24 septembre 2013

Chapitre 3 : Cinématique

I. Introduction

On a déjà évoqué que la mécanique est la science du mouvement. Avant d'en comprendre les causes et de prédire son évolution, il faut être capable de décrire le mouvement : c'est l'objet de la cinématique.

→ on va introduire les notions de position & trajectoire, vitesse, accélération, ...

II. Préliminaire : micro rappel sur la dérivation

A. Définition

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$
la fonction est dérivable en x si la limite existe (est unique) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} = f'(x_0) \text{ ou } \frac{df}{dx}(x_0)$$

Interprétation : $f'(x_0)$ mesure la pente de la tangente au point x_0

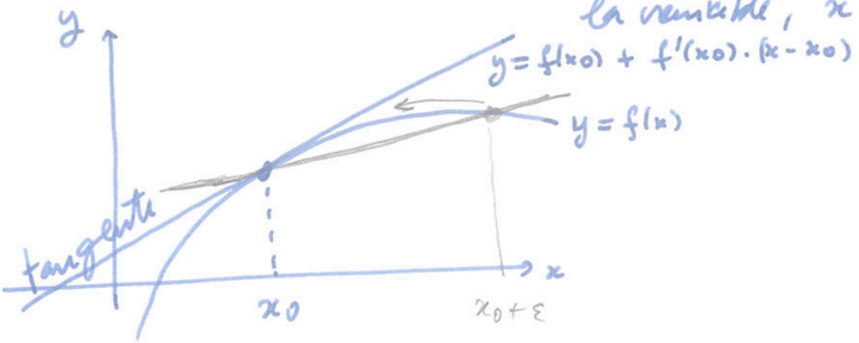
Cette relation nous donne l'approximation linéaire (ou affine) de la fonction :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{\text{si } x \sim x_0}{\simeq} f'(x_0)$$

$$\Downarrow$$

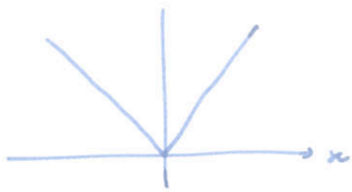
$$f(x) \simeq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot}_{\text{deux nombres}} (x - x_0)$$

polynôme de degré 1 dans la variable, x



<u>Remarque</u> : si la limite n'existe pas, on dit que la fonction n'est pas dérivable en x_0.

<u>ex</u> : $f(x) = |x|$
en $x_0 = 0$



B. <u>Propriétés</u>

- <u>linéarité</u> : $a, b \in \mathbb{R}$
  f, g deux fonctions
  $$(af + bg)' = af' + bg'$$
- <u>produit</u> $$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$ ~~quotient~~ $\cancel{\left(\frac{f}{g}\right)' =}$

  généralisation : $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \, f^{(k)} g^{(n-k)}$$
- <u>fonction composée</u> $(f \circ g)(x)$
  $$\boxed{\left[f(g(x))\right]' = g'(x) \, f'(g(x))}$$
  plus naturellement : $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg}{dx} \frac{df}{dg}$!!
- quotient $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{\ldots}$ ex : $\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$

conséquence : fct inverse : $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

$$f^{-1}(f(x)) = x \;\to\; f'(x)\, f^{-1\prime}(f(x)) = 1$$

$$\Rightarrow f^{-1\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

application : $y = f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$y > 0 \quad f^{-1}(y) = \ln y \Rightarrow \ln' y = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

par symétrie $\frac{d}{dx}$ (fct paire) = fct impaire $\Rightarrow \ln'|y| = \frac{1}{y}$ sur $\mathbb{R}^*$

C. Dérivées des fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$e^{\lambda x}$	$\lambda e^{\lambda x}$
$\ln\lvert x-a\rvert$	$\frac{1}{x-a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cotan x$	$-1 - \cotan^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{th}\, x$	$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\mathrm{argch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{argsh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argth}\, x$	$\frac{1}{\ldots}$

IMPORTANT

III. Trajectoires rectilignes (cinématique unidimensionnelle)

A. Position, trajectoire

1. Position Si on considère un point matériel M, on repère sa position à l'aide d'un vecteur par rapport à une référence (l'origine d'un repère) : $\vec{OM} \equiv \vec{r}$

Si tout se passe sur un axe $\Rightarrow$ on a ~~uniquement~~ besoin d'un unique coordonnée (quantité algébrique, >0 ou <0) :

$$\boxed{\vec{OM} = \underbrace{x}_{\text{coordonnée}}\ \underbrace{\vec{\imath}}_{\text{vecteur unitaire}}}$$

2. Loi horaire et trajectoire

Si on souhaite décrire son mouvement, il faut savoir comment sa position dépend du temps

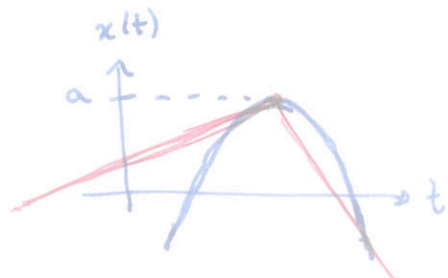
$\underbrace{M(t)}_{\text{un peu abstrait}}$, i.e. $\underline{\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath}}$

↓

cette fonction est la "loi horaire"
→ position au temps t.

L'ensemble des positions définit la trajectoire du point matériel M.

Remarque : Différentes lois horaires peuvent être associées à la même trajectoire



trajectoire :

B. Vitesse

ex : une voiture roule de Paris (10h) à Dijon. (13h)
→ sa vitesse moyenne est $\frac{300\,km}{3\,h} = 100\,km/h$
→ Quand elle passe à Auxerre, elle est flashée à $v = 155\,km/h$ (vitesse instantanée)

1. Vitesse moyenne.

Le point matériel M est repéré par son abscisse $x(t)$
on connait $x(t_1)$ et $x(t_2)$
⇒ sa vitesse moyenne est

$$\boxed{\langle \vec{v} \rangle_{[t_1,t_2]} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\, \vec{i}}$$

$$= \frac{x(t_1+\Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}\, \vec{i}$$

dépend de $[t_1, t_2]$

où $\Delta t = t_2 - t_1$

2. Vitesse instantanée

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\, \vec{i}}$$

fonction de t

c'est la dérivée de la position

$$\vec{v} = v_x\, \vec{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_x(t) = x'(t)}$$

parfois notée $\dot{x}(t)$ ou $\frac{dx}{dt}$

Application : l'appareil qui mesure la distance est cassé.
le conducteur enregistre $v_x(t)$ dans sa voiture
~~Il peut~~ (toutes les 5s).
Il peut déduire $x(t) = x(0) + \int_0^t d\tau\, v_x(\tau)$

$$\approx \Delta t \times \sum_{k=0}^{N-1} v_x(t_k)$$

où $t_k = k\,\Delta t$
et $N = t/\Delta t$

C. Accélération

ex. :
accélérateur : $v_x(t) \nearrow \Rightarrow v_x'(t) > 0$ (on est scotché au siège)
on freine : $v_x(t) \searrow \Rightarrow v_x'(t) < 0$ (on est projeté en avant)

$\downarrow$

pour quantifier cela on introduit l'accélération.

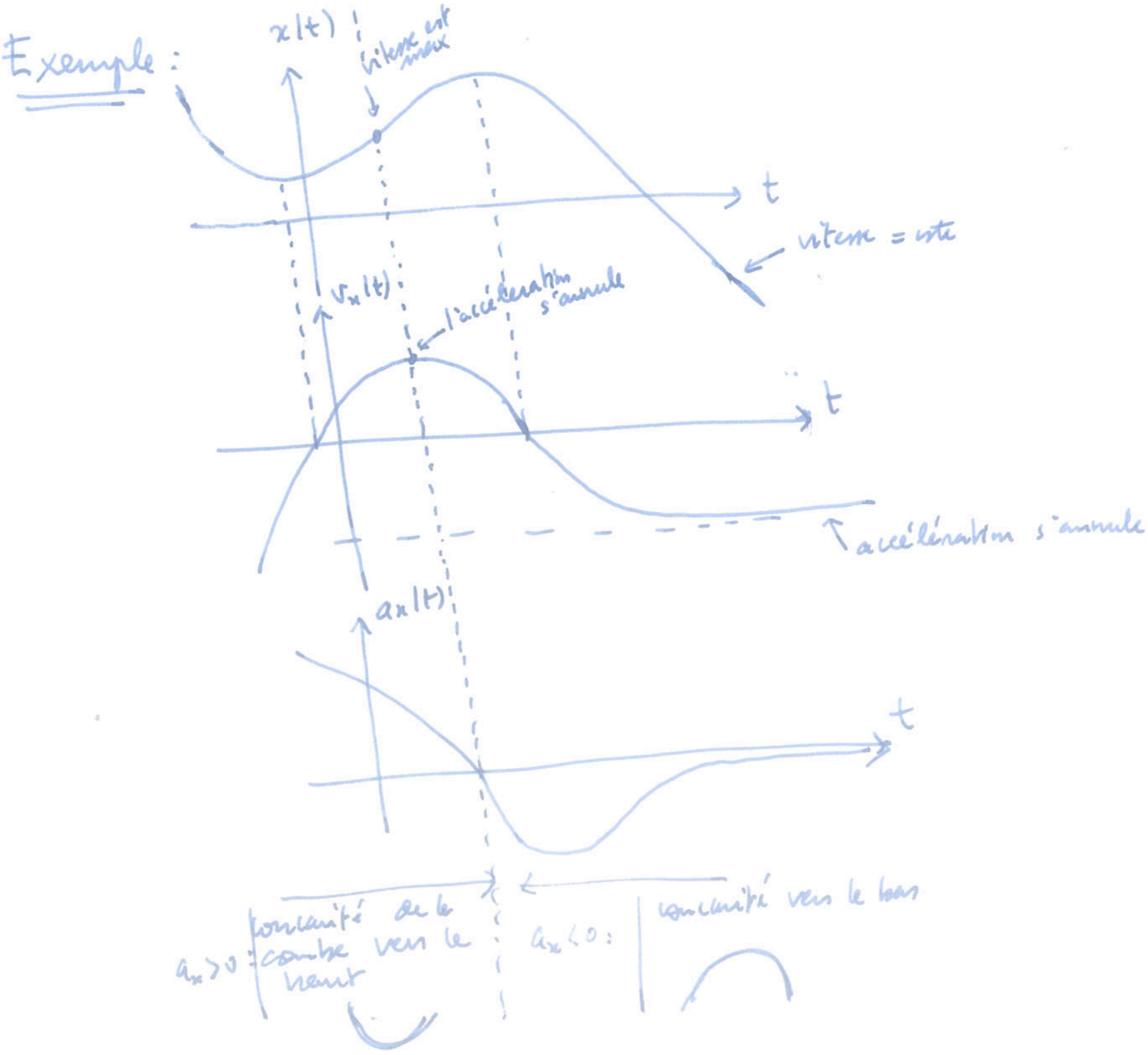
l'accélération caractérise la croissance de la vitesse

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}}$$

$\downarrow \vec{a} = a_x \vec{i}$

$$a_x(t) = v_x'(t) = x''(t) \quad (\text{ou } \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t))$$

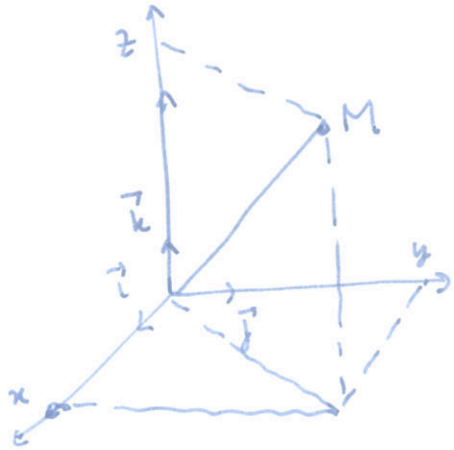
Exemple :



III. Généralisation dans l'espace 3D

A. Vecteur position

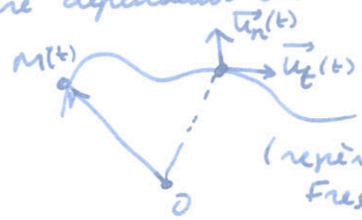
$$\vec{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$



repère
(référentiel)
→ indépendant de t.

Rq : dans certain cas il est commode d'introduire un repère dépendant du temps...

ex :



(repère de Fresnel)

B. Vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

$$\overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

C. Vecteur accélération

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}$$