Janvier 2016 Ch. Texier

Examen de mathématique - 6 Janvier 2016

Sujet : Hervé Bergeron

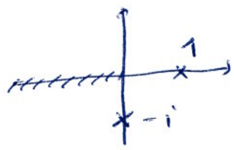
1. Fonctions analytiques

$$f(z) = \frac{e^{-iz}}{(z-i)^2} \quad \text{analytique sur } \mathbb{C} - \{i\}$$

i : pôle double

$$\text{Rés}[f, i] = \left[\frac{d}{dz} e^{-iz}\right]_{z=i} = -i \times e$$

$$f(z) = \frac{\text{Log}(z)}{(z+i)^2} + \frac{1}{z-1} \quad \text{analytique sur } \mathbb{C} - \mathbb{R}_- - \{1, -i\}$$



$\mathbb{R}_-$: coupure

$-i$: pôle double

1 : pôle simple

$$\underbrace{(\ldots)}_{\text{rég. en } z=1} + \frac{1}{z-1} \Rightarrow \text{Rés}[f, 1] = 1$$

$$\frac{\text{Log}(z)}{(z+i)^2} + \underbrace{(\ldots)}_{\text{rég. en } z=-i} \Rightarrow \text{Rés}[f, -i] = \left[\frac{d}{dz} \text{Log}\, z\right]_{z=-i} = i$$

2. Espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$

* $f_1(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ car $\int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$; car $\int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-2x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

* $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais $\notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ car $\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$; car $\int |f_2(x)|^2 = \underbrace{2\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-2x^2}}_{\text{divergence } \int_0 \frac{dx}{x} = \infty} = \infty$

* $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ car $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

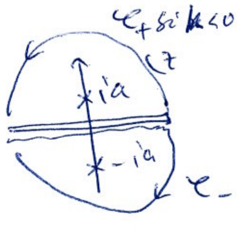
car $f_3 \sim 1/|x|$ si $x \to \pm\infty$

$\Rightarrow \int^\infty f_3 = \infty$

3. TF et convolution

$$L_a(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2+a^2}$$

1. $$\hat{L}_a(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} L_a(x)\, e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{-ikx}}{x^2+a^2}$$



$$|e^{-izk}| = e^{k \,\text{Im} z}$$

$$\left| \int_{\mathcal{C}_\pm} dz \frac{e^{-ikz}}{z^2+a^2} \right| \leq \underbrace{\frac{R}{R^2-a^2} (\pm) \int_0^{\pm\pi} d\theta\, e^{kR\sin\theta}}_{\xrightarrow{R\to\infty} 0}$$

$$\hat{L}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\pi} \left[2i\pi \frac{\theta(-k)}{2ia} e^{ka} - 2i\pi \frac{\theta(k)}{-2ia} e^{-ka} \right]$$

$$\boxed{\hat{L}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a|k|}}$$

2\. (a) $(L_a * L_b)(x) = \int dy \; L_a(x-y)\, L_b(y)$

$$\widehat{(L_a * L_b)}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik(x-y+y)} \int dy \; L_a(x-y)\, L_b(y) = \sqrt{2\pi}\, \hat{L}_a(k)\, \hat{L}_b(k)$$

$$\widehat{(L_a * L_b)}(k) = \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a|k|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b|k|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(a+b)|k|} = \hat{L}_{a+b}(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L_a * L_b = L_{a+b}}$$

(b) th. des résidus

$L_a'(x) = -\frac{a}{\pi} \frac{2x}{(x^2+a^2)^2}$

3\. (a) $L_a' * L_b = ?$

$(L_a * L_b)(x) = \int dy \; \underbrace{L_a(x-y)}\, L_b(y)$

Hyp. du th:

1) $L_a(x-y)\, L_b(y)$ sommable ✓

2) $\frac{\partial}{\partial x} L_a(\;)\, L_b(\;)$ existe presque partout et $\forall x$ ✓

3) $\left|\frac{\partial}{\partial x} L_a(x-y)\, L_b(y)\right| \leq h(y)$

car L_a' est bornée

on peut prendre $h(y) = \max(L_a'(x)) \times L_b(y)$ ✓

$\Rightarrow$ on peut permuter $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\int dy$

i.e. $\underline{L_a' * L_b = (L_a * L_b)'}$

(b) $\Rightarrow (L_a' * L_b)(x) = L_{a+b}'(x)$

$$= -\frac{c}{\pi} \frac{2x}{(x^2+c^2)^2} \quad \text{où} \quad c = a+b$$

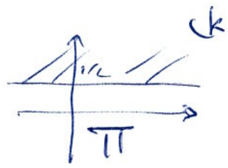
4\. $\boxed{\text{TF des fcts}}$

$f(x) = \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}} e^{-x/2}$

1\. $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ car $\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$ et $\int^{\infty} \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}} < \infty$

2\. $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-ikx - x/2}$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-x/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \overbrace{\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t}}^{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}} = 1$$



3\. $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{x(\operatorname{Im} k - \frac{1}{2})} < \infty$ si $\operatorname{Im} k \leq 1/2$

$\hat{f}(k)$ est une fonction analytique de k sur le ½ plan Π qui est le prolongement de $\hat{f}(k)$ sur $\mathbb{R}$

4. Produit de convolution : $f * f$

$$(f*f)(x) = \int dy \, \frac{\theta(x-y)}{\sqrt{x-y}} e^{-\frac{x-y}{2}} \frac{\theta(y)}{\sqrt{y}} e^{-\cancel{y}/2}$$

$$= \theta(x) e^{-x/2} \underbrace{\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(x-y)}}}_{= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi} = \pi e^{-x/2}$$

ne pas oublier

$$\underline{(f*f)(x) = \pi \, \theta(x) e^{-x/2}} = g(x)$$

5. $$\hat{g}(k) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dx \, e^{-(ik+\frac{1}{2})x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}+ik} = \frac{\sqrt{2\pi}}{1+2ik}$$

6. or $\hat{g}(k) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k)^2 \Rightarrow$ $\boxed{\hat{f}(k) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+2ik}} = \frac{1}{\sqrt{1+2ik}}}$

on choisit + car $\hat{f}(0)=1$

on choisit une détermination de $\sqrt{z}$ pour que la coupure soit dans le demi plan complexe sup. → la détermination principale

5. $\boxed{\text{Distribution : Partie finie de } \frac{\theta(x)}{x}}$

$$\mathrm{Pf}\, \frac{\theta(x)}{x}$$

1. Préliminaire (a)

(a) $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ $[f]$ est définie comme : $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\langle [f], \varphi \rangle = \int dx\, f(x) \varphi(x)$

(b) $T \in \mathcal{D}'$
T' est définie par $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$

(c) soit $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ αT est définie par $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$

(d) $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$

(e) $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ pour $T \in \mathcal{S}'$

(f) $T \in \mathcal{S}' \Rightarrow \mathcal{F}((x\mapsto x)T) = i\, \mathcal{F}(T)'$

$\mathcal{F}(x f(x)) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} x f(x) e^{-ikx} = i\frac{\partial}{\partial k} \hat{f}(k)$

T_0 définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_0, \varphi \rangle = \int_0^1 dx \, \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \int_1^\infty dx \, \frac{\varphi(x)}{x}$$

2. $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ est borné sur $[0,1]$ puisque $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \underset{x\to 0}{\to} \varphi'(0)$

$\Rightarrow$ les 2 intégrales sont finies si $\varphi \in \mathcal{D}$

3. $(x\mapsto x).T_0 = ?$

(a) 1.(c) $\Rightarrow \langle (x\mapsto x) T_0, \varphi \rangle = \int_0^1 dx \, \frac{x\varphi(x) - 0.\varphi(0)}{x} + \int_1^\infty dx \, \frac{x\varphi(x)}{x} = \int_0^\infty dx\, \varphi(x)$

$\Rightarrow \boxed{(x\mapsto x) T_0 = [\theta]}$ (Heaviside)

(b) solutions de $(x \mapsto x)\, T = [\theta]$

$$T = \underbrace{\mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{c \times \delta}_{\text{solution générale de } (x\mapsto x)T = 0} \qquad \forall c \in \mathbb{C}$$

4. $F(x) = \theta(x) \ln|x|$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

(a) $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}_+$ $(a, b \neq \pm\infty)$ $\quad \overbrace{\int_a^b dx \ln x}^{[x\ln x - x]_a^b} < \infty$ | même si $a = 0$

$\Rightarrow F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$

sur $\mathbb{R}^*$ $\quad F' = 0$ sur $\mathbb{R}^*_-$, $\quad F' = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ $\quad \Rightarrow F'(x) = \frac{\theta(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

(b) $[F]' = ?$

$$\langle [F]', \varphi\rangle = -\langle \underbrace{[F]}_{\text{régulière}}, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty dx \ln x\, \varphi'(x) \xrightarrow{\text{NON}} \int_0^\infty \frac{dx}{x}\varphi(x)$$

intégrale ∞ en général

n'est pas une distrib.

MAUVAISE IDÉE !

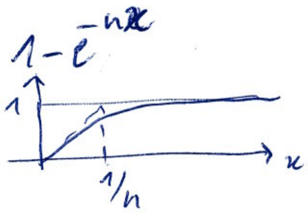
$$= -\int_0^1 dx \ln x\, \underbrace{\varphi'(x)}_{\downarrow\ (\varphi(x)-\varphi(0))'} - \int_1^\infty dx \ln x\, \varphi'(x)$$

on choisit deux primitives différentes

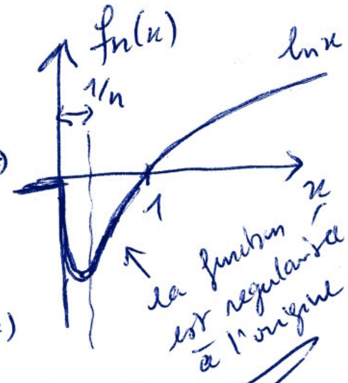
$$= +\underbrace{\int_0^1 dx\, \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}}_{\text{l'intégrale est finie } \forall \varphi \in \mathcal{D}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x}\varphi(x)$$

$$= \langle \mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x}, \varphi\rangle \qquad \text{QED.}$$

$$\boxed{[\theta(x)\ln|x|]' = \mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x}}$$



$\Rightarrow$



5. Régularisation

(a) $f_n(x) = \theta(x)\,(1 - e^{-nx}) \ln x$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle [f_n], \varphi\rangle = \int_0^\infty dx\, \underbrace{(1-e^{-nx})\ln x}_{\text{majorant } |\ln x| \text{ localement sommable}}\ \varphi(x)$$

$\downarrow$ th. conv. dominée

$$\lim_{n\to\infty} \langle [f_n], \varphi\rangle = \langle [f_\infty], \varphi\rangle = \langle [F], \varphi\rangle$$

i.e. $\quad \overset{\mathcal{D}'}{\lim_{n\to\infty}} [f_n] = [F]$

(b) on utilise la <u>continuité</u> de $f_n(x)$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \langle [f_n]', \varphi \rangle = -\underset{\substack{\downarrow \\ \text{rég.}}}{\langle [f_n], \varphi' \rangle} = -\int_0^\infty dx\, f_n(x)\varphi'(x)$$

$$= -\cancel{[f_n(x)\varphi(x)]_0^\infty} + \int_0^\infty dx\, f_n'(x)\varphi(x)$$

car $\begin{cases} f_n(0)=0 \\ \varphi \in \mathcal{D} \end{cases}$

pas de pb avec la fct régularisée

$f_n(x) = (1-e^{-nx})\ln x$ si $x>0$

$\simeq n x . \ln x$ si $x \to 0$

$\Downarrow$

$f_n'(x) \underset{x\to 0}{\simeq} \underbrace{n(\ln x + 1)}_{\text{local. sommable}}$

$$= \langle [f_n'], \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{[f_n]' = [f_n']}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle [f_n'], \varphi \rangle = -\langle [f_n], \varphi' \rangle$$

$\downarrow n \to \infty$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} -\langle [F], \varphi' \rangle = \langle [F]', \varphi \rangle$$

i.e. $$\boxed{\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\lim}} [f_n'] = [F]' = T_0 = \mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x}}$$

6. $T_0 \in \mathcal{S}'$

(a) $$i\mathcal{F}(T_0)' \overset{1.f}{=} \mathcal{F}((x\mapsto x)T_0) \overset{3.a}{=} \mathcal{F}([\theta])$$

(b) $$\mathcal{F}([\theta]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\delta - i\,\mathrm{vp}\frac{1}{k}\right)$$

on peut intégrer $$\mathcal{F}(T_0)' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathrm{vp}\frac{1}{k} + i\pi\delta\right)$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{F}(T_0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\ln|k| + i\pi[\theta]\right) + \text{cste}$$

choix naturel : $i\frac{\pi}{2}$

$[\theta] - \frac{1}{2} = [\text{sign}]$