DEA de Physique Quantique 2002-2003
Théorie des Champs

Problème 2 :
Équation de Dirac en dimension 2 + 1
et théorème Aharonov-Casher

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés des fermions de Dirac dans des systèmes planaires, des questions qui ont un intérêt pour construire des théories effectives bidimensionnelles en physique de la matière condensée : par exemple pour décrire des excitations dans les supraconducteurs de type d ou encore pour étudier la transition entre plateaux dans l'effet Hall quantique entier. On considère un espace temps de dimension $2+1$. On notera $x^\mu = (x^0, x^1, x^2)$ les composantes du trivecteur x. Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ est le groupe des transformations linéaires $x \to x' = \Lambda x$ laissant la métrique $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ invariante.

On se limitera au sous-groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ des transformations propres ($\det\Lambda = +1$) orthochrones. On notera $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ le tenseur complètement antisymétrique tel que $\epsilon_{012} = +1$.

1. Combien de générateurs le groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ possède-t-il ? Caractériser physiquement les transformations correspondantes.

2. *Matrices de Dirac.* Pour construire l'équation de Dirac, nous avons besoin de trois matrices γ^0, γ^1 et γ^2 satisfaisant l'algèbre :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \,. \tag{1}$$

a) Montrer qu'une réprésentation possible est :

$$\gamma^0 = \sigma_z \,, \qquad \gamma^1 = \mathrm{i}\sigma_x \quad \text{et} \quad \gamma^2 = \mathrm{i}\sigma_y \,. \tag{2}$$

b) Calculer la matrice

$$\gamma^5 = \frac{\mathrm{i}}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \tag{3}$$

3. *Équation de Dirac.* L'équation de Dirac libre s'écrit

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{4}$$

où $\psi(x)$ est un spineur à deux composantes. $S(\Lambda)$ sont les transformations de Lorentz dans la représentation engendrée par les spineurs. Construire explicitement les transformations de Lorentz spéciales et la rotation opérant dans le plan $x^0 = \text{cste}$.

4. Montrer que les transformations de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ qui laissent invariant le vecteur p^μ forment un sous groupe à un paramètre. Montrer que le génerateur W de ce sous-groupe dans la représentation engendrée par les spineurs s'écrit : $W = \frac{1}{2}\not{p}$.

5. *Ondes planes.* On note $\psi^{(+)}_{\vec{p}}(x) = u(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$ (respectivement $\psi^{(-)}_{-\vec{p}}(x) = v(\vec{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$) les solutions d'énergie positive (resp. négative).
a) Écrire les équations satisfaites par $u(\vec{p})$ et $v(\vec{p})$.
b) Montrer que $u(\vec{p})$ et $v(\vec{p})$ sont vecteurs propres de W.
c) Comment caractériser le "spin" en dimension $d = 2+1$?
d) À l'aide des résultats de la question 3, construire $u(\vec{p})$ et $v(\vec{p})$.

6. *Moment cinétique.*
a) Exprimer l'opérateur de moment cinétique total $\mathcal{J}$.
b) Construire les états propres de $\mathcal{J}$ sous la forme

$$\Psi_J(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta) \\ g(\theta) \end{pmatrix} \tag{5}$$

c) Déduire les valeurs propres de $\mathcal{J}$ si $\Psi_J(\theta)$ est univaluée.

7. Théorème Aharonov-Casher.

Dans cette partie nous nous intéresserons à l'hamiltonien de Dirac

$$\mathcal{H} = -\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot(\vec{\nabla} - \mathrm{i}\vec{A}) + \beta m \tag{6}$$

pour une configuration de champ magnétique statique quelconque. Rappelons que : $\beta = \gamma^0$, $\alpha_x = \gamma^0\gamma^1$ et $\alpha_y = \gamma^0\gamma^2$. Nous travaillerons dans un système d'unités tel que $\hbar = e = +1$.

Nous emploierons des notations complexes pour repérer les coordonnées d'espace : $z = x + \mathrm{i}y$. Nous noterons $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ et $\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Vérifier que $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y)$.
a) Il est toujours possible d'écrire le potentiel vecteur sous la forme $A_i = \epsilon_{ij0}\partial_j\phi$ où ϕ est une fonction scalaire. Vérifier que $A \stackrel{\text{def}}{=} A_x + \mathrm{i}A_y = 2\mathrm{i}\bar{\partial}\phi$. Comment s'exprime le champ magnétique B en fonction de A et $\bar{A}$, puis de ϕ ?
b) Montrer que l'opérateur de moment orbital s'écrit $L = z\partial - \bar{z}\bar{\partial}$. En déduire qu'un état propre du moment cinétique $\mathcal{J}$ s'écrit :

$$\psi_J(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} z^{J-1/2}\varphi(z\bar{z}) \\ z^{J+1/2}\chi(z\bar{z}) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

où $\varphi(t)$ et $\chi(t)$ sont deux fonctions quelconques.
c) Montrer que l'hamiltonien de Dirac est :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} m & 2\partial - 2(\partial\phi) \\ -2\bar{\partial} - 2(\bar{\partial}\phi) & -m \end{pmatrix} \tag{8}$$

puis donner les équations satisfaites par les deux composantes $f(z,\bar{z})$ et $g(z,\bar{z})$ d'un spineur $\psi(z,\bar{z})$ état propre de $\mathcal{H}$.
d) *États d'énergie $E = +m$.* Montrer que les solutions d'énergie $E = +m$ sont de la forme

$$\psi(z,\bar{z}) = h(z)\,\mathrm{e}^{-\phi(z,\bar{z})}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

où $h(z)$ est une fonction analytique quelconque.

Dans la suite, on considèrera les états

$$\psi_J(z,\bar{z}) = z^{J-1/2}\,\mathrm{e}^{-\phi(z,\bar{z})}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

(remarquons que cet état est état propre de $\mathcal{J}$ seulement si ϕ n'est fonction que du produit $z\bar{z}$).
e) Faisons deux hypothèses sur la fonction ϕ :
- lorsque $z \to 0$ on suppose que $\phi(z,\bar{z}) \propto z\bar{z}$.
- Si on écrit $\phi(z,\bar{z}) = \frac{F(z,\bar{z})}{4\pi}\ln(z\bar{z})$, la fonction F tend vers une constante Φ lorsque $|z| \to \infty$.

Comment interpréter ces deux conditions en termes du champ magnétique ? Quel est le sens physique de Φ ?
f) Déduire des deux questions précédentes que J doit être borné inférieurement et supérieurement.

C'est le *théorème d'Aharonov-Casher* (Phys. Rev. A **19** (1979) p.2461) : le nombre d'états d'énergie $+m$ est égal au flux magnétique traversant le système en unité de quantum de flux $\phi_0 = h/e$.