(t)^2$ (on admet que la constante de normalisation est rentrée dans la définition de $\mathcal{D}f$). Calculer la fonctionnelle génératrice $G[b]$ et déduire les fonctions de corrélation de $f(t)$.

2/ Un bruit blanc non gaussien.— On considère la fonction aléatoire

$$f(t) = w \sum_{n=1}^N \delta(t - t_n) \quad \text{sur } [0, T]. \quad (21)$$

Le nombre N le pics est aléatoire et les t_n sont des variables décorréelées et uniformément distribuées sur $[0, T]$. La mesure est (Poisson) :

$$dt_1 \cdots dt_N P_N(t_1, \dots, t_N) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T} \frac{dt_1}{T} \cdots \frac{dt_N}{T} \quad (22)$$

où λ est la densité de pics δ .

a/ Montrer que la fonction génératrice des moments de $f(t)$ est :

$$G[b] = \exp \lambda \int_0^T dt (e^{wb(t)} - 1) \quad (23)$$

Déduire les fonctions de corrélation connexes (cumulants).

b/ *Application : théorie classique du bruit de grenaille.*

Dans un conducteur électrique, la nature discrète des porteurs de charge (les électrons) conduit à l'apparition de fluctuations du courant électrique I . Lorsque le conducteur est à l'équilibre ($\langle I \rangle = 0$), les fluctuations thermiques sont responsables de fluctuations dite de *Johnson-Nyquist* : $\langle I^2 \rangle = 2k_B T/R$ où R est la résistance.

Si le conducteur est soumis à une différence de potentiel, une modélisation simple consiste à écrire le courant comme une succession d'impulsions $I(t) = q \sum_n f(t - t_n)$ arrivant à des temps supposés décorréelés (où $f(t)$ est une fonction très étroite t.q. $\int dt f(t) = 1$). La mise hors équilibre du système produit des fluctuations du courant appelées *bruit de grenaille* (ou de *Shottky*). En supposant que $f(t) = \delta(t)$ calculer le courant moyen $\langle I(t) \rangle$ ainsi que le spectre de bruit $S(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int d(t-t') e^{i\omega(t-t')} \langle I(t)I(t') \rangle_c$. Montrer que le spectre de bruit est proportionnel au courant moyen : $S(\omega = 0) = q \langle I \rangle$.

Remarque : Ce résultat a permis récemment de mettre en évidence l'existence de charges fractionnaires dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire.

L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin & B. Etienne, *Observation of the $e/3$ Fractionally Charged Laughlin Quasiparticle*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 2526.

M. Reznikov, R. de Picciotto, T. G. Griffiths, M. Heiblum & V. Umansky, *Observation of quasiparticles with $1/5$ of an electron's charge*, Nature **399** (May 1999) 238.

c/ (*question facultative*) Généraliser le calcul de la question a/ des fonctions de corrélations

(1) au cas où les pics ont une largeur finie ($\delta(t) \rightarrow h(t)$ où cette dernière fonction a une largeur ϵ) ; discuter l'allure de $S(\omega)$.

(2) Au cas où les poids des pics δ sont aléatoires : $f(t) = \sum_{n=1}^N w_n \delta(t - t_n)$. Les poids w_n sont décorréelés et distribués par la même loi. On exprimera les fonctions de corrélation connexes de $f(t)$ en fonction des moments des w_n .

6 Mesure gaussienne générale – Chaîne de ressorts dans la limite continue

Soit $f(t)$ une fonction réelle distribuée selon une mesure gaussienne (forme la plus générale) :

$$P[f] \propto \exp -\frac{1}{2} \int dt' dt f(t') A(t', t) f(t) \quad (24)$$

1/ Comment définir l'inverse $C(t, t')$ du noyau intégral $A(t, t')$?

2/ Calculer la fonctionnelle génératrice des moments (19) et en déduire les fonctions de corrélation à n points.

3/ *Exemple 1* : On considère $A(t', t) = \frac{1}{w} \delta(t' - t)$. Donner $C(t', t)$ et $G[b]$.

4/ *Exemple 2* : On s'intéresse maintenant à $A(t', t) = -\delta(t' - t) \frac{d^2}{dt^2}$.

a/ Exprimer $P[f]$.

b/ On est maintenant confronté au même problème que dans l'exercice 4. Il faut donc spécifier plus précisément l'espace des fonctions $f(t)$ sur lequel la mesure est définie. Par exemple on choisit de considérer les fonctions $f(t)$ sur $[0, T]$ telles que $f(0) = f(T) = 0$. En déduire $C(t, t')$.

5/ **Limite continue de la chaîne de ressorts.**– On reprend l'étude de la chaîne de ressorts de l'exercice 4, dans la limite continue. Nous écrivons la mesure de Gibbs sous la forme :

$$dx_1 \cdots dx_N e^{-\beta E_p[\{x_n\}]} = dx_1 \cdots dx_N e^{-\frac{\beta}{2} \omega^2 \sum_{n=2}^N (x_n - x_{n-1})^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{D}x(n) e^{-\frac{\beta}{2} \omega^2 \int_0^N dn \left(\frac{dx(n)}{dn} \right)^2} \quad (25)$$

où n sera traité comme une variable continue et $x_n \rightarrow x(n)$ comme un « champ » (on ne considère pas la partie cinétique de l'énergie qui n'induit aucune corrélation entre les particules). À quelle situation physique correspondraient les conditions aux limites $x(0) = x(N) = 0$? Donner la valeur de la fonction de corrélation $\langle x(n)x(n') \rangle$ dans ce cas. Discuter physiquement ce résultat (en particulier qu'implique le comportement des fluctuations $\langle x(n)^2 \rangle$).

7 Changement de variables dans une intégrale de chemin

On considère l'intégrale de chemin

$$K(x, t|0, 0) = \int_{x(0)=0}^{x(t)=x} \mathcal{D}x e^{-\int_0^t dt' (\dot{x}^2 + V(x))} \quad (26)$$

solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) K(x, t|0, 0) = \delta(x) \delta(t) \quad (27)$$

On procède au changement de variables :

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ t = \eta \tau \end{cases} \quad (28)$$

Montrer que :

$$\int_{x(0)=0}^{x(t=\eta\tau)=\lambda y} \mathcal{D}x e^{-\int_0^t dt' (\dot{x}^2 + V(x))} = \frac{1}{\lambda} \int_{y(0)=0}^{y(\tau)=y} \mathcal{D}y e^{-\int_0^\tau d\tau' [\frac{\lambda^2}{\eta} \dot{y}^2 + \eta V(\lambda y)]} \quad (29)$$

ce qui peut s'interpréter comme : “ $\mathcal{D}x = \frac{1}{\lambda} \mathcal{D}y$ ”.