10 septembre 2013

Phys. 101 : MÉCANIQUE I.

Chapitre 1. Dimensions et Unités mesures et incertitudes

Intro générale (Anne Keller) → vue d'ensemble des théories physiques (forces) (int. fondamentales)

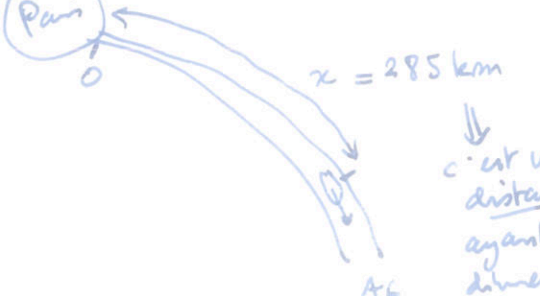
I. Dimensions et unités

A. Introduction

Phénomènes physiques (ou autres) → décrits en analysant certaines grandeurs dont on cherche à comprendre / prédire l'évolution.

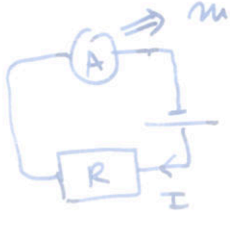
$\boxed{\text{la dimension désigne la nature de ces grandeurs}}$

ex 1 : Position d'une voiture sur une route.



⇓ c'est une distance ayant la dimension d'une longueur

ex 2 : Courant électrique



⇒ mesure de $I = 20\,mA$

courant d'électrons

$1\,A \approx 6{,}25 \times 10^{18}\ e^- / s$

Notation : pour désigner la dimension (la nature) de la grandeur X on écrira

$$[X]$$

Exemples de grandeurs

masse, longueur, temps, vitesse, température, ...

plus sophistiqués :
accélération, énergie, quantité de mouvement, ...
beaucoup !

Relation entre grandeurs $\Leftrightarrow$ relation entre dimensions.

Ex : vitesse

instantanée $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

moyenne $\bar{v}^t = \frac{x(t)}{t}$

$$[v(t)] = \frac{[x(t)]}{[t]}$$

$$\downarrow$$

$$V = \frac{L}{T}$$

dimension dérivée

dimensions "de base"

B. Dimensions de Base

Longueur, masse, temps, courant électrique, températu...

on notera : dans les éqs aux dimension

L	M	T	I	Θ

Q : Comment s'en souvenir ?
→ lié à un système d'unités M, K, S, A

C. Unités

pour mesurer une grandeur, il faut un système d'unité, une référence.

ex : le mètre. pb : vendre 1m de ~~soie~~ tissu !

Wikipédia

1791 : 1ère définition officielle
1/20 000 d'un méridien terrestre
→ puis mètre étalon en marbre disposés dans Paris

1799 : mètre étalon en platine (Méchain)

1889 : premier mètre étalon du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)
barre : alliage platine - irridium
→ conservé au Pavillon de Breteuil à Sèvre

1960 : (définition moderne)
$1m = 1\,650\,763.73\ \lambda_{Kr}$
une des raies du krypton ^{86}Kr

1983 : $\boxed{1m = \text{distance parcourue par la lumière dans le vide en } \frac{1}{299\,792\,458}\ s.}$

déf. de la seconde :

> la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins F=3 et F=4 de l'état fondamental $6S_{1/2}$ de l'atome Césium 133

Grâce à la mécanique quantique

Définitions modernes : références à des phénomènes physiques très contrôlés

ex : Standard de résistance électrique → Effet Hall Quantique
entre

Il faut CHOISIR un système d'unités.

Q: Comment choisir ? $\rightarrow$ ce qui est commode pour exprimer des grandeurs

ex1 : physicien atomique $\rightarrow$ distances mesurées en $\underset{\text{atome}}{\text{Å}} = 10^{-10}$ m

biophysicien $\rightarrow$ ———— $\underset{\text{cellule}}{1\,\mu m} = 10^{-6}$ m

astrophysicien du syst. solaire $\rightarrow$ ———— u. a. = distance terre-soleil $\simeq 150$ millions de km

cosmologiste $\rightarrow$ ———— a. l. $\simeq 9500$ milliards de km

En pratique : il n'y a pas qu'une seule dimension mais on manipule des relations avec plusieurs dimensions,

$\Downarrow$

il faut un $\boxed{\text{système cohérent}}$

D. Systèmes d'unités.

Exemple n°1 : le (vieux) système CGS ou système gaussien

unités de base : $\left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow cm \\ M \rightarrow g. \\ T \rightarrow s \end{array} \right]$

ex: application numérique de la formule $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$m = 2$ g.
$v = 1$ cm/s $\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \times 2_{(g)} \times 1_{cm^2/s^2} = 1\, \underbrace{g.cm^2/s^2}$

$\equiv 1\, \underbrace{erg}_{\text{unité dérivée}}$

T-/L

Remarque : une loi peut prendre une forme dépendant ~~différen~~ du système d'unités.

ex : Force de Coulomb

CGS : $\|\vec{F}\| = \dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$

statC (statcoulomb) ou Fr (franklin)

dyne

cm

MKSA $\|\vec{F}\| = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Coulomb

Newton

m

En résumé : $\boxed{\text{Nous choisirons le système international (S.I.)}}$

système MKSA

Unités de base :

Grandeur	Symbole (Notation)	Unité	
Longueur	L	m	(mètre)
masse	M	kg	(kilogramme)
temps	T	s	(seconde)
Courant électrique	I	A	(ampère)
température	Θ	K	(kelvin)

~~ex : $\vec{F} = m.\vec{a} \xrightarrow{A.N.} 1\,\underbrace{N}_{\text{newton}} = 1\,kg.m.s^{-2}$~~

~~$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow 1\,\underbrace{J}_{\text{joule}} = 1\,kg.m^2 s^{-2} = 1 N.$~~

Attention : $\boxed{\text{DIMENSION} \neq \text{UNITÉ}}$

Quelques exemples d'unités dérivées

ex 1 : $\vec{F} = m.\vec{a}$ (PFD) $\Rightarrow \underbrace{[F] = M \times [a] = MLT^{-2}}_{\text{équation aux dimensions}}$

$$\xrightarrow[\substack{m = 1\,kg \\ \|\vec{a}\| = 1\,m/s^2}]{A.N.} \quad \|\vec{F}\| = 1\ kg.m.s^{-2} = 1\ \underbrace{N}_{\text{newton}}$$

(unité S.I)

ex 2 : $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

$$\xrightarrow[\substack{\text{A.N. avec} \\ m = 2\,kg \\ v = 1\,m/s}]{} \quad E_c = 1\ kg\ m^2 s^{-2} = 1\ \underbrace{J}_{\text{joule}} = 1 N.m$$

grandeur	dimension	unité
volume V	$[V] = L^3$	m^3
fréquence f	$[f] = T^{-1}$	hertz : $1 Hz = 1 s^{-1}$
force F	$[F] = MLT^{-2}$	newton : $1 N = 1 kg.m.s^{-2}$
énergie E	$[E] = ML^2T^{-2}$	joule : $1 J = 1 kg.m^2.s^{-2}$
puissance $\mathcal{P}$	$[\mathcal{P}] = \frac{[E]}{T} = ML^2T^{-3}$	watt : $1 W = 1 kg\, m^2 s^{-3}$
pression p	$[p] = \frac{[F]}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$	Pascal : $1 Pa = 1 kg.m^{-1}s^{-2}$
⋮	⋮	⋮

E. Analyse dimensionnelle – Équations aux dimensions

toute grandeur physique Q

$\downarrow$

dimension fonction
des dimensions de
base $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{T}, \mathbf{I}, \theta$

$$[Q] = L^a M^b T^c \left(I^d \theta^e\right)$$

en général

1. Règles d'homogénéité des équations

① si on écrit
$Q_1 = Q_2$ ou $Q_1 + Q_2$ ou $Q_1 - Q_2$ $\Leftarrow$ $[Q_1] = [Q_2]$

(on n'ajoute pas des pommes et des poires : 2 pommes + 3 poires = ?)

corollaire :

② toute fonction (qui n'est pas simplement une loi de puissance $f(x) = x^a$)
doit avoir un argument sans dimension

si on écrit $f(Q)$ $\Leftarrow$ $[Q] = 1$

$f = \cos, \sin, \exp, \ln, \ldots$

pourquoi est-ce un corollaire ? $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$

③ Une quantité vectorielle possède la dimension de ses composantes et de sa norme

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{\imath} + Q_2 \vec{\jmath} + Q_3 \vec{k} \Rightarrow [Q_1] = [Q_2] = [Q_3] = [\|\vec{Q}\|] = [\vec{Q}]$$

base normée

④ Dérivée d'une grandeur physique $Q(x)$

$$\left[\frac{dQ(x)}{dx}\right] = [Q(x)] \times [x]^{-1}$$

exemple :

position $x(t)$ $\longrightarrow$ vitesse $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

2. L'utilité de l'analyse dimensionnelle.

a. Trouver des lois simples

parfois, des lois simples sont données par l'analyse dimensionnelle.

$$Q = fct(Q_1, Q_2)$$

$\big\downarrow$ hypothèse : loi simple (loi de puissance)

$$= \underbrace{C}_{\text{non donné}} \times \underbrace{Q_1^{a}\,Q_2^{b}}_{a,\ b \text{ donnés par l'analyse dim.}}$$

ex : corde de piano.

grandeurs caractéristiques :

Masse, Longueur $\longrightarrow$ $\mu = \dfrac{M}{L}$ (masse linéique)

Tension (force) : F

Q : Quelle force (tension) l'accordeur doit-il choisir pour régler la ~~corde~~ fréquence de la corde ?

La : 110 Hz, 220 Hz, 440 Hz

on postule : $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{fréquence}}}{f} = C \times \underset{\substack{\uparrow\\ \text{tension}}}{F^{a}} \times M^{b} \times L^{c}$

$$[f] = [F]^{a}\,[M]^{b}\,[L]^{c}$$

$$T^{-1} = (MLT^{-2})^{a}\,M^{b}\,L^{c} = M^{a+b}\,L^{a+c}\,T^{-2a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \Rightarrow a = \tfrac{1}{2} = -b = -c \qquad \boxed{f = \underbrace{C}_{\text{sans dim}} \times \sqrt{\dfrac{F}{M.L}}}$$

Explique la forme du piano à queue

2) pourquoi les cordes de graves sont plus grosses.

6. code correcteur d'erreur

→ ce qui fera gagner du temps au correcteur de vos copies (si $\exists$ des erreurs dimensionnelles) !

TRÈS IMPORTANT !

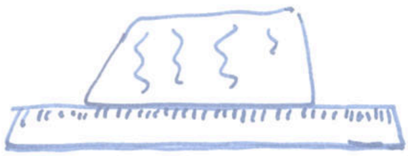
II. Mesure et Incertitudes

A. Introduction

Expérience ⟿ (Appareil de mesure) ⟿ signal

donné avec une certaine précision

ex: mesure d'une longueur avec une règle graduée



← précision ~ 0.5 mm

ex: $L = 12,\underline{20} \pm 0.0\underline{5}$ cm

AUTANT DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS

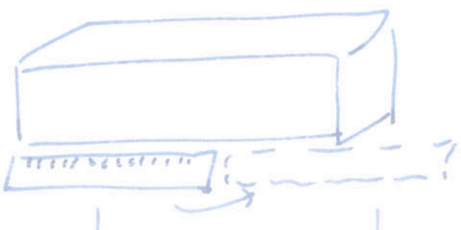
vocabulaire: $\delta L = 0.05$ cm : incertitude absolue

$\frac{\delta L}{L} = 0.004 = 0.4\%$ = incertitude relative

B. Calcul des incertitudes

1. Motivation

Q: si $L > 50$cm (la taille de la règle)



mesure n°1 ⇓ L_1, δL_1

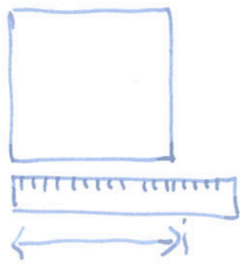
mesure n°2 ⇓ L_2, δL_2

$L_1 + L_2 = L$

δL_1, δL_2 ⟶ $L = ?$

les deux erreurs pourraient se compenser, mais dans le pire des cas elles s'ajoutent $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\delta L = \delta L_1 + \delta L_2}}$

2. Exemple n°2 : surface d'un carré



carré $\Rightarrow$ 1 mesure suffit

$$S(x) = x^2$$

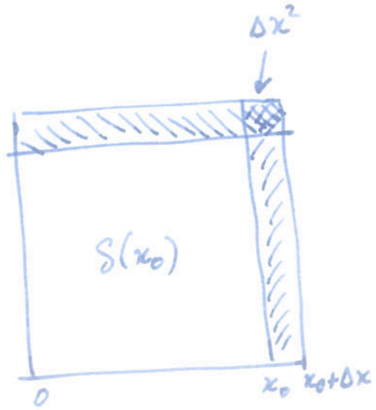
on mesure $x = x_0$ avec une incertitude Δx

$$x = x_0 \pm \delta x$$

si x varie de Δx (Δx en gros $\in [-\delta x, +\delta x]$), de combien varie $S(x)$?

$$x = x_0 + \Delta x \quad \text{où} \quad \Delta x = x - x_0 : \text{écart}$$

$$S(x_0 + \Delta x) \underset{=(x_0+\Delta x)^2=}{=} x_0^2 + 2x_0\Delta x + \underbrace{\Delta x^2}_{\ll x_0 \Delta x}$$



$$\frac{S(x_0+\Delta x)}{S(x_0)} = 1 + 2\underbrace{\frac{\Delta x}{x_0}}_{4\times 10^{-3}} + \underbrace{\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2}_{1,6\times 10^{-5}}$$

$\underline{\underline{4\times 10^{-3}}} \gg 1,6\times 10^{-5}$

domine le calcul de l'incertitude

$$S(x_0+\Delta x) \simeq S(x_0) + \underbrace{2x_0\,\Delta x}_{S'(x_0)\cdot\underbrace{\Delta x}_{\text{algébrique}}}$$

$$\Downarrow$$

on dira : $S(x) = \underbrace{S(x_0)}_{148,84\,cm^2} \pm \delta S$ où $\delta S = |S'(x_0)|\delta$
$= 2\times 12,2\times 0,$
$= 1,22\,c$

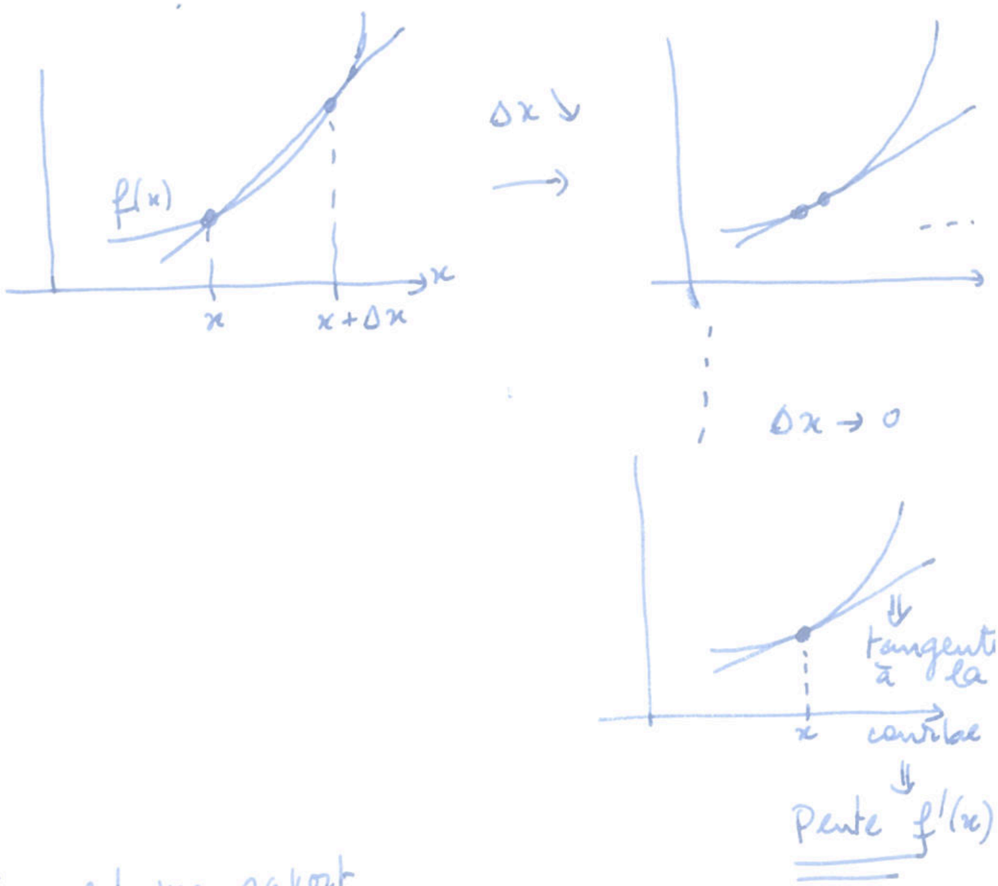
$$\downarrow$$

$$S(x) = \underline{\underline{149}} \pm \underline{\underline{1}}\ cm^2$$

3. Parenthèse mathématique : dérivation

soit une fonction $f(x)$, la dérivée de la fonction mesure le taux ~~d'ac~~ de croissance de la fonction au point x.

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Notation : $\frac{df}{dx}$ est un rapport d'accroissements infinitésimaux

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow dx$$
$$\Delta f \to 0 \Rightarrow df$$

$\frac{df}{dx}$ rappel $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x)$

→ avantages : - utile pour l'analyse dimensionnelle
- très pratiques pour les changements de variables !

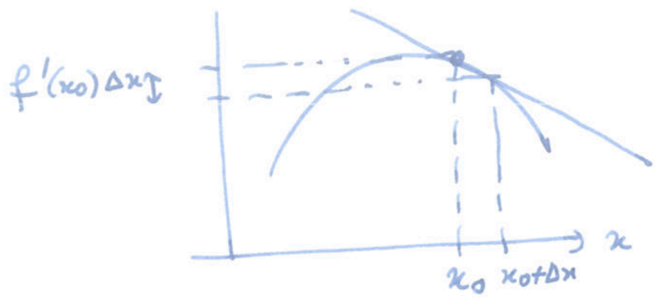
$f(y(x))$

$$\frac{df}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'(x)} \overbrace{\frac{df}{dy}}^{f'(y)} = y'(x)\, f'(y(x))$$

4. Incertitude d'une grandeur fonction d'une autre grandeur

La question : on mesure x (ex : longueur) à δx près

on souhaite l'incertitude sur $y = f(x)$ (ex : la surface)

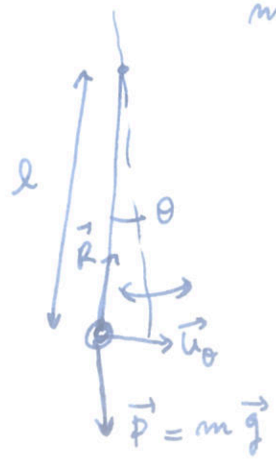


$$y = f(x) \Rightarrow \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\,\Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\delta y = |f'(x_0)|\,.\,\delta x \equiv \left|\frac{df}{dx}(x_0)\right| \delta x}$$

Exemple.



$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \xrightarrow[\text{sur } \vec{u}_\theta]{\text{projection}} ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\downarrow \theta \ll 1$$

$$\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{l}\theta$$

période : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

Vérif. (A.D.)

$$\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \left[\frac{L}{[g]}\right)^{1/2} = \left(\frac{L}{LT^{-2}}\right)^{1/2} = T \text{ ok}$$

Si on donne $l = 10,0 \pm 0,1$ cm

$g = 9,81$ m/s²

$$\frac{dT}{dl} = \pi\sqrt{\frac{1}{gl}} \Rightarrow \delta T = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}\delta l$$

$$T = 2.\pi \times \sqrt{\frac{0.1}{9,81}} \simeq 0,63 \text{ s}$$

calculatrice 0.63435 s

$$\delta T = \frac{\pi \times 0.001}{\sqrt{0.1 \times 9.81}} \simeq 0,003 \text{ s}$$

$$T = 0,634 \pm 0,003 \text{ s}$$

T-1