Marche aléatoire et mouvement brownien

1 Marche aléatoire sur un réseau

On considère une marche aléatoire sur un réseau hypercubique de dimension d. On note $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\cdots,d}$ les vecteurs de base du réseau. Le marcheur se trouve sur le site $\vec{0}$ au temps $t=0$. À chaque intervalle de temps ($\Delta t = 1$) il saute sur un des sites plus proches voisins avec equiprobabilité. Les déplacements successifs sont indépendants (hypothèse markovienne). On note $P_t(\vec{x})$ la probabilité de se trouver sur le site $\vec{x}$ au temps t ($\vec{x}$ et t sont discrétisés).

A. Propagateur et probabilité de retour à l'origine

1/ Équation maîtresse.– Donner l'équation maîtresse à laquelle obéit $P_t(\vec{x})$.

2/ Montrer que la solution de l'équation maîtresse est

$$P_t(\vec{x}) = \int_{\mathrm{ZdB}} \frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{2\pi} \left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \cos k_i\right)^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \,, \tag{1}$$

où l'intégrale porte sur les vecteurs $\vec{k}$ de la zone de Brillouin.

3/ Fonction de Green.– Nous verrons plus tard qu'il est commode de considérer la fonction génératrice :

$$G(\vec{x},\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \, P_t(\vec{x}) \tag{2}$$

Donner l'expression de sa transformée de Fourier : $\tilde{G}(\vec{k},\lambda) = \sum_{\vec{x}} G(\vec{x},\lambda)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$.

4/ De la marche aléatoire au mouvement brownien.– On considère la limite continue des grands temps ($t\to\infty$ et $\vec{k}\to 0$).

a/ Montrer que

$$P_t(\vec{x}) \simeq \frac{1}{(4\pi D t)^{d/2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\vec{x}^{\,2}}{4Dt}} \tag{3}$$

Exprimer la constante de diffusion D lorsque le réseau a un pas a et que les intervalles de temps entre les sauts sont Δt.

b/ Calculer la distance quadratique moyenne parcourue après un temps t.

5/ Exprimer la probabilité conditionnelle $P(\vec{x},t|\vec{0},0) \equiv P_t(\vec{x})$ sous la forme d'une intégrale de chemin (lorsque $D = 1/2$).

6/ Discuter la condition de normalisation de $P(\vec{x},t|\vec{x}_0,0)$.

B. Probabilité de premier retour à l'origine

1/ On note Q_t la probabilité pour que le marcheur revienne en $\vec{x} = 0$ pour la première fois au temps t (on remarque que $Q_0 = 0$). Montrer qu'elle obéit à "l'équation intégrale" :

$$P_t(\vec{0}) = \delta_{t,0} + \sum_{\tau=0}^{t} Q_{t-\tau}\, P_\tau(\vec{0}) \tag{4}$$

2/ En introduisant la fonction génératrice :

$$\tilde{Q}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t\, Q_t \tag{5}$$

Exprimer $\tilde{Q}(\lambda)$ en fonction de $G(\vec{0}, \lambda)$.

3/ Cas unidimensionnel.

a/ Calculer explicitement $G(0, \lambda)$ pour $d = 1$ à partir du résultat **A.3** (utiliser l'annexe). Déduire l'expression de $\tilde{Q}(\lambda)$.

b/ On souhaite étudier le comportement de Q_t pour $t \to \infty$.
méthode 1 : En analysant le développement de $\tilde{Q}(\lambda)$ en puissances de λ, montrer que $Q_2 = 1/2$ et $Q_t = \frac{(t-3)!!}{2^{t/2}(t/2)!}$ pour $t > 2$. Déduire la forme asymptotique $Q_t \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{t^{3/2}}$.
méthode 2 : Utiliser la similitude entre la fonction génératrice et une transformation de Laplace (ce qui est valable aux grands temps, *i.e.* pour $\lambda \to 1^-$). En écrivant

$$\tilde{Q}(\mathrm{e}^{-p}) \simeq \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, Q_t\, \mathrm{e}^{-pt} \qquad \text{pour } p \to 0^+ \tag{6}$$

par une transformée de Laplace inverse retrouver le résultat de la méthode 1.

4/ Cas bidimensionnel.– Calculer $G(\vec{0}, \lambda)$ (*cf.* annexe). En déduire le comportement de $\tilde{Q}(\mathrm{e}^{-p})$ pour $p \to 0^+$. Montrer alors que la transformée de Laplace inverse se comporte, aux grands temps, comme $Q_t \simeq \frac{2\pi}{t(\ln 8t)^2}$.

C. Récurrence

Dans cette dernière partie on s'intéresse aux propriétés de récurrence de la marche au hasard.

1/ Montrer que

$$G(\vec{0}, \lambda) = \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y}\, [I_0(y\lambda/d)]^d \tag{7}$$

où $I_0(z)$ est la fonction de Bessel modifiée (*cf.* annexe).

2/ Analyser la convergence de l'intégrale (7) pour $\lambda = 1$ en fonction de la dimension d.

3/ Donner l'expression de la probabilité de ne jamais revenir en $\vec{x} = \vec{0}$. En déduire le sens de

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{\infty} Q_t \tag{8}$$

À l'aide du résultat de la question **B.2** analyser Π en fonction de la dimension. (On pourra aussi analyser le comportement de Π pour pour $d \to \infty$ à l'aide de l'expression de $G(\vec{0}, \lambda)$ obtenue à la question **A.3**).

2 Fonctions de corrélation du mouvement brownien

Dans cet exercice on souhaite calculer la fonction de corrélation $C(\tau,\tau') \stackrel{\text{def}}{=} \langle x(\tau)x(\tau')\rangle$ lorsque $x(\tau)$ est un processus distribué avec la mesure de Wiener $\mathcal{D}x \exp -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2$. Nous allons considérer différents types de conditions aux limites.

1/ Processus de Wiener.– Un processus de Wiener est un mouvement brownien libre sur $\tau \in [0,t]$ fixé à une de ses extremités : $(x(\tau)\,, 0 \leqslant \tau \leqslant t |\, x(0) = 0)$. Écrire la fonction de corrélation à l'aide d'une intégrale de chemin, puis la calculer en utilisant le propagateur libre. Préciser la valeur de $C_W(\tau,\tau)$.

2/ Pont brownien.– Le pont brownien est un mouvement brownien libre contraint de revenir à son point de départ : $(x(\tau)\,, 0 \leqslant \tau \leqslant t |\, x(0) = x(t) = 0)$.

a/ Écrire la fonction de corrélation à l'aide d'une intégrale de chemin, puis la calculer.

b/ On peut calculer la fonction de corrélation d'une façon beaucoup plus simple en remarquant qu'un pont brownien $(x(\tau)\,, 0 \leqslant \tau \leqslant t |\, x(0) = x(t) = 0)$ peut s'écrire à l'aide d'un processus de Wiener $(W(\tau)\,, 0 \leqslant \tau \leqslant t |\, W(0) = 0)$ comme $x(\tau) = W(\tau) - \frac{\tau}{t}\, W(t)$.

Annexe :

- Des intégrales...

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \frac{1}{\mathrm{ch}\,\theta + \cos k} = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\theta} \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2a + \cos k_x + \cos k_y} = \frac{1}{\pi a}\,\mathrm{K}(1/a) \tag{10}$$

- Intégrale elliptique de 1ère espèce :

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}} \tag{11}$$

Limite $k \to 0$: $\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \cdots\right)$
Limit $k \to 1^-$: $\mathrm{K}(k) = \ln 4/k' + \frac{k'^2}{4}\,(\ln 4/k' - 1) + \cdots$ où $k' = \sqrt{1-k^2}$.

- Fonction de Bessel modifiée de première espèce :

$$I_0(z) = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\pi}\, \mathrm{e}^{z\cos t} = \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}t}{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-zt}}{\sqrt{1-t^2}} \tag{12}$$

Comportements asymptotiques : $I_0(z) \simeq 1 + \frac{z^2}{4} + \cdots$ pour $z \to 0$ et $I_0(z) \simeq \frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{2\pi z}}$ pour $z \to \infty$.