

## EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Mercredi 22 Mai 2013

Durée de l'épreuve : **3 heures.***L'utilisation de documents, téléphones portables, ... est interdite. Calculatrices autorisées.*

## Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.Pensez aux **informations en annexe**.

## Barème indicatif :

Pb 1 : 12 pts. Pb 2 : 7 pts + bonus.

Présentation et clarté de la rédaction : 2 pts.

**Problème 1 : Dépôt d'un métal sur un substrat**

**I. Question de cours.**— On considère un système de particules *sans interaction*. On note  $|\ell\rangle$  les microétats du système. On note  $n_\lambda$  le facteur d'occupation d'un état individuel (à une particule)  $|\lambda\rangle$  d'énergie  $\epsilon_\lambda$ . La température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu$  sont fixés.

1/ Donner (sans démonstration) la probabilité (grand canonique) d'occupation d'un microétat  $|\ell\rangle$ .

2/ Montrer que la grande fonction de partition  $\Xi$  se factorise en terme des grandes fonctions de partition des états individuels  $\xi_\lambda$ .

3/ Si les particules sont des bosons, montrer que

$$\xi_\lambda^{\text{Bosons}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}} \quad (1)$$

4/ Dédurre l'expression du facteur d'occupation moyen  $\bar{n}_\lambda$  (pour les bosons).

5/ Donner l'expression de  $\pi_{n_\lambda}$ , la probabilité pour que l'état individuel soit occupé par  $n_\lambda$  bosons.

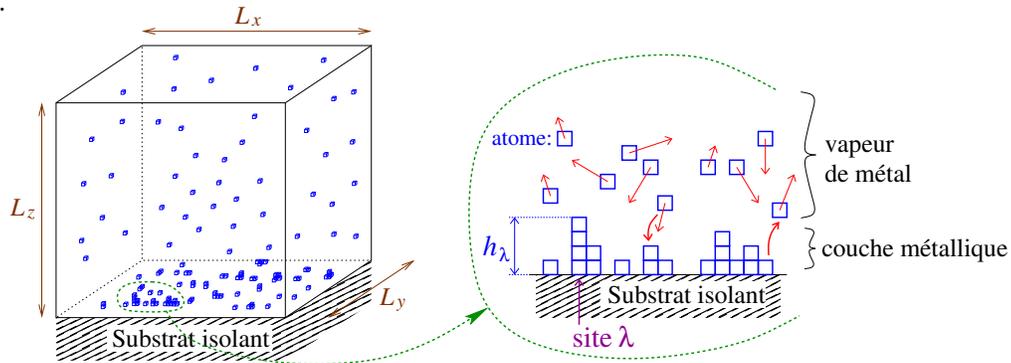


FIGURE 1 – Dépôt des atomes d'un gaz sur un substrat.

**II.** Nous étudions un modèle de dépôt d'atomes sur un substrat (figure 1) : les atomes (représentés par des petits cubes de côté  $a$ ) d'une vapeur métallique peuvent s'empiler sur les  $M = L_x L_y / a^2$  sites d'un substrat isolant, ou en être arrachés. Chaque site  $\lambda$  de la surface joue le rôle d'état individuel d'énergie  $\epsilon_\lambda = -\epsilon_0 < 0 \forall \lambda$  pouvant piéger  $h_\lambda \in \mathbb{N}$  atomes :  $h_\lambda$  représente aussi la hauteur de la colonne d'atomes empilés sur le site  $\lambda$ , en unités de  $a$ . Un atome accroché à la surface (à n'importe quel niveau de la pile) a donc une énergie  $-\epsilon_0 < 0$ , alors qu'un atome

dans le gaz a une énergie  $\epsilon_{\vec{p}} = \frac{1}{2m}\vec{p}^2$ , où  $m$  est la masse d'un atome. On fait l'hypothèse que les atomes empilés sur deux sites voisins n'interagissent pas entre eux.

### A. Propriétés des atomes déposés sur le substrat.

1/ Justifier que le gaz joue le rôle de réservoir d'atomes pour les atomes déposés sur le substrat.

On note  $T$  et  $\mu$  la température et le potentiel chimique du gaz.

2/ Calculer la grande fonction de partition  $\xi_\lambda$  associée à un site du substrat. Quelle condition doit satisfaire le potentiel chimique  $\mu$  ?

3/ Calculer la hauteur moyenne  $\bar{h}$  de la pile d'atomes sur un site.

4/ Donner l'expression de la probabilité  $\pi_0$  pour qu'un site du substrat soit vide.

**B. Gaz d'atomes.**— On traite la vapeur métallique jouant le rôle de réservoir comme un **gaz parfait classique** de  $N$  atomes, confiné dans un volume  $V = L_x L_y L_z$  et supposé maintenu à une température  $T$ .

1/ Exprimer la fonction de partition canonique  $Z$  du gaz en fonction de  $N$  et de  $z$ , la fonction de partition pour une particule.

2/ Calculer explicitement  $z$  en fonction de  $V$  et de la longueur thermique  $\Lambda_T$ , dont on rappellera l'expression en fonction de  $T$ .

3/ Dédurre la pression du gaz.

4/ Donner l'expression du potentiel chimique du gaz en fonction de  $T$ , de la densité moyenne  $n = N/V$  et de  $\Lambda_T$ .

### C. Étude de la couche métallique.

1/ Montrer que la hauteur moyenne de la couche métallique (calculée à la question A.4) peut s'écrire en fonction de la pression du gaz

$$\bar{h} = \frac{p}{p_G(T) - p}, \quad (2)$$

où  $p_G(T)$  est une fonction de la température dont on donnera l'expression. Comment la condition (sur le potentiel chimique) trouvée à la question A.2 se traduit-elle en terme de la pression ? Tracer *soigneusement*  $\bar{h}$  en fonction de  $p$  pour deux températures  $T$  et  $T'$  telles que  $T' > T$ . Justifier l'évolution de  $\bar{h}$  lorsque  $T \nearrow$  à  $p$  fixée, puis lorsque  $p \nearrow$  à  $T$  fixée.

2/ Exprimer la probabilité  $\pi_0$  pour qu'un site du substrat soit vide en fonction de  $\bar{h}$ .

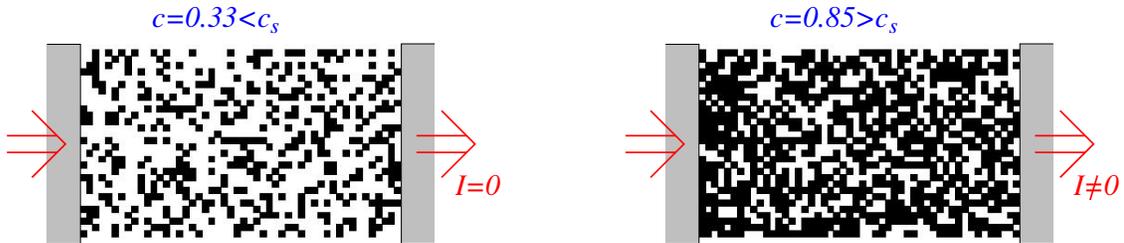


FIGURE 2 – Le courant électrique ne peut passer dans la couche métallique (vue du dessus) que si suffisamment de sites sont occupés, afin qu'un chemin connecte les deux bords.

3/ **Percolation.**— Lorsque la concentration  $c$  de sites occupés dépasse le seuil de percolation  $c > c_s \simeq 0.5927$ , il existe un amas macroscopique d'atomes connectant deux bords du substrat (si  $c < c_s$ , le substrat est couvert d'amas de dimensions microscopiques, non connectés). À quelle condition sur la pression, la couche métallique peut-elle conduire du courant électrique ? Quelle est la valeur de l'épaisseur moyenne  $\bar{h}$  correspondant au seuil de percolation ? Commenter.

## Problème 2 : Thermodynamique d'une corde vibrante

Nous étudions la thermodynamique d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités (figure 3). Commençons par exprimer l'énergie de la corde caractérisée par une déformation  $y(x)$ . L'énergie élastique d'un segment est proportionnelle à son élongation : la contribution du segment de longueur initiale  $\delta x$  est  $\delta E_p = f [\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} - \delta x] \simeq \frac{f\delta x}{2} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$ , où  $f$  est la tension de la corde. L'énergie cinétique du segment est  $\delta E_c = \frac{\mu\delta x}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$  où  $\mu$  est la masse linéique. En sommant ces contributions, on obtient l'énergie :  $E[y(x, t)] = \frac{1}{2} \int_0^L dx [\mu \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\right)^2 + f \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2]$ .

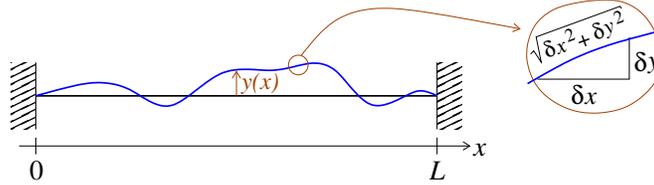


FIGURE 3 – Corde vibrante fixée entre deux points.

**A. Modes propres.** – Le choix de conditions aux limites de Dirichlet (corde fixée aux extrémités) suggère de décomposer le déplacement en série de Fourier

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \quad (3)$$

On peut ainsi écrire l'énergie (l'hamiltonien) en fonction des coordonnées normales :

$$H[\{y_k, p_k\}] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\mu} p_k^2 + \frac{1}{2} \mu \omega_k^2 y_k^2 \right] \quad (4)$$

où  $p_k$  est le moment conjugué à  $y_k$  (l'impulsion). Le spectre de fréquences propres de vibration est

$$\omega_k = k \frac{\pi c}{L} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } c = \sqrt{f/\mu}. \quad (5)$$

1/ Que représente  $c$  et quelle est sa dimension ?

2/ **Densité de modes.** – Montrer que, dans l'approximation d'un spectre de vibration continu, la densité de modes

$$\rho(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(\omega - \omega_k) \quad (6)$$

est constante, notée  $\rho_0$ .

Indication : on rappelle que l'approximation semiclassique (d'un spectre continu) correspond à traiter les indices discrets comme des variables continues, i.e.  $\sum_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \int_0^{\infty} dk$ .

**B. Propriétés thermodynamiques.** – On étudie dans cette partie l'énergie de la corde, supposée en contact avec un thermostat qui fixe sa température  $T$ .

**Quantification des modes de déplacement.** – On traite chaque mode de vibration quantiquement. On rappelle que l'énergie stockée dans le mode de pulsation  $\omega_k$  est quantifiée comme

$$\epsilon_n^{(k)} = \hbar \omega_k \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

1/ Calculer la fonction de partition canonique  $z_k$  associée à ce mode.

2/ Déduire l'énergie moyenne canonique  $\overline{\epsilon^{(k)}}$  du mode de pulsation  $\omega_k$ . Que vaut  $\overline{\epsilon^{(k)}}$  dans la limite  $T \rightarrow 0$  ?

3/ Exprimer l'énergie d'excitation de la corde,  $\overline{E}(T) - \overline{E}(0)$ , comme une somme sur les modes. Montrer que l'énergie d'excitation par unité de longueur est donnée par

$$\mathcal{E}_{\text{ex}}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{E}(T) - \overline{E}(0)}{L} = \alpha \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad (8)$$

où l'on précisera l'expression de la constante  $\alpha$ . Calculer explicitement  $\mathcal{E}_{\text{ex}}(T)$ , en fonction de  $c$ ,  $T$  et des constantes fondamentales.

4/ Déduire la chaleur spécifique par unité de longueur,  $\mathcal{C}(T) = \frac{\partial}{\partial T} \mathcal{E}_{\text{ex}}(T)$ .

5/ (DIFFICILE  $\Rightarrow$  BONUS) Le traitement quantique nous a permis d'introduire une coupure dans la sommation sur les énergies des modes ( $\mathcal{E}_{\text{ex}}(T)$  ne fait intervenir que les modes tels que  $\beta\hbar\omega_k \lesssim 1$ ). Pensez-vous que la mécanique quantique fournit en pratique la bonne échelle de coupure ?

**C. Déplacement.** – Dans cette partie on se place dans un **régime classique**.

1/ En utilisant le théorème d'équipartition, calculer  $\overline{y_k^2}$  en fonction de  $k_B T$ ,  $\mu$  et  $\omega_k$ .

2/ Un microétat correspond à la donnée des  $\{y_k, p_k\}$ . Quelle est la probabilité (canonique) d'occupation d'un microétat ? Justifier que la moyenne canonique du produit de deux coordonnées normales est  $\overline{y_k y_{k'}} = \delta_{k,k'} \overline{y_k^2}$ .

3/ Déduire une expression de  $\overline{y(x)^2}$  sous la forme d'une série (portant sur les contributions des modes propres). Montrer que

$$\overline{y(x)^2} = \frac{k_B T}{f} x \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (9)$$

Tracer soigneusement  $\overline{y(x)^2}$  en fonction de  $x$ .

4/ **A.N.** : On considère une corde de longueur  $L = 1$  m pour une tension  $f = 10$  N. Calculer le déplacement typique dû aux fluctuations thermiques au milieu de la corde ( $x = L/2$ ) pour une température de  $T = 300$  K. Commentaire ?

## Annexe

- $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$  pour  $\text{Re}(a) \geq 0$ .
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi u)}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{2} u(1-u)$  pour  $u \in [0, 1]$ .
- $\int_0^\infty dx \frac{x^{\eta-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\eta) \zeta(\eta)$  où  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\zeta(3) \simeq 1.202$ ,  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ , etc
- Fonction Gamma :  $\Gamma(n+1) = n!$
- Formule de Stirling  $\ln n! \approx n \ln n - n$ .
- Constantes fondamentales :  $\hbar = 10^{-34}$  J.s et  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J.K<sup>-1</sup>.
- Égalité fondamentale de la *thermodynamique* :  $dE = T dS - p dV + \mu dN$ .

Solutions disponibles sur la page du cours : rubrique « Enseignements » de  
[http://lptms.u-psud.fr/christophe\\_texier/](http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/)

Problème 1: déposition d'un métal sur un substrat

I. Question de cours. 1)  $\ell$ : microétat.  $\rightarrow P_e^G = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E_e - \mu N_e)}$   
 énergie du microétat / nb de particules dans le microétat

fact de grand partition  
 $\Xi = \sum_e e^{-\beta(E_e - \mu N_e)}$

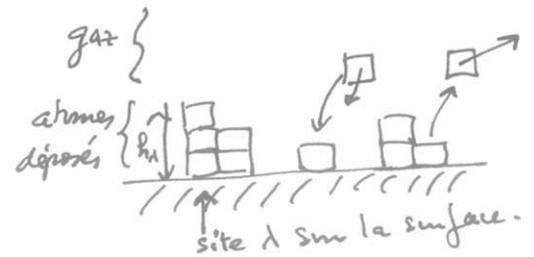
2)  $\ell \equiv \{n_\lambda\}$   $\rightarrow$   $\begin{cases} E_e = \sum_\lambda n_\lambda \epsilon_\lambda \\ N_e = \sum_\lambda n_\lambda \end{cases} \Rightarrow \Xi = \sum_{\{n_\lambda\}} e^{-\sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = \prod_\lambda \sum_{n_\lambda} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$   
 em. des fact. d'occupation des états individuels

3) Bosons  $\Rightarrow n_\lambda \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n_\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}}$   
 $\sum_{n_\lambda}$  est une série géométrique avec  $\epsilon_\lambda - \mu > 0 (\forall \lambda)$

4) occupation moyenne de l'état individuel:  $\bar{n}_\lambda = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_\lambda} \ln \Xi_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} - 1}$

5)  $\Pi(n_\lambda) = \frac{1}{\Xi_\lambda} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$   
 distrib. de  $n_\lambda$

II. Déposition d'atomes ~~mités~~ sur un substrat.



A. Atomes déposés  
 1) # d'atomes à la surface  $\propto L^2$   
 # dans le gaz  $\propto L^3$   
 Effet de volume  $\gg$  Effet de surface.

2) un site = un état individuel pouvant piéger  $n_\lambda \in \mathbb{N}$  atomes  $\Rightarrow$  identique au cas des bosons.  
 avec la condition  $\boxed{\mu < -\epsilon_0}$

$\Xi_\lambda = \frac{1}{1 - e^{\beta(\epsilon_0 + \mu)}}$  (est indép. de  $\lambda$ )  
 $\epsilon_\lambda = -\epsilon_0 \forall \lambda$

3)  $\Pi_0 = 1/\Xi_\lambda = 1 - e^{\beta(\epsilon_0 + \mu)}$  (cf. I.5)

4)  $\bar{h} = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_0 + \mu)} - 1}$  (cf. I.4)

B. Gaz 1) Traitement classique  $\Rightarrow Z = \frac{1}{N!} \int d^3r \int d^3p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}$  (Maxwell-Boltzmann)  
 $Z = \frac{1}{N!} \int d^3r \int d^3p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \frac{V}{\Lambda_T^3}$  avec  $\Lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m}}$

3)  $p = -\frac{\partial F}{\partial V} = k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{N k_B T}{V}$

4) Potentiel chimique:  $\mu = \frac{\partial F}{\partial N} \Rightarrow F = -k_B T \ln \frac{Z^N}{N!} \xrightarrow{\text{Stirling}} N k_B T (\ln \frac{N}{Z} - 1)$   
 $\mu = k_B T \ln \frac{N}{Z} = k_B T \ln \left( \frac{N}{V} \Lambda_T^3 \right)$

$\boxed{\mu = k_B T \ln(n \Lambda_T^3)}$  où  $n = N/V$

ce qu'on peut écrire  $e^{\beta \mu} = n \Lambda_T^3$

c. 1/ Le paramètre  $\mu$  de la partie A est le potentiel chimique du gaz étudié dans la partie B.

$$\Rightarrow \bar{h} = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_0 + \mu)} - 1} = \frac{1}{\frac{e^{-\beta\epsilon_0}}{n\Lambda_T^3} - 1}$$

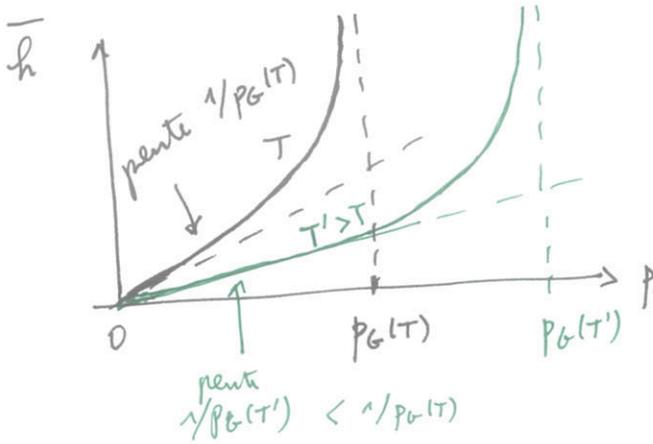
pour faire apparaître la pression du gaz on utilise  $p = n k_B T$

$$\bar{h} = \frac{p}{\frac{k_B T}{\Lambda_T^3} e^{-\beta\epsilon_0} - p} = \frac{p}{p_G(T) - p}$$

avec  $p_G(T) = \frac{k_B T}{\Lambda_T^3} e^{-\frac{\epsilon_0}{k_B T}}$

$p_G(T) \propto T^{5/2} e^{-\epsilon_0/k_B T}$  fct croissante de T

À la question A-2 on a vu que  $\mu < -\epsilon_0$   
 $\Rightarrow e^{\beta\mu} < e^{-\beta\epsilon_0}$  i.e.  $p < p_G(T)$



\*  $\bar{a}$  p fixée  
 $\bar{h} \downarrow$  si  $T \uparrow$ ; l'agitation thermique augmente  $\Rightarrow$  l'énergie disponible pour dénocher les atomes augmente

\*  $\bar{a}$  T fixée  
 $\bar{h} \uparrow$  si  $p \uparrow$  (et  $\mu \downarrow$ )

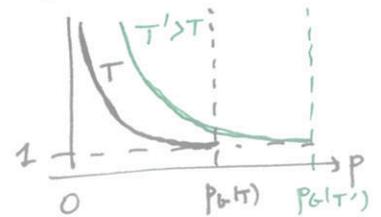
2/ Proba pour qu'un site soit vide:

$$\pi_0 = 1 - e^{\beta(\epsilon_0 + \mu)} = 1 - \frac{p}{p_G(T)} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1 + \bar{h}}$$

3/ Fluctuations:

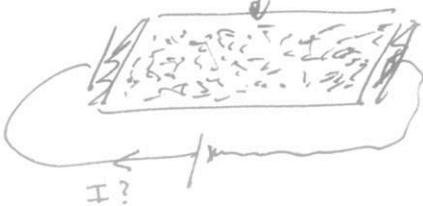
$$\text{Var}(h_x) = \left(\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p}\right)^2 \ln \xi_\lambda = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial p} \bar{h} = \frac{\bar{h}}{1 + \bar{h}} = \frac{p_G/p}{(p_G/p - 1)^2} = \frac{p_G p}{(p_G - p)^2}$$

fluctuations relatives:  $\frac{\sqrt{\text{Var}(h_x)}}{\bar{h}} = \sqrt{\frac{p_G(T)}{p}}$



couche métallique.

4/



si la concentration de sites occupés dépasse le seuil de percolation  $c > c_s$ , il existe un chemin (d'atomes "en contact") allant d'un bord à l'autre (après proba = 1 à la limite thermodynamique)  $\Rightarrow$  le courant passe.

$c = 1 - \pi_0 \Rightarrow$  la condition  $c > c_s$  devient  $1 - \pi_0 = \frac{\bar{h}}{1 + \bar{h}} > c_s$

$\frac{\bar{h}}{1 + \bar{h}} = \frac{1}{1 + \bar{h} + 1} = \frac{p}{p_G} \Rightarrow$  la condition est  $\frac{p}{p_G(T)} > c_s \approx 0.59$  (plus la pression est élevée, plus la couche est épaisse)

Elle peut aussi s'écrire  $\bar{h} > \frac{c_s}{1 - c_s} \approx 1.45$

À peine deux couches d'atomes sont suffisantes pour former une couche conductrice!

## Problème 2: Thermodynamique d'une corde vibrante



$$E[y] = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[ \underbrace{\mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2}_{\text{terme cinétique}} + \underbrace{f \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}_{\text{terme élastique}} \right]$$

### A. Modes propres.

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \Rightarrow y(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$1) \dot{y} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_k \dot{y}_k \sin \frac{k\pi x}{L} \Rightarrow \int_0^L dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{2}{L} \sum_k \sum_{k'} \dot{y}_k \dot{y}_{k'} \int_0^L dx \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{k'\pi x}{L}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{y}_k^2 \quad \left( \text{Parseval-Plancherel} \right)$$

$$\int_0^L dx \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{2}{L} \sum_k \sum_{k'} \frac{\pi k}{L} \frac{\pi k'}{L} y_k y_{k'} \int_0^L dx \cos \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k'\pi x}{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\pi k}{L} \right)^2 y_k^2$$

Énergie:  $E[y] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \mu \dot{y}_k^2 + f \left( \frac{\pi k}{L} \right)^2 y_k^2 \right]$  : les coordonnées  $y_k$  sont décomplexées

2) moment conjugué:  $p_k = \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_k} = \mu \dot{y}_k \Rightarrow \frac{\mu}{2} \dot{y}_k^2 = \frac{p_k^2}{2\mu}$

Hamiltonien:  $H[\{y_k, p_k\}] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{p_k^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega_k^2 y_k^2 \right]$

$\omega_k = \sqrt{\frac{f}{\mu}} \frac{\pi k}{L}$

$k_k = \frac{\pi k}{L}$  est un vecteur d'onde (quantifié classiquement)  
 $\Rightarrow \omega_k = k_k c$  est la relation de dispersion  
 où  $c = \sqrt{f/\mu}$  est la vitesse des ondes de déformation (vitesse du son)

Anal. Dim.:  $\left[ \sqrt{\frac{f}{\mu}} \right] = \left[ \frac{\text{Force}}{M/L} \right]^{1/2} = \left( \frac{MLT^{-2}}{M/L} \right)^{1/2} = \frac{L}{T} = [\text{vitesse}]$  OK

3) Densité de modes.  $g(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(\omega - \omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{\pi c}{L} k\right)$   
 Si  $L \rightarrow \infty$  le spectre est très dense  $\Rightarrow g(\omega) \approx \int_0^{\infty} dk \delta\left(\omega - \frac{\pi c}{L} k\right) = \frac{L}{\pi c} = \rho_0$   
 avec  $\omega > 0$

### B. Propriétés thermodynamiques.

La ~~corde~~ température de la corde est fixée

1) Fonction de partition d'un mode:  $Z_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_k (n + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \text{sh} \frac{\beta \hbar \omega_k}{2}}$

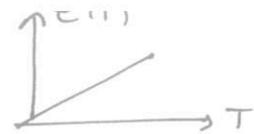
2) Énergie moyenne du mode:  $\bar{E}(k) = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_k = \frac{\hbar \omega_k}{2} \coth \frac{\beta \hbar \omega_k}{2} = \frac{\hbar \omega_k}{2} \left( \bar{n}_{\omega_k} + \frac{1}{2} \right)$   
 où  $\bar{n}_{\omega} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$  (Bose-Einstein)

### 3) Énergie d'excitation:

$$\bar{E}(T) - \bar{E}(0) = \sum_k \left( \bar{E}^{(k)} - \frac{\hbar \omega_k}{2} \right) = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} \bar{n}_{\omega_k} = \int_0^{\infty} d\omega g(\omega) \frac{\hbar \omega}{2} \bar{n}_{\omega}$$

$$E_{ex}(T) = \left( \frac{\dots}{L} \right) = \frac{\hbar}{\pi c} \times \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = \frac{\hbar}{\pi c} \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^2 \frac{\Gamma(2) \zeta(2)}{\frac{\pi^2}{6}} \Rightarrow \boxed{E_{ex}(T) = \frac{\pi}{6} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c}}$$

4) Chaleur spécifique:  $e(T) = \frac{\partial \varepsilon_a(T)}{\partial T} = \frac{\pi}{3} k_B \frac{k_B T}{\hbar c}$



5) Rg: ici on a traité l'énergie de vibration quantiquement pour introduire une coupure ( $\omega \lesssim \frac{k_B T}{\hbar}$ ) dans la somme sur les modes.

En pratique cela n'est pas très physique! La coupure vient plutôt des limites du modèle (une énergie quadratique  $\propto (\frac{\partial y}{\partial x})^2$ ).

C. Déplacement  
On revient à un traitement classique

1)  $H = \dots + \frac{1}{2} \mu \omega_k^2 y_k^2 + \dots \Rightarrow \frac{1}{2} \mu \omega_k^2 \overline{y_k^2} = \frac{1}{2} k_B T$  (th. d'équipartition)  
ou  $\overline{y_k^2} = \frac{k_B T}{\mu \omega_k^2} \propto 1/k^2$  décroît si  $k \rightarrow \infty$

2) Un microétat:  $\{y_k, p_k\}$   
 $P^c(\{y_k, p_k\}) \propto e^{-\beta H(\{y_k, p_k\})}$  (intégrales séparables)  
 $\overline{y_k y_{k'}} = \frac{\int \prod_k (dy_k dp_k) y_k y_{k'} e^{-\beta H(\dots)}}{\int \prod_k (dy_k dp_k) e^{-\beta H(\dots)}}$   
 $\xrightarrow{k \neq k'} \overline{y_k} \overline{y_{k'}} = 0$   
 $\xrightarrow{k = k'} \overline{y_k^2} = \frac{k_B T}{\mu \omega_k^2}$

3)  $\overline{y(x)^2} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k'=1}^{\infty} \overline{y_k y_{k'}} \frac{\sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi k' x}{L}}{(\frac{\pi k}{L})^2}$   
 $= \frac{2}{L} \frac{k_B T}{\mu c^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi k x}{L}}{(\frac{\pi k}{L})^2}$   
 $c = \sqrt{f/\mu}$

on utilise la formule  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \pi u}{(\pi n)^2} = \frac{1}{2} u(1-u)$  pour  $0 \leq u \leq 1$

$\Rightarrow \overline{y(x)^2} = \frac{2}{L} \frac{k_B T}{f} L^2 \frac{1}{2} \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L}) \Rightarrow \boxed{\overline{y(x)^2} = \frac{k_B T}{f} x(1 - \frac{x}{L})}$



les fluctuations de déplacement sont maximales au centre de la corde.

4) AN. si  $\begin{cases} L = 1 \text{ m} \\ f = 10 \text{ N } (\Leftrightarrow 1 \text{ kg}) \\ T = 300 \text{ K} \end{cases} \Rightarrow$

$\overline{y(L/2)^2} = \frac{k_B T}{f} \frac{L}{4}$   
 $\sqrt{\overline{y(L/2)^2}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1,4 \times 10^{-23} \times 300 \times 1}{10}} \approx 10^{-11} \text{ m}$   
 $\approx 0,1 \text{ \AA}$

C'est ridiculement faible!

Rg: les fluctuations thermiques d'une corde de piano sont complètement négligeables! Ouf!

