

## EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Jeudi 11 janvier 2018

*Durée de l'épreuve : 2 heures.**L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.***Recommandations :**Lisez attentivement l'énoncé et **rédigez** *succinctement* et *clairement* votre réponse.Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.Pensez aux **informations en annexe**.**Question de cours** ( $\sim 10\text{min}$ )**1/** Rappeler l'énoncé du postulat fondamental de la physique statistique.**2/** Soit  $\{|\ell\rangle\}$  l'ensemble des microétats (les états stationnaires dans le cas quantique) ; donner les probabilités d'occupation  $P_\ell^*$  des microétats si le système est isolé et à l'équilibre.**3/** Rappeler la formule de Gibbs-Shannon pour l'entropie statistique  $S(\{P_\ell\})$  dans la situation *générale*. Appliquer la formule au cas d'un système isolé et retrouver l'expression de l'entropie microcanonique  $S^*$ .**Problème : force entropique** ( $\sim 1\text{h}$ )Nous étudions une grosse molécule en présence d'atomes plus petits (figure). Nous montrons que lorsque la molécule s'approche d'une paroi du contenant, elle subit une force résultant d'un effet purement entropique. Nous décrivons les particules **classiquement**.**A. Gaz de particules ponctuelles.**— Nous considérons d'abord le gaz d'atomes, seul (en l'absence de la grosse molécule). Dans cette première partie **A**, les  $N$  atomes seront modélisés comme des particules **ponctuelles** de masse  $m$ . Nous supposons le gaz **isolé**, dans une enceinte de volume  $V$ .**1/** Décrire les microétats du système. Exprimer le nombre  $\Phi_N(E)$  de microétats d'énergies inférieures à  $E$  comme une intégrale multiple.**2/** Quelle est la relation entre  $\Phi_N(E)$  et le nombre d'états accessibles  $\Omega_N(E, V)$  (on supposera l'énergie définie à  $\delta E$  près) ? Montrer que  $\Omega_N(E, V) \propto V^N E^\eta$  (le préfacteur n'est pas demandé) et donner la valeur de l'exposant  $\eta$ .**B. Gaz de sphères dures.**— Dans cette seconde partie, nous considérons toujours le gaz d'atomes, que nous décrivons maintenant comme un gaz de sphères dures, i.e. des petites **sphères** de diamètre  $a$  **impénétrables**.**1/ Deux atomes.**— Un atome seul a un volume accessible  $V$ . Quel est le volume disponible pour un second atome (cf. figure) ?

2/ En continuant le raisonnement (i.e. en introduisant les atomes par la pensée un par un), justifier que le nombre de microétats accessibles pour le gaz de  $N$  atomes est de la forme

$$\Omega_N(E, V) = C_N(E) \prod_{n=1}^N [V - 2(n-1)b] \quad (1)$$

où l'on donnera l'expression du volume  $b$  en fonction du diamètre  $a$  des sphères. Quelle est la dépendance de  $C_N(E)$  dans l'énergie (sans calcul supplémentaire) ?

3/ Montrer que, dans la limite  $N \gg 1$  et  $V \gg Nb$ , on a  $\prod_{n=0}^{N-1} (V - 2nb) \simeq V_{\text{eff}}^N$  où  $V_{\text{eff}} = V - Nb$  est le volume effectif.

Indication : considérer  $\sum_{n=0}^{N-1} \ln(V - 2nb) \simeq \int_0^N dn \ln(V - 2nb)$  et tracer  $\ln(V - 2nb)$  pour  $n \in [0, N]$ .

4/ **Température.** – Rappeler la définition de la température microcanonique  $T^*$  et la calculer. Comparer avec le gaz parfait de particules ponctuelles (partie **A**).

5/ **Équation d'état.** – Rappeler la définition de la pression microcanonique  $p^*$ . Dédire l'équation d'état. Comparer avec le gaz de particules ponctuelles. Tracer la pression en fonction de la densité moyenne  $n = N/V$ . Interpréter la divergence de la pression pour une valeur critique  $n_c$  de la densité, que l'on précisera.

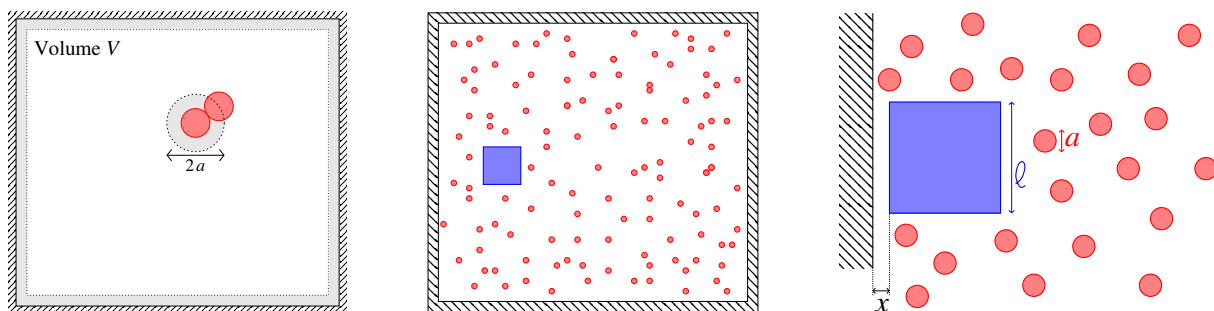


FIGURE 1 : À gauche : *volume d'exclusion dû à un seul atome*. Au centre et à droite : *Une grosse « molécule » (le gros cube) de volume  $v = \ell^3$  se trouve au milieu d'atomes plus petits (les petites boules) de volume  $(4\pi/3)(a/2)^3$ .*

**C. Force entropique.** – Dans cette dernière partie, nous étudions la situation où la grosse molécule de volume  $v \gg b$  est en présence des  $N$  atomes (figure du milieu). Pour simplifier la discussion, nous considérons que la grosse molécule a une forme cubique :  $v = \ell^3$  (avec  $\ell \gg a$ ).

1/ On suppose la grosse molécule **immobile**, à distance  $x$  de la paroi (cf. figure). Quel est le nouveau volume effectif  $\tilde{V}_{\text{eff}}$  accessible par atome (on distinguera les cas  $0 < x < a$  et  $x > a$ ) ?

2/ Dédire l'expression de l'entropie microcanonique *des atomes* en fonction de  $x$ , que nous notons  $S^*(x)$ . Tracer l'entropie  $S^*(x)$  en fonction de  $x$  en supposant que  $V_{\text{eff}} = V - Nb \gg v$ ,  $x \ell^2$ . En utilisant un théorème vu en cours, déduire si la grosse molécule est attirée ou repoussée par la paroi. Interpréter physiquement en termes microscopiques.

3/ Nous définissons la « force entropique » comme

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} T^* \frac{\partial S^*(x)}{\partial x}. \quad (2)$$

Tracer  $f(x)$  en fonction de  $x$ . Discuter le signe de la force. Pour  $x < a$ , donner une expression simple de la force  $f(x)$  en fonction de  $p^*$  de la question **B.5** (on supposera que  $V_{\text{eff}} \gg v$ ,  $x \ell^2$ ).

## Exercice : Oscillateurs harmoniques quantiques 1D ( $\sim 50\text{min}$ )

On considère  $N$  oscillateurs harmoniques indépendants et identiques décrits dans le cadre de la mécanique quantique. Le système est supposé **isolé**. On rappelle que les états stationnaires  $|n\rangle$  pour **un** oscillateur sont repérés par un entier  $n \in \mathbb{N}$  et ont des énergies  $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ .

1/ Quelles sont les microétats du système de  $N$  oscillateurs ?

2/ Si le système a une énergie  $E_M = \hbar\omega(M + N/2)$ , justifier que le nombre de microétats accessibles est  $\Omega(M, N) = (M + N - 1)! / [M!(N - 1)!]$ .

3/ Dédurre l'entropie microcanonique  $S^*$ . Simplifier l'expression en supposant  $N \gg 1$  et  $M \gg 1$  (mais attention : on ne supposera **pas**  $M \gg N$ , ce qui correspondrait à une approximation classique).

4/ Calculer la température microcanonique  $T^*$ . Montrer que  $1 + N/M = \exp\{\hbar\omega/(k_B T^*)\}$ . Tracer *soigneusement*  $T^*$  en fonction de l'énergie d'excitation  $\Delta E = M\hbar\omega$  (on identifiera un régime « classique »,  $\Delta E \gg N\hbar\omega$ , et un régime « quantique »,  $\Delta E \ll N\hbar\omega$ ).

5/ On note  $P(n)$  la probabilité pour qu'un des oscillateurs soit dans son  $n$ ème état excité  $|n\rangle$ . Justifier  $P(n) = \Omega(M - n, N - 1) / \Omega(M, N)$ . Simplifier l'expression en supposant que  $N$  et  $M \gg n$  (on utilisera  $(N + a)! / N! \simeq N^a$  pour  $N \gg a$ ). Vérifier la normalisation.

6/ **Distribution de Bose-Einstein.**— On étudie dans quel état se trouve en moyenne un des  $N$  oscillateurs.

a) Exprimer  $\bar{n}$  en fonction de  $P(n)$ .

b) Pour calculer la somme on utilise le truc  $\sum_{n=1}^{\infty} n q^n = q \frac{d}{dq} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ . Dédurre  $\bar{n}$ . Le résultat n'était-il pas attendu ?

c) Exprimer l'occupation moyenne des oscillateurs  $\bar{n}$  en fonction de la température microcanonique (utiliser le résultat de la question 4). Tracer *soigneusement*  $\bar{n}$  en fonction de  $T^*$ .

### Annexe

- Formule de Stirling :  $\ln n! \simeq n \ln n - n$  si  $n \gg 1$ .
- Égalité fondamentale de la *thermodynamique* :  $dE = T dS - p dV + \mu dN$ .