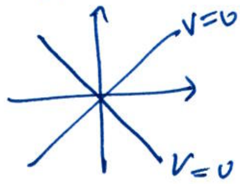
Chaos et ergodicité

oscillateur 2D quartique :

$$H = p_x^2 + p_y^2 + x^4 + 2\lambda x^2 y^2 + y^4$$

si $\lambda = -1 \Rightarrow V(x,y) = (x^2 - y^2)^2 \Rightarrow$ le confinement disparaît dans les deux direction $x = \pm y$

$\lambda = -1$



Intégrabilité au sens de Liouville :

D degrés de lib.
le système est intégrable s'il existe D ctes du mvt.

ex : champ de force central dans $\mathbb{R}^3 \Rightarrow D = 3$

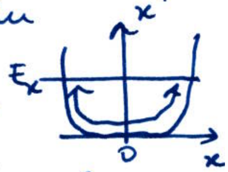
$$\underbrace{E,\ \vec{\ell}^2 \text{ et } \ell_z}_{3 \text{ ctes du mvt.}}$$

ici : $\lambda = 0 \quad H = \underbrace{H_x}_{p_x^2 + x^4} + \underbrace{H_y}_{p_y^2 + y^4}$

$\downarrow$

2 oscillateurs 1D découplés

$D = 2$
H_x et H_y sont deux ctes du mvt.



le syst. est "intégrable".
ici : le mouvement combine les mouvements oscillatoires des deux oscillateurs quartiques 1D

Implication de l'intégrabilité :

$C_1, \ldots, C_D$ ctes du mvt.
↘ fcts des 2D variables dynamiques.

~~D=2 esp. des phases ⇒ dim = 4~~
~~H_x = cste ⇒ traj. ∈ hypersurf. de dim = 3~~
~~H_y = cste ⇒ ——— dim = 3~~
~~intersection ... variété de dim = 2~~

∃ une transf. canonique ⇒

$\{q_1, \ldots, q_D, p_1, \ldots, p_D\} \longrightarrow$ D couples action-angle (I_n, θ_n)

l'hamiltonien est transformé comme

$$H \to \underbrace{\tilde{H}(\{\theta_n I_n\})}_{\text{angle-action}} = H(\{q_n, p_n\}) \Rightarrow \underline{\text{indép. des } \theta_n} \quad !$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_n = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial I_n} = \omega_n(I_1, \dots, I_D) \\ \dot{I}_n = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\theta_n(t) = \omega_n \cdot t + \theta_n(0)}$$

mouvement sur un <u>"tore invariant"</u>

dimension de cette variété :

$$\underbrace{2D}_{\text{dim esp. des phases}} - D = D$$

$= \quad$ ici $\Rightarrow$ 2

<u>Section de Poincaré</u>.

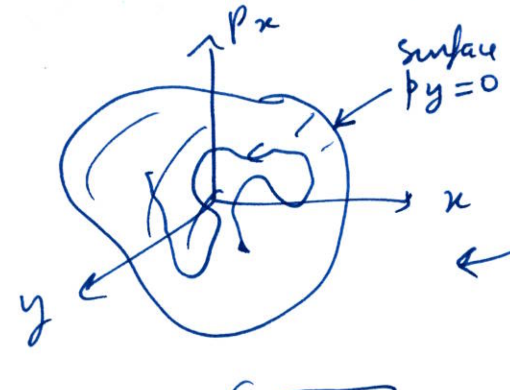
→ la trajectoire évolue dans un esp. de dim = 4

$$H = p_x^2 + p_y^2 + V(x,y) \quad \text{où } V(x,y) = x^4 + 2\lambda x^2 y^2 + y^4$$

$H(\vec{r}, \vec{p}) = E \Rightarrow$ définit un volume (variété de dim. = 3)

$$p_x^2 + V(x,y) = E - p_y^2 \Rightarrow \underbrace{0 \le p_x^2 + V(x,y) \le E}$$

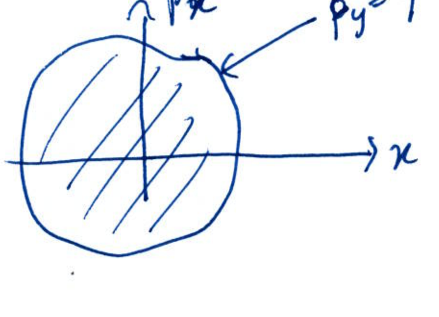
volume dans l'espace de (x, p_x, y)



les trajectoires d'énergie E sont <u>à l'intérieur</u> de ce volume.

la section de Poincaré $\boxed{y=0}$

⇓



les trajectoires intersectent cette surface.

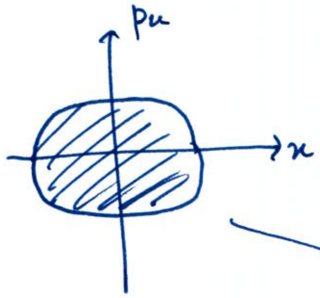
$\underline{\lambda = 0}$ il y a une autre cote du mvt :

$$\left\{\begin{array}{lll} H(\vec{x},\vec{p}) = E & \Rightarrow \text{variété de dim } 3 \\ p_x^2 + x^4 = \text{cste} & \Rightarrow \text{——— dim } 3 \end{array}\right\} \text{intersection est une surface.}$$

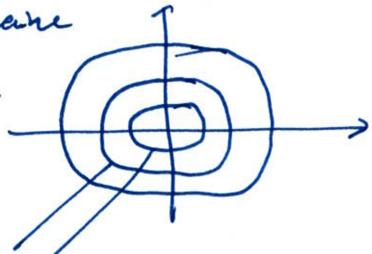
section de Poincaré $\Rightarrow$ intersection de deux surfaces $\Rightarrow$ c'est une ligne.

$\boxed{y=0}$

$p_x^2 + x^4 = E - p_y^2 \geq 0$



$\rightarrow$ $p_x^2 + x^2 = E_x = \text{cste}$
$\Downarrow$
définit des lignes dans ce domaine



différentes valeurs de E_x

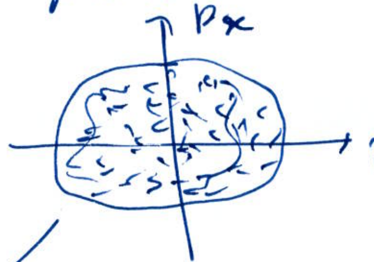
Cas intégrable

le tore invariant est une variété de dim $= D = 2$
$\Rightarrow$ l'intersection avec le plan $y=0$ est une ligne.

$\underline{\lambda < 0}$ $\Rightarrow$ pas d'autre cote du mvt.

si λ est "petit" $\Rightarrow$ il y a encore trace des tores invariants (théorème KAM)

si λ est "grand" $\Rightarrow$ la trajectoire couvre assez uniformément la surface autorisée



$\lambda = -8$

la trajectoire explore une variété de dim $= 2D - 1 = 3$
$\Rightarrow$ section de poincaré est une surface.

KAM = Kolmogorov, Arnold & Moser (résistance des tores invariants sous l'effet des perturbations)