Examen de Mathématiques

Mercredi 6 Janvier 2016 de 14h45 à 17h45

Durée de l'épreuve : 3 heures.

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables,...est interdite.

Barème approximatif : Ex I : 2 pts, Ex II 2 pts, Ex III 4 pts, Ex IV 4 pts, Ex V 8 pts

Recommandations : Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *clairement* votre réponse.
Vérifiez vos calculs et n'oubliez pas de vous **relire**.

Conventions :

- Convention pour la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{\dagger}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} f(k)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}$$

- Convention pour les distributions régulières : on note $[f]$ où $[x \to f(x)]$ la distribution régulière associée à une fonction f localement sommable.
- On rappelle que la fonction θ de Heaviside est définie par :

$$\forall x > 0,\ \theta(x) = 1\,;\ \forall x \leqslant 0,\ \theta(x) = 0.$$

1 Fonctions Analytiques

Pour les fonctions holomorphes suivantes :
- Préciser les singularités et le domaine d'analyticité ;
- Lorsque ces singularités sont des pôles, en donner l'ordre et le résidu correspondant.

$$f(z) = \frac{e^{-\mathrm{i}z}}{(z-i)^2}, \qquad f(z) = \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z+\mathrm{i})^2} + \frac{1}{z-1}.$$

Remarque : Log est le logarithme complexe détermination principale.

2 Espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$

Indiquer parmi les fonction suivantes celles qui appartiennent soit à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, soit à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, soit à la fois à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$f_1(x) = e^{-x^2},\ f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-x^2},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{1}$$

Justifier votre réponse.

3 Transformée de Fourier et Convolutions

Soit la famille de fonctions $L_a : x \in \mathbb{R} \to L_a(x) \in \mathbb{R}$, où a est un paramètre réel, $a > 0$ définie par

$$L_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier $\hat{L}_a(k)$.
2. Calcul du produit de convolution
   (a) Rappeler la définition du produit de convolution $L_a * L_b$ et calculer $L_a * L_b$ en utilisant la transformée de Fourier. On exprimera le résultat sous la forme
   $$L_a * L_b = \alpha L_c,$$
   où α et c sont des paramètres que l'on précisera.
   (b) Quelle méthode de calcul permettrait de faire un calcul direct de $L_a * L_b$? (On ne demande pas de faire le calcul).
3. Convolution et dérivation
   (a) En utilisant le théorème de Lebesgue démontrer que $L'_a * L_b = (L_a * L_b)'$.
   (b) En déduire (sans calcul d'intégrale) l'expression de $(L'_a * L_b)(x)$.

4 Transformation de Fourier des fonctions

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}} e^{-x/2}$$

Remarque : Par construction $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

1. Montrer rapidement que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
2. On désigne par $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Calculer $\hat{f}(0)$.
   Indication : On rappelle que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \mathrm{d}x$ et que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
3. Montrer que $\hat{f}$ est prolongeable en une fonction définie sur le demi-plan complexe
   $$\Pi = \{k \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(k) < 1/2\}.$$
   On admettra dans la suite que cette fonction est analytique sur Π.
4. Calculer le produit de convolution $f * f$: il est demandé un calcul direct. On montrera que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ (f * f)(x) = K\theta(x) e^{-x/2}$$
   où K est une constante que l'on précisera.
   Indication : On pourra utiliser le résultat suivant :
   $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi.$$

   On définit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \pi\, \theta(x) e^{-x/2}$$
5. Calculer la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g.
6. Déduire des questions précédentes l'expression explicite de $\hat{f}(k)$.

5 Distributions : Partie Finie de $\theta(x)/x$ et ses propriétés

La fonction $x \to \theta(x)/x$ n'est pas localement sommable et ne permet donc pas de définir une distribution régulière. Le but de cet exercice est de voir comment on peut définir une distribution singulière appelée "partie finie de $\theta(x)/x$" et notée $\mathrm{Pf}\frac{\theta(x)}{x}$ qui corresponde le mieux possible à la fonction $\theta(x)/x$.

1. Préliminaires
   (a) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ une fonction localement sommable. Rappeler la définition de la distribution régulière associée, notée $[f]$.
   (b) Soit $T \in \mathcal{D}'$. Rappeler la définition de la dérivée T' de T.
   (c) Soit $T \in \mathcal{D}'$ et soit α une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Rappeler la définition du produit de α par T.
   (d) Rappeler la définition de la distribution de Dirac δ.
   (e) Rappeler les définitions de $\mathcal{F}(T)$ et $\mathcal{F}^\dagger(T)$ pour $T \in \mathcal{S}'$.
   (f) Si T est une distribution tempérée, rappeler la relation liant $\mathcal{F}\left((x \mapsto x).T\right)$ et $\mathcal{F}(T)$.

Soit T_0 la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \qquad < T_0, \varphi > = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x$$

2. Vérifier que l'expression $< T_0, \varphi >$ précédente est bien définie.
3. Equation $(x \mapsto x).T = [\theta]$
   (a) Montrer que $(x \mapsto x).T_0 = [\theta]$.
   (b) Trouver toutes les solutions de l'équation $(x \mapsto x).T = [\theta]$.
4. On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F : x \mapsto F(x) = \theta(x) \ln |x|$.
   (a) Montrer que F est localement sommable et que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad F'(x) = \frac{\theta(x)}{x}.$$
   (b) Montrer que
   $$[F]' = T_0$$
   Remarque : Cette question est un peu difficile. Ne pas hésiter à passer à la suite.

Les questions précédentes justifient que l'on postule $\boxed{\mathrm{Pf}\frac{\theta(x)}{x} \stackrel{\mathbf{def}}{=} T_0}$.

5. Dans cette question on cherche à obtenir une approximation de $\mathrm{Pf}\frac{\theta(x)}{x} = T_0$ par une famille de distributions régulières.
   (a) On définit la suite de fonctions localement sommables $\{f_n\}$ sur $\mathbb{R}$ par
   $$f_n(x) = \theta(x)(1 - e^{-nx}) \ln |x|,$$
   montrer que
   $$\lim_{n\to\infty}^{\mathcal{D}'} [f_n] = [F],$$
   où $F(x) = \theta(x) \ln |x|$ (question précédente).
   Remarque : Pour simplifier, on admettra que l'on peut inverser limite et intégrale.

(b) Montrer que

$$[f_n]' = [f_n'] \tag{2}$$

et en déduire que

$$\overset{\mathcal{D}'}{\lim_{n\to\infty}} [f_n'] = T_0. \tag{3}$$

Remarque : On demande une argumentation précise justifiant les deux égalités (2) et (3).

6. On admet dans ce qui suit que T_0 est une distribution tempérée et on cherche à trouver sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(T_0)$.

   (a) Montrer que

   $$i\,\mathcal{F}(T_0)' = \mathcal{F}([\theta]).$$

   (b) On rappelle que $\mathcal{F}([\theta]) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}(vp\frac{1}{k} + i\pi\delta)$ et que $[k \mapsto \ln|k|]' = vp\frac{1}{k}$. En déduire que $\mathcal{F}(T_0)$ est une distribution régulière $[G]$ où G est une fonction que l'on précisera à une constante près.