D

Intégration des fonctions

D.1 Intégrale de Riemann – Définitions et propriétés

D.1.1 Définition de l'intégrale de Riemann

Soit f une fonction bornée définie sur l'intervalle $[a,b]$. Riemann a proposé la définition suivante de « l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ » :

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon\, f(a+k\,\varepsilon) \qquad \text{où } \varepsilon = \frac{b-a}{N}\,. \tag{D.1}$$

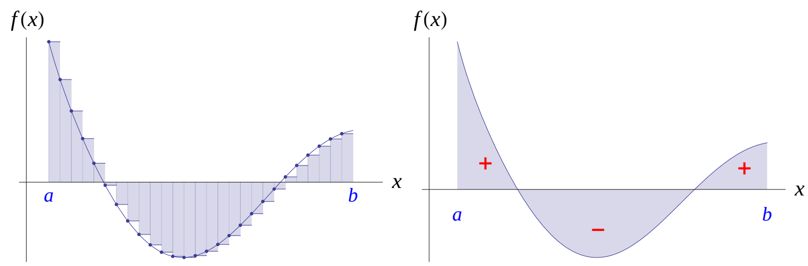

FIGURE D.1: À gauche : représentation graphique de la somme $\varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} f(a+k\varepsilon)$. À droite : à la limite $N \to \infty$, la somme devient l'intégrale qui représente donc l'aire algébrique entre la courbe et l'axe.

Interprétation géométrique : Le membre de droite de l'équation (D.1) (avant limite) représente l'aire algébrique des rectangles (Fig. D.1.g). En considérant la limite $N \to \infty$, on obtient donc *l'aire algébrique* entre la courbe et l'axe (Fig. D.1.d).

Vocabulaire : Le symbole $\int$ rappelle celui de la somme $\sum$, cependant, au lieu d'effectuer la somme d'un nombre fini de termes indicés par l'indice *discret* $k \in \{0,\cdots,N-1\}$, la somme est effectuée à l'aide de l'indice variant *continûment* $x \in [a,b]$.

— La fonction sous l'intégrale, ici $f(x)$, est appelée « *l'intégrande* ».

— a et b sont les « *bornes d'intégration* ».

— x est la *variable d'intégration*. C'est une « *variable muette* » (tout comme l'indice k de la somme), par opposition aux paramètres dont dépend la somme (comme a et b). Son nom n'a pas d'importance : $\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \int_a^b \mathrm{d}t\, f(t)$.

— Le symbole $\mathrm{d}x$ est un *accroissement infinitésimal*. Il joue le rôle analogue au ε (placé dans la somme pour souligner l'analogie) : $\mathrm{d}x\, f(x)$ représente l'aire d'un « rectangle » de largeur infinitésimale $\mathrm{d}x$ et de hauteur $f(x)$.

Généralisation de la définition : La définition (D.1) peut être étendue au cas où les intervalles n'ont pas la même largeur. Considérons une partition de l'intervalle $[a,b] = [x_0,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1},x_N]$, où $x_0 = a$ et $x_N = b$, telle que $\delta x_n \overset{\text{def}}{=} x_{n+1} - x_n \to 0\ \forall\, n$ lorsque $N \to \infty$.

On peut définir l'intégrale de Riemann comme

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k\, f(x_k)\,, \tag{D.2}$$

écriture qui souligne davantage l'analogie entre somme et intégrale.

Extensions de la définition : On peut étendre la définition de l'intégrale de Riemann au cas où :

— La fonction n'est pas bornée sur $[a, b]$. Par exemple elle diverge sur le bord $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Si la divergence n'est pas trop forte, l'intégrale est finie. Pour établir le lien avec la définition (D.1) on écrit

$$\text{si } f(b) = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{x_0\to b^-} \underbrace{\int_a^{x_0} \mathrm{d}x\, f(x)}_{\text{déf. (D.1)}} \tag{D.3}$$

— De même on peut considérer un intervalle dont une borne est envoyée à l'infini :

$$\int_a^\infty \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \tag{D.4}$$

— Lorsque le résultat d'une telle limite est fini, Éq. (D.3) ou Éq. (D.4), on dira que « l'intégrale est convergente », on écrira par exemple $\int_a^\infty \mathrm{d}x\, f(x) < \infty$. À l'inverse, si la limite est infinie on dira que « l'intégrale est divergente » et on écrira $\int_a^\infty \mathrm{d}x\, f(x) = \infty$.

D.1.2 Propriétés :

Énonçons quelques propriétés élémentaires qui découlent de la définition (D.1).

— Inversion des bornes :

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = -\int_b^a \mathrm{d}x\, f(x) \tag{D.5}$$

— Relation de Chasles

$$\int_a^c \mathrm{d}x\, f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) + \int_b^c \mathrm{d}x\, f(x) \tag{D.6}$$

— Linéarité : soient deux fonctions f et g bornées et deux nombres réels (ou complexes) λ et μ :

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \left[\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)\right] = \lambda \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) + \mu \int_a^b \mathrm{d}x\, g(x) \tag{D.7}$$

— Analyse dimensionnelle (pour les physiciens)

$$\left[\int \mathrm{d}x\, f(x)\right] = [x]\,[f(x)] \tag{D.8}$$

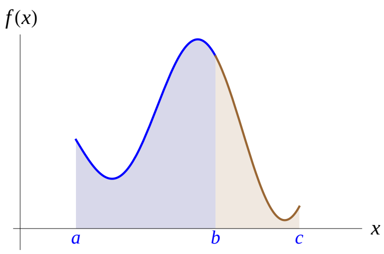

FIGURE D.2: Illustration de la relation de Chasles D.6.

D.1.3 Relation avec la dérivation

La relation avec la dérivation découle de la définition. Définissons la fonction

$$F(x) = \int_a^x \mathrm{d}t\, f(t) \tag{D.9}$$

appelée « *une primitive* de f » (notons qu'il faut faire bien attention à donner un nom différent à la variable « muette » d'intégration, t, et aux autres variables « parlantes », ici x, afin d'éviter les confusions). On utilise la relation de Chasles

$$F(x+\varepsilon) - F(x) = \int_x^{x+\varepsilon} \mathrm{d}t\, f(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\simeq} \varepsilon\, f(x)\,; \tag{D.10}$$

l'approximation découle de ce que $f(x)$ est quasiment constante sur l'intervalle $[x, x+\varepsilon]$ de largeur « petite ». On divise par ε : $\big[F(x+\varepsilon) - F(x)\big]/\varepsilon$. À la limite $\varepsilon \to 0$ on retrouve la dérivée :

$$F'(x) = f(x)\,. \tag{D.11}$$

Autrement dit, les opérations de dérivation et d'intégration sont inverses :

$$\boxed{f(x) \underset{\int \mathrm{d}x}{\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\rightleftarrows}} f'(x)} \tag{D.12}$$

Remarque : une primitive n'est pas unique. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f. Alors $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, i.e. F_1 et F_2 diffèrent par une constante.

D.2 Calcul des intégrales

Dans cette partie, nous passons en revue les méthodes de base qui permettent de calculer des intégrales.

D.2.1 Identification d'une primitive

Le paragraphe précédent nous fournit un moyen *pratique* de calculer les intégrales. Si on connait une primitive F de f (i.e. « deviner » une fonction F telle que $F' = f$), alors

$$\int_a^b \mathrm{d}t\, f(t) = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)\,. \tag{D.13}$$

Exemple : Considérons $I = \int_0^\pi \mathrm{d}t\, \sin(t)$. On se rappelle que $\cos' = -\sin$ et donc $I = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$.

Quelques primitives de fonctions élémentaires : Il faut donc garder en tête quelques primitives des fonctions élémentaires.

$f(x)$	$F(x) = \int \mathrm{d}x\, f(x)$
x^a pour $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln \lvert u(x) \rvert$
$\mathrm{e}^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln \lvert \cos(x) \rvert$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\ln\cosh(x)$

On a toutefois souvent à considérer des intégrales de fonctions plus compliquées. Dans ce cas, on doit essayer différentes techniques (i.e. des « trucs »). Nous en décrivons quelques uns.

D.2.2 Changement de variable

Soit $u(x)$ une fonction *bijective* sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)\, f(u(x)) = \int_{u(a)}^{u(b)} \mathrm{d}u\, f(u) \tag{D.14}$$

Lorsqu'on passe du membre de gauche au membre de droite dans l'Eq. (D.14), on note deux points important :

— $\mathrm{d}x\, u'(x) = \mathrm{d}u$

— Les bornes sont transformés : $[a, b] \to [u(a), u(b)]$.

La propriété devient évidente si on utilise la notation $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Pour effectuer le changement de variable, il est commode d'écrire $\mathrm{d}x\, u'(x) = \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}u(x)$ (c'est une « différentielle »).

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x \to u$ avec $u = u(x)$.

On peut aussi écrire l'Eq. (D.14), de la façon suivante :

$$\int_{u_1}^{u_2} \mathrm{d}u\, f(u) = \int_{u^{(-1)}(u_1)}^{u^{(-1)}(u_2)} \mathrm{d}x\, u'(x)\, f(u(x)) \tag{D.15}$$

où $u^{(-1)}(u)$ est la fonction réciproque de $u(x)$. C'est à dire que $x = u^{(-1)}(u(x)) = x$.

Exemple 1 :

$$\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x\ \tan x = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{-(\cos x)'\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$$
$$= -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \Big[\ln|u|\Big]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Dans cette exemple, c'est la fonction $\tan x = f(u(x))$ qui est donnée. On a effectué le changement de variable $x \to u$ avec $u = \cos x$.

Exemple 2 : Avec de l'usage on peut deviner quel changement de variable est naturel. Par exemple

$$\int_0^1 \mathrm{d}u \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \cos\theta \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \sin^2\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Dans cet exemple, c'est la fonction $f(u) = \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}$ qui est donnée et on a effectué le changement de variable $\theta \to u$ avec $u = \sin\theta$ et donc $\mathrm{d}u = u'(\theta)\mathrm{d}\theta = \cos\theta\mathrm{d}\theta$. On remarquera le changement des bornes d'intégration. quand $u = 0$, c'est à dire $\sin\theta = 0$ alors $\theta = 0$ et quand $u = 1$, c'est à dire $\sin\theta = 1$ alors $\theta = \pi/2$.

D.2.3 Intégration par parties

On a très souvent à considérer des intégrales de produits de fonctions, $\int \mathrm{d}x\, f(x)\, g(x)$. Dans certains cas il est utile d'utiliser « l'intégration par parties », consistant à intégrer f et dériver g.

Partons de la formule bien connue $(F\,g)' = F'\,g + F\,g'$ et passons un des termes dans l'autre membre : $F'\,g = (F\,g)' - F\,g'$. L'intégration de cette dernière équation sur $[a, b]$ nous donne la formule très utile :

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\, g(x) = \Big[F(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \mathrm{d}x\, F(x)\, g'(x)} \qquad \text{(D.16)}$$

Exemple :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x}\, x = \big[-\mathrm{e}^{-x}\, x\big]_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{d}x\, (-\mathrm{e}^{-x}) = 1$$

D.2.4 Dérivation par rapport à un paramètre sous le signe $\int$

Il est parfois utile d'utiliser

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x,\lambda) \qquad \text{(D.17)}$$

(l'inversion de la dérivation et de l'intégration est licite dans la plupart des cas, sauf cas pathologique). Ce type de formule permet parfois de simplifier l'intégrande.

Exemple :

$$J(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^n \mathrm{e}^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

où $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.