

6

Oscillations

Chapitre rédigé par **Christophe Texier** (LPTMS)

6.1 Introduction

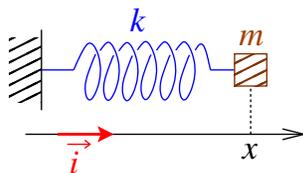
Nous allons revenir sur un problème que nous avons déjà abordé brièvement, celui de l'oscillateur harmonique. Cette question est d'une *importance fondamentale* en physique, notamment car ce problème apparaît de manière transversale dans des contextes extrêmement variés. La raison de l'importance de ce problème repose sur l'observation que lorsqu'on se trouve au voisinage d'un *état d'équilibre*, un minimum local de l'énergie potentielle, l'énergie présente la plupart du temps un comportement régulier en fonction des variables qui mesurent l'écart à l'équilibre :¹

$$\boxed{\text{Énergie} \propto (\text{écart à l'équilibre})^2} \quad (6.1)$$

c'est-à-dire que la force est proportionnelle à l'écart à l'équilibre (force linéaire). Donnons quelques exemples :

- **Une masse accrochée à un ressort** (dans la limite des petites élongations). On a vu qu'en utilisant la loi de Hooke pour décrire la force de rappel on aboutit à une équation différentielle

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (6.2)$$



1. Le symbole « \propto » signifie « proportionnel à ».

FIGURE 6.1: Masse fixée à un ressort. \vec{i} est le vecteur unitaire portant la direction du mouvement.

Rappelons que l'énergie potentielle (élastique) est

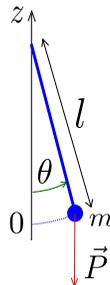
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.3)$$

- **Un pendule.** Considérons une masse m accrochée au bout d'une tige de longueur l . Le P.F.D permet d'obtenir l'équation différentielle²

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad \xrightarrow{\theta \ll 1} \quad l\ddot{\theta} + g\theta \simeq 0. \quad (6.4)$$

L'énergie potentielle (gravitationnelle) est effectivement quadratique dans la limite des petits angles :

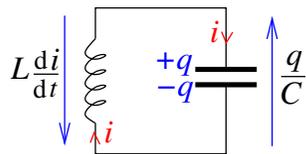
$$E_p = mgz = mgl(1 - \cos \theta) \simeq \frac{1}{2}mgl\theta^2. \quad (6.5)$$



- **Une molécule diatomique** (la vibration d'une molécule doit en principe être traitée dans le cadre de la mécanique quantique). Deux atomes sont liés par une liaison chimique (la mise en commun d'une fraction de leurs cortèges électroniques). La configuration stable de la molécule correspond à un minimum de l'énergie électrostatique. Lorsque la molécule reçoit de l'énergie, elle est susceptible de vibrer autour de sa position d'équilibre, ce qui est très bien décrit comme un oscillateur harmonique (si l'énergie reste faible devant l'énergie de liaison).
- **Un oscillateur électrique.** Si l'on considère une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C formant une boucle, les lois élémentaires de l'électrocinétique montrent que la dynamique du circuit est décrite par l'équation différentielle

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (6.6)$$

où q est la charge portée par le condensateur.



L'énergie cinétique est stockée dans la bobine

$$E_c = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \quad (6.7)$$

2. On doit se placer dans un système de coordonnées polaires, i.e. on obtient une expression appropriée de l'accélération par dérivations de $\vec{r} = l(\sin(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\vec{j})$ (programme du 2nd semestre).

FIGURE 6.2: Masse fixée à une tige oscillant autour de la verticale.

FIGURE 6.3: Oscillateur électrique.

alors que le condensateur stocke l'énergie potentielle (électrostatique)

$$E_p = \frac{1}{2C}q^2. \tag{6.8}$$

- Un mode du champ électromagnétique dans une cavité. La densité d'énergie électromagnétique est donnée par $\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}^2 + \vec{\mathcal{B}}^2)$, où les champs électrique et magnétique sont liés par les équations de Maxwell. On peut montrer que chaque mode se comporte comme un oscillateur harmonique.
- etc.

Cette petite liste (non exhaustive) vise à souligner la remarque faite en entrée de chapitre : l'étude de l'oscillateur harmonique, i.e. de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, a des applications dans des domaines extrêmement variés.

Nous pouvons déjà énoncer deux propriétés très importantes de l'oscillateur harmonique :

1. La période des oscillations est la même pour toutes les trajectoires : elle est indépendante de l'énergie.
2. Il est possible de superposer des solutions (on parle aussi « d'oscillateur linéaire »).³

3. Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions, alors $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$ est solution.

6.2 Oscillateur harmonique libre

6.2.1 Force de rappel

Afin d'être concret, considérons un oscillateur mécanique constitué d'un point matériel de masse m attaché à l'extrémité d'un ressort, se mouvant le long d'un axe sans frottement (figure 6.1). Dans la limite des faibles élongations, la force de rappel est bien modélisée par la loi de Hooke que nous avons déjà introduite dans le chapitre ??, § ?? : cette loi *phénoménologique* postule que la force (la « réponse » du ressort) est *linéaire* en fonction de l'élongation (i.e. en fonction de la « perturbation »). On écrit alors

$$\vec{F}_r = -k(x - x_0)\vec{i} \tag{6.9}$$

où k est la raideur du ressort et x est une coordonnée repérant le déplacement selon \vec{i} par rapport à la position d'équilibre. Le point important est le signe négatif entre le déplacement et la force, et ce, *quelle que soit l'orientation de l'axe*. On illustre ce point sur la figure 6.4.

6.2.2 Équation du mouvement

Dans la suite du chapitre nous simplifions l'expression de la force de rappel en *choisissant* l'origine des coordonnées afin que la position d'équilibre corresponde à l'abscisse $x_0 = 0$. La force de rappel prend la

Force de rappel :

La composante de la force de rappel est toujours **opposée** au déplacement :

$$F_x = -k(x - x_0)$$

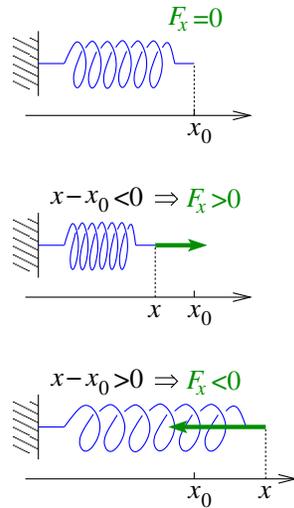


FIGURE 6.4: Force de rappel $\vec{F}_r = F_x \vec{i}$. La force a toujours un sens *opposé* à celui du déplacement.

forme simplifiée $\vec{F}_r = -kx\vec{i}$. Après projection sur \vec{i} , le P.F.D conduit à l'équation différentielle algébrique :

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (6.10)$$

À ce stade il est intéressant de regrouper les deux paramètres k et m dans une nouvelle notation. Remarquant que $[k/m] = ([\text{Force}]/L)/M = MLT^{-2}/(ML) = T^{-2}$, nous introduisons

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.11)$$

qui a donc la dimension d'une *fréquence* (l'inverse d'un temps). Elle est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur. L'équation du mouvement prend donc la forme

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0} \quad (6.12)$$

Remarquons que cette équation décrit aussi bien les autres problèmes physiques mentionnés dans l'introduction, à condition de donner une interprétation différente à la « coordonnée » x et à ω_0 (par exemple $x \rightarrow \theta$ et $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ pour la pendule).

6.2.3 Résolution

Nous proposons deux formulations permettant la résolution de l'équation différentielle (6.12).

Rappel : méthode introduite au chapitre ??, § ??. – Nous avons montré que l'équation différentielle (6.12) possède deux solutions indépendantes : le couple d'exponentielles complexes $\{e^{+i\omega_0 t}, e^{-i\omega_0 t}\}$. Nous avons

remarqué que la recherche d'une solution (physique) réelle rend plus naturel de considérer les combinaisons linéaires réelles de ces deux exponentielles, $\{\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)\}$. La solution la plus générale de l'équation différentielle est donc la combinaison linéaire

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t), \quad (6.13)$$

où les deux « constantes d'intégration » a et b sont fixées par des conditions initiales particulières. Par exemple la donnée de la position et de la vitesse au temps $t = 0$: $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. Pour un tel choix de conditions initiales, la base de solutions $\{\cos, \sin\}$ se révèle particulièrement approprié puisque les deux constantes a et b sont très simplement reliées aux paramètres x_0 et v_0 . Finalement :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (6.14)$$

Période, amplitude, phase.— L'examen de la solution montre que celle-ci est une fonction périodique, la période des oscillations étant définie comme le plus petit intervalle de temps tel que $x(t + T) = x(t)$. Cela correspond à $\omega_0 T = 2\pi$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (6.15)$$

Si l'expression (6.14) fait bien apparaître les paramètres x_0 et v_0 , elle ne fait pas ressortir encore très explicitement les propriétés intéressantes du mouvement. En utilisant qu'une combinaison linéaire d'un cos et d'un sin est encore une fonction sinusoïdale, nous voyons que nous pouvons re-écrire la solution sous la forme

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (6.16)$$

En développant le cosinus, nous identifions les deux nouveaux paramètres A et ϕ en fonction de x_0 et v_0 :

$$\begin{cases} A \cos \phi = x_0 \\ A \sin \phi = -\frac{v_0}{\omega_0} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \\ \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{cases}. \quad (6.17)$$

L'intérêt de la re-écriture (6.16) est de mettre en jeu des paramètres dont le sens est explicite :

- A représente l'*amplitude des oscillations* (i.e. $x(t)$ oscille entre $-A$ et $+A$).
- $\omega_0 t + \phi$ est appelée la *phase*.
- ϕ est le *déphasage*, ou la *phase à l'origine* (des temps).

Méthode 2 : complexifier la solution.— Nous allons montrer qu'il est plus simple de résoudre l'équation différentielle (6.12) en complexifiant (au sens figuré comme au sens propre) la solution. Si l'avantage de cette

Pulsation, période et fréquence :
la période des oscillations est reliée à la pulsation par

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

i.e. la *fréquence* est $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Rappel de quelques relations de trigonométrie :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Solution harmonique :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

où A est l'amplitude,
 $\omega_0 t + \phi$ est la phase,
 ω_0 est la pulsation,
 ϕ est le déphasage.

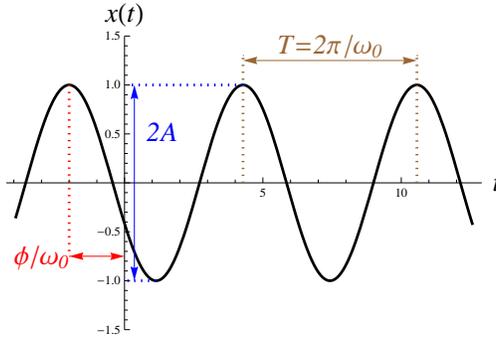


FIGURE 6.5: Mouvement de l'oscillateur harmonique

approche est ici léger, on verra tout le gain de la méthode dans les sections sur l'oscillateur amorti.

Nous recherchons une solution physique $x(t)$, réelle, de l'équation différentielle (6.12). Nous allons voir qu'il est tout à fait intéressant d'étendre la recherche d'une solution à l'espace des fonctions complexes. Notons $\tilde{x}(t)$ une solution *complexe* de (6.12). Puisque les coefficients de cette équation différentielle sont *réels*, la propriété de linéarité énoncée dans l'introduction du chapitre nous permet de voir que $x(t) = \text{Re } \tilde{x}(t)$ est une solution *réelle* (physique).⁴

Nous pouvons écrire la solution complexe sous la forme

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A} e^{+i\omega_0 t} \quad (6.18)$$

où \tilde{A} est un paramètre complexe. Puisque celui-ci est paramétré par *deux* paramètres réels, son module $A = |\tilde{A}|$ et sa phase ϕ

$$\tilde{A} = A e^{i\phi}, \quad (6.19)$$

nous voyons que l'écriture de la solution *complexe* (6.18) permet de balayer toutes les solutions *réelles* possibles (dépendant de deux constantes d'intégration). Cette observation est explicite puisque l'on retrouve la **forme générale** (6.16)

$$\text{Re } \tilde{x}(t) = \text{Re} \left(\tilde{A} e^{+i\omega_0 t} \right) = A \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (6.20)$$

L'intérêt de cette approche est évident, puisque la forme simple (6.18) est clairement plus aisée à manipuler que la combinaison (6.13).⁵

6.2.4 Analyse énergétique

Analysons les aspects énergétiques du problème. En calculant le travail de la force de rappel $F_x = -kx$, nous avons vu au chapitre précédent que l'énergie potentielle élastique est

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2. \quad (6.21)$$

4. Nous utilisons bien la propriété de linéarité : si $\tilde{x}(t)$ est solution (complexe), $\tilde{x}(t)^*$ est également solution (car les coefficients dans l'équation différentielle sont réels). On obtient une solution réelle en considérant la combinaison $x(t) = [\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^*] / 2$.

Simplifier la recherche de la solution : Il est plus simple de chercher une solution *complexe*

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A} e^{i\omega_0 t} \text{ où } \tilde{A} \in \mathbb{C}.$$

La solution *réelle* (physique) est donnée par $x(t) = \text{Re } \tilde{x}(t)$, et les deux paramètres (module et phase de \tilde{A}) sont fixés par les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

5. Une autre manière de présenter cette approche est d'exprimer la solution réelle comme combinaison linéaire des deux solutions indépendantes complexes $x(t) = C e^{i\omega_0 t} + D e^{-i\omega_0 t}$. La condition $x(t) \in \mathbb{R}$ impose la relation entre coefficients $C = D^* = \tilde{A}/2$. Complexifier la solution permet de considérer $\tilde{x}(t) = 2C e^{i\omega_0 t}$ plutôt que la combinaison linéaire d'exponentielles.

Énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Reprenons l'analyse de la solution (6.14) ; pour simplifier nous considérons une situation telle que $v_0 = 0$. L'amplitude du mouvement est donc simplement $A = x_0$ (et le déphasage $\phi = 0$). La connaissance de la loi horaire nous permet de suivre l'évolution temporelle des énergies cinétique et potentielle :

$$E_c(\dot{x}(t)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (6.22)$$

$$E_p(x(t)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \cos^2(\omega_0 t). \quad (6.23)$$

Nous vérifions bien que l'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \quad (6.24)$$

reste constante au cours du temps — nous avons re-introduit l'amplitude $A = x_0$, afin que l'équation (6.24) soit parfaitement générale. L'énergie potentielle initiale $E_p(x(0)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2$ est donc convertie en énergie cinétique après un quart de période $E_c(\dot{x}(T/4)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2$, puis reconverte en énergie potentielle, etc (figure 6.6).

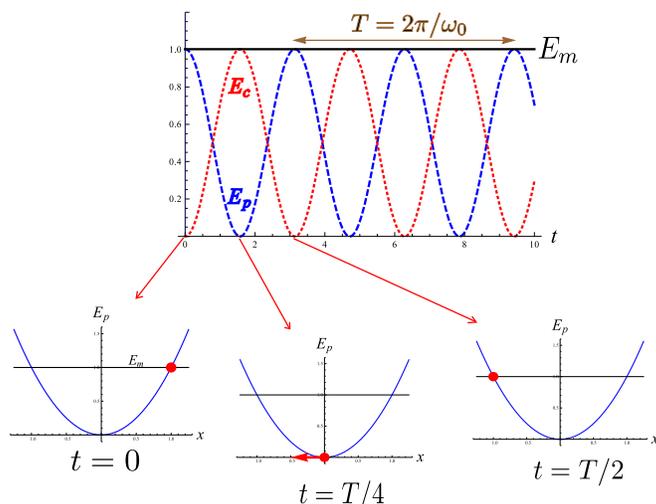


FIGURE 6.6: Oscillation des énergies potentielle et cinétique.

Il est intéressant d'introduire les moyennes temporelles des énergies (6.22) et (6.23) :⁶

$$\langle E_p \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} E_p(x(t)) = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dt}{T} E_p(x(t)) = \frac{1}{4}m\omega_0^2A^2. \quad (6.25)$$

On obtiendrait de même l'énergie cinétique moyenne. Finalement nous trouvons une propriété propre à l'oscillateur harmonique

$$\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{1}{2}E_m. \quad (6.26)$$

(c'est un cas particulier d'un théorème plus général appelé théorème du viriel).

6. On utilise

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \cos^2(x) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

6.3 Oscillateur forcé – Phénomène de résonance

6.3.1 Position du problème

Étudions maintenant la situation où l'oscillateur est soumis à une force extérieure harmonique, oscillant avec une pulsation ω , **différente** de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur. Le P.F.D conduit alors à :

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) + F_{\text{ext}} \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega \neq \omega_0. \quad (6.27)$$

Si nous invoquons l'analogie entre la masse à l'extrémité du ressort et le pendule oscillant, cette équation décrirait par exemple la situation où une personne sur une balançoire est poussée périodiquement par une seconde personne (dans ce cas, même si l'excitation extérieure est bien périodique, elle n'aurait toutefois pas la forme d'une fonction harmonique!).

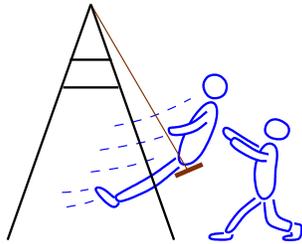


FIGURE 6.7: Balançoire : un exemple d'oscillateur forcé.

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, il est plus sympathique de complexifier la recherche de la solution. Pour cela nous analysons l'équation différentielle auxiliaire

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) + \omega_0^2 \tilde{x}(t) = \omega_0^2 A_{\text{ext}} e^{i\omega t} \quad \text{avec } x(t) = \text{Re } \tilde{x}(t) \quad (6.28)$$

où nous avons introduit

$$\frac{1}{m} F_{\text{ext}} = \omega_0^2 A_{\text{ext}} \quad \text{i.e.} \quad A_{\text{ext}} = \frac{1}{k} F_{\text{ext}} \quad (6.29)$$

afin de caractériser l'intensité de l'excitation (A_{ext} a la dimension d'une longueur). A_{ext} représente l'élongation du ressort à l'équilibre lorsqu'il est soumis à une force constante et égale à F_{ext} .

Nous avons déjà vu que la recherche de la solution générale d'une équation différentielle linéaire non homogène s'effectue en deux temps : recherche de *la* solution générale $x_{\text{homo}}(t)$ de l'équation homogène (le problème de l'oscillateur libre résolu dans la section 6.2). Puis recherche d'*une* solution particulière $x_{\text{part}}(t)$, que nous menons dans la sous section suivante. Finalement, la solution générale de (6.27) est :

$$x(t) = \underbrace{x_{\text{homo}}(t)}_{\text{Éq. (6.16)}} + x_{\text{part}}(t). \quad (6.30)$$

6.3.2 Détermination et étude de la solution particulière

Notons $\tilde{x}_{\text{part}}(t)$ la solution particulière de l'équation complexifiée (6.28). Nous cherchons $\tilde{x}_{\text{part}}(t)$ telle que la combinaison linéaire de la fonction et de sa dérivée soit proportionnelle à la fonction complexe oscillante $e^{i\omega t}$. Il est donc évident que nous devons choisir

$$\tilde{x}_{\text{part}}(t) = \tilde{A}_\omega e^{i\omega t}. \quad (6.31)$$

Nous démontrons en effet que cet ansatz est solution en l'injectant dans (6.28) :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \tilde{A}_\omega e^{i\omega t} = \omega_0^2 A_{\text{ext}} e^{i\omega t} \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}_\omega = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} A_{\text{ext}}.$$

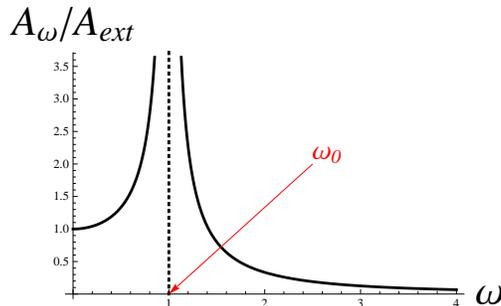
En posant comme précédemment $\tilde{A}_\omega = A_\omega e^{i\phi_\omega}$, la solution réelle correspondante est

$$x_{\text{part}}(t) = A_\omega \cos(\omega t + \phi_\omega) \quad (6.32)$$

où l'amplitude et la phase sont données par (rappelons que A_{ext} est réel par définition)

$$A_\omega = \frac{\omega_0^2}{|\omega^2 - \omega_0^2|} A_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \phi_\omega = \begin{cases} 0 & \text{pour } \omega < \omega_0 \\ -\pi & \text{pour } \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (6.33)$$

(le choix du signe de la phase est motivé par la comparaison avec l'oscillateur amorti, cf. figure 6.11).



Le coefficient A_ω mesure l'amplitude de la **réponse** de l'oscillateur à une excitation à pulsation ω . Le déphasage ϕ_ω est nul pour $\omega < \omega_0$: la réponse est *en phase* avec l'excitation. Lorsque la fréquence dépasse le seuil, $\omega > \omega_0$, la réponse est *en opposition de phase* avec l'excitation, $\phi_\omega = -\pi$. Concentrons-nous sur l'amplitude A_ω et analysons différents cas limites :

- *Basse fréquence* ($\omega \ll \omega_0$). L'excitation est très lente, à l'échelle du temps caractéristique de l'oscillateur, $T = 2\pi/\omega_0$. L'oscillateur a donc le temps de répondre à l'excitation, et suit « adiabatique-ment » le mouvement imposé, ce que traduit

$$A_\omega \simeq A_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \phi_\omega = 0.$$

- *Haute fréquence* ($\omega \gg \omega_0$). Si la fréquence excitatrice est très élevée, l'oscillateur ne peut suivre l'excitation trop rapide : il répond trop lentement à la sollicitation extérieure. Il est en opposition de phase avec l'excitation, $\phi_\omega = -\pi$, i.e. le ressort « résiste » à la force extérieure. L'amplitude des oscillations est d'autant plus petite que la fréquence augmente

$$A_\omega \simeq A_{\text{ext}} (\omega_0/\omega)^2 \ll A_{\text{ext}}.$$

- *Résonance* ($\omega \sim \omega_0$). Un phénomène remarquable apparaît lorsque la fréquence excitatrice est proche de la fréquence propre de l'oscillateur. Dans ce cas nous voyons que l'amplitude de l'oscillateur « explose »

$$A_\omega \simeq \frac{\omega_0}{2|\omega - \omega_0|} A_{\text{ext}} \gg A_{\text{ext}}.$$

Elle diverge même lorsque les fréquences coïncident $A_\omega \rightarrow \infty$ si $\omega \rightarrow \omega_0$ (dans la pratique, nous verrons que cette divergence est « coupée » par l'existence du frottement). Il y a un effet coopératif entre l'oscillation naturelle du système et l'excitation : c'est la situation de la personne sur la balançoire, poussée au moment où elle commence à reprendre de la vitesse afin d'amplifier au maximum le mouvement.

Exercice : Dans le cas de l'oscillateur forcé non amorti, il est également aisé de travailler avec des fonctions réelles : vérifier que si l'on injecte la forme $x_{\text{part}}(t) = \tilde{A}_\omega \cos(\omega t)$ dans (6.27), on aboutit aux mêmes conclusions que précédemment.

L'avantage qu'il y a à complexifier la recherche de la solution deviendra clair dans les prochains paragraphes lorsque nous étudierons l'effet de la dissipation.

6.3.3 Considérations énergétiques

Nous calculons la puissance (instantanée) de la force extérieure, caractérisant l'énergie apportée (si > 0) ou retirée (si < 0) au système par unité de temps :⁷

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) = F_{\text{ext}}(t) \dot{x}_{\text{part}}(t) = \frac{\omega}{2} m \omega_0^2 A_{\text{ext}}^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(2\omega t) \quad (6.34)$$

La force extérieure fournit et retire alternativement de l'énergie à l'oscillateur. *En moyenne* la force extérieure ne travaille pas :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle = 0, \quad (6.35)$$

où la moyenne temporelle a été définie plus haut, éq. (6.25).

7. Des formules trigonométriques utiles :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \cos x \sin x. \end{aligned}$$

6.4 Oscillateur amorti (libre)

6.4.1 Position du problème – Échelles caractéristiques

Si nous confrontons notre expérience courante avec les résultats de l'analyse détaillée de la dynamique de l'oscillateur (libre ou forcé) menée ci-dessus, nous voyons qu'un ingrédient important que nous avons négligé est l'existence de **dissipation**, responsable de l'arrêt des oscillations après un certain temps, si le mouvement n'est pas entretenu. Jusqu'à la fin du chapitre, nous allons étudier l'effet de ce nouvel ingrédient sur le mouvement d'oscillations. Nous faisons l'hypothèse que le frottement est du type « frottement fluide », i.e. décrit par la force de frottement

$$\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}, \quad (6.36)$$

où λ est un coefficient phénoménologique décrivant les détails du frottement (nature du fluide, forme de l'objet, etc), cf. chapitre ???. Après projection sur l'axe portant le mouvement de l'oscillateur mécanique, nous obtenons l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$m \ddot{x} = -\lambda \dot{x} - kx \quad (6.37)$$

Là encore, nous commençons par introduire les « bons » paramètres qui faciliteront l'analyse mathématique de l'équation. Ces choix sont guidés par l'analyse dimensionnelle.

- Rappelons qu'une première échelle de fréquence caractérisant le **rappel** est la pulsation propre

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}.$$

Elle caractérise la fréquence des oscillations, en l'*absence de frottement*.

- L'inspection de l'équation différentielle montre qu'une seconde échelle ayant la dimension inverse d'un temps est

$$\frac{2}{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{m}.$$

L'échelle de temps τ caractérise le **frottement**. Nous avons vu que τ est le temps mis par la vitesse pour relaxer vers sa valeur limite, en l'*absence de rappel*.

Une question naturelle, à laquelle nous allons répondre, est : en présence de rappel et de frottement, comment ces deux échelles de temps $1/\omega_0$ et τ se combinent-elles ? Autrement dit, quelles sont les nouvelles échelles de temps contrôlant le problème de l'oscillateur amorti ?

6.4.2 Résolution de l'équation différentielle

Nous pouvons re-écrire l'équation différentielle sous la forme

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0} \quad (6.38)$$

Nous recherchons une fonction telle qu'une certaine combinaison linéaire de x , \dot{x} et \ddot{x} s'annule à tout temps. Puisque la fonction exponentielle est stable sous l'action de la dérivation, cela nous conduit à chercher la solution sous la forme $x(t) = e^{-\lambda t}$. Si nous injectons cette exponentielle dans (6.38), nous voyons immédiatement qu'elle est une solution satisfaisante $\forall t$ à condition que λ soit une racine du polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - \frac{2}{\tau} \lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (6.39)$$

Les solutions de cette équation polynomiale prennent la forme simple :

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}. \quad (6.40)$$

Nous avons identifié deux solutions indépendantes $e^{-\lambda_+ t}$ et $e^{-\lambda_- t}$ de l'équation différentielle linéaire (6.38). La solution générale est donc une combinaison linéaire de ces deux exponentielles :

$$x(t) = a e^{-\lambda_+ t} + b e^{-\lambda_- t},$$

où les deux constantes d'intégration sont fixées par les conditions initiales, par exemple :

$$\begin{cases} x(0) = a + b = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\lambda_+ a - \lambda_- b = v_0 \end{cases}$$

L'inversion du système d'équations linéaires pour (a, b) fournit

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left[(\lambda_+ x_0 + v_0) e^{-\lambda_- t} - (\lambda_- x_0 + v_0) e^{-\lambda_+ t} \right]. \quad (6.41)$$

Cette écriture très générale ne fait toutefois pas ressortir les propriétés physiques intéressantes de la solution. En effet, suivant le signe du discriminant réduit⁸ $\Delta' = 1/\tau^2 - \omega_0^2$, les solutions $e^{-\lambda_+ t}$ et $e^{-\lambda_- t}$ sont soit du type exponentielles réelles décroissantes ($\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$), soit exponentielle réelle pondérée par une fonction oscillante ($\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{C}$). Nous analysons ces différents cas dans les sections suivantes.

6.4.3 Régime de fort amortissement ($\omega_0 \tau < 1$)

Commençons par considérer la situation où le discriminant réduit est positif $\Delta' > 0$, autrement dit $1/\tau > \omega_0$ i.e. « frottement > rappel ». C'est donc un régime de « fort amortissement ». Les deux racines du polynôme caractéristiques sont réelles

$$\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}.$$

La solution générale (6.41) est une combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes (car $\lambda_+ > \lambda_- > 0$). Le retour à l'équilibre est

8. Soit $P(x) = ax^2 + 2bx + c$ un polynôme du second degré. Le discriminant réduit est $\Delta' = \Delta/4 = b^2 - ac$ en terme duquel nous exprimons les racines du polynôme $x_{\pm} = (-b \pm \sqrt{\Delta'})/a$. I.e. $P(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$.

donc du type exponentiel. À condition que $\lambda_+ x_0 + v_0 \neq 0$, la solution est dominée à grand temps par le plus petit des taux, i.e. λ_- :

$$x(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\lambda_- t}$$

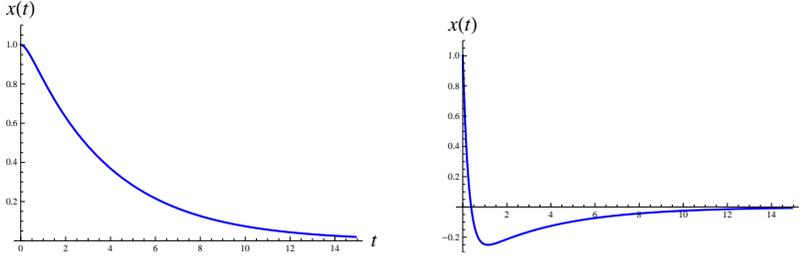


FIGURE 6.8: Régime de fort amortissement pour $\omega_0\tau = 0.5$. À gauche : $x_0 = 1$ & $v_0 = 0$ (unités arbitraires). À droite : $x_0 = 1$ & $v_0 = -5$.

Cas limite du « très fort » amortissement. – Il est instructif d’analyser les deux taux λ_{\pm} dans la limite $1/\tau \gg \omega_0$ (ou $\tau \ll T$). Nous obtenons les formes simplifiées :

$$\begin{cases} \lambda_+ \simeq 2/\tau \\ \lambda_- \simeq \omega_0^2\tau/2 \ll \lambda_+ \end{cases}$$

Le retour à l’équilibre ne s’effectue pas sur l’échelle de temps τ caractérisant le frottement seul, mais sur une échelle de temps beaucoup plus longue combinant les deux échelles de temps caractéristiques du problème

$$1/\lambda_- \simeq \frac{T^2}{2\pi^2\tau} \gg T \gg \tau.$$

6.4.4 Régime critique ($\omega_0\tau = 1$)

Le cas où les deux paramètres coïncident exactement est plutôt accidentel. Discutons néanmoins la solution de l’équation différentielle, que nous re-écrivons

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau^2}\right) x(t) = \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)^2 x(t) = 0 \quad (6.42)$$

Cette forme va se révéler utile pour identifier les deux solutions indépendantes. La discussion de la section précédente montre que les deux racines sont dégénérées, $\lambda_- = \lambda_+ = 1/\tau$, i.e. nous avons trouvé une solution $e^{-t/\tau}$ de l’équation différentielle. Or toute équation différentielle linéaire du *second* ordre possède *deux* solutions indépendantes ; quelle est la seconde solution ?

Nous cherchons la seconde solution sous la forme $x(t) = \zeta(t) e^{-t/\tau}$ et utilisons la propriété

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right) \left(\zeta(t) e^{-t/\tau}\right) = \frac{d\zeta(t)}{dt} e^{-t/\tau}.$$

Nous voyons immédiatement que si nous injectons $x(t) = \zeta(t) e^{-t/\tau}$ dans l'équation différentielle, nous obtenons que la nouvelle fonction satisfait $\zeta''(t) = 0$, i.e. $\zeta(t) = a + bt$. La seconde solution indépendante est $t e^{-t/\tau}$ et la solution générale de l'équation différentielle (6.42) est

$$x(t) = (a + bt) e^{-t/\tau}.$$

Les deux constantes d'intégration a et b sont fixées par les conditions initiales. Finalement

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + x_0/\tau)t] e^{-t/\tau}. \quad (6.43)$$

Démonstration alternative. – Notons qu'il est possible de déduire la solution précédente à partir de la solution générale (6.41), en utilisant la continuité de la solution générale dans les paramètres du problème. Pour cela nous prenons la limite $\Delta' \rightarrow 0$ dans (6.41). Pour simplifier l'analyse, posons $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\Delta'}$, i.e. $\lambda_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm \epsilon$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-t/\tau}}{2\epsilon} \left\{ \left[\left(\frac{1}{\tau} + \epsilon \right) x_0 + v_0 \right] \overbrace{e^{\epsilon t}}^{1+\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2)} - \left[\left(\frac{1}{\tau} - \epsilon \right) x_0 + v_0 \right] \overbrace{e^{-\epsilon t}}^{1-\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \right\} \\ &= \frac{e^{-t/\tau}}{2\epsilon} \left\{ \overbrace{\left[\frac{x_0}{\tau} + v_0 \right] - \left[\frac{x_0}{\tau} + v_0 \right]}^{=0} + 2\epsilon x_0 + \left(\frac{x_0}{\tau} + v_0 \right) 2\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} \end{aligned}$$

ce qui conduit bien à (6.43) dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$.

6.4.5 Régime de faible amortissement ($\omega_0\tau > 1$)

La limite de faible amortissement (discriminant réduit négatif $\Delta' < 0$, i.e. $1/\tau < \omega_0$) est plus intéressante. Dans ce cas les deux racines du polynôme caractéristique sont complexes. Pour simplifier la discussion nous introduisons la notation

$$\omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2} \quad (\omega_1 = \sqrt{-\Delta'}) \quad \text{d'où } \lambda_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm i\omega_1. \quad (6.44)$$

Les deux solutions ont donc la forme d'une exponentielle décroissante $e^{-t/\tau}$ que multiplie une exponentielle complexe, i.e. une fonction oscillante. Nous pouvons écrire la solution générale comme :

$$x(t) = [C e^{i\omega_1 t} + D e^{-i\omega_1 t}] e^{-t/\tau},$$

où $C = D^*$ pour que la solution soit réelle. En posant $C = \tilde{A}/2$ avec $\tilde{A} = A e^{i\phi}$ on obtient

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t + \phi) e^{-t/\tau} = [a \cos(\omega_1 t) + b \sin(\omega_1 t)] e^{-t/\tau} \quad (6.45)$$

À cause de la présence de l'exponentielle, la fonction n'est pas périodique; il est cependant utile d'introduire la *pseudo-période*

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (6.46)$$

pour caractériser les oscillations. Notons que la pseudo-période est supérieure à la période propre, $T_1 = T/\sqrt{1 - (\omega_0\tau)^2} > T$, ce qui était attendu puisque le frottement ralentit le mouvement.

Les constantes d'intégration a et b peuvent être reliées aux conditions initiales :

$$x(t) = \left[x_0 \cos(\omega_1 t) + \left(\frac{x_0}{\omega_1 \tau} + \frac{v_0}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) \right] e^{-t/\tau} \quad (6.47)$$

Donnons également l'expression de la vitesse :

$$\dot{x}(t) = \left[v_0 \cos(\omega_1 t) - \left(\frac{x_0 \omega_0^2}{\omega_1} + \frac{v_0}{\omega_1 \tau} \right) \sin(\omega_1 t) \right] e^{-t/\tau}, \quad (6.48)$$

qui sera utile par la suite.

Démonstration alternative. – Nous pointons encore une fois que la solution (6.47) aurait pu être directement déduite de (6.41) en y injectant $\lambda_{\pm} = 1/\tau \pm i\omega_1$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-t/\tau}}{2i\omega_1} \left\{ \left[\left(\frac{1}{\tau} + i\omega_1 \right) x_0 + v_0 \right] e^{2i\omega_1 t} - \left[\left(\frac{1}{\tau} - i\omega_1 \right) x_0 + v_0 \right] e^{-2i\omega_1 t} \right\} \\ &= e^{-t/\tau} \left\{ \left(\frac{x_0}{\tau} + v_0 \right) \frac{e^{2i\omega_1 t} - e^{-2i\omega_1 t}}{2i\omega_1} + x_0 \frac{e^{2i\omega_1 t} + e^{-2i\omega_1 t}}{2} \right\} \end{aligned}$$

qui coïncide avec (6.47).

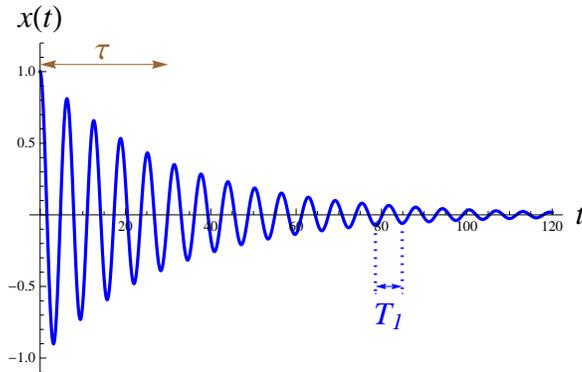


FIGURE 6.9: Régime de faible amortissement pour $\omega_0\tau = 30$. ($x_0 = 1$ & $v_0 = 0$).

Régime de « très faible » amortissement. – Lorsque le frottement est très faible, $\lambda \rightarrow 0$, plus précisément lorsque $1/\tau \ll \omega_0$, on retrouve la pulsation propre de l'oscillateur :

$$\omega_1 \simeq \omega_0.$$

Dans ce cas, il y a donc un *découplage entre les deux échelles de temps* $\tau \gg T$ caractérisant l'amortissement et la période des oscillations $T_1 \simeq T$. De nombreuses oscillations se produisent avant que l'oscillateur ne retrouve sa position d'équilibre en $x = 0$ sous l'effet du frottement, ce qui se produit sur une échelle de temps égale à quelques τ (figure 6.9).

6.4.6 *Étude énergétique – Facteur de qualité (cas $\omega_0 > 1/\tau$)*

Énergie mécanique. – Nous limitons les considérations énergétiques au régime d'amortissement faible, $1/\tau < \omega_0$. Nous pouvons calculer l'énergie mécanique à partir des expressions (6.47) et (6.48). Nous simplifions le calcul en considérant la situation où $v_0 = 0$. Le calcul reste un peu fastidieux, bien que sans difficulté. On pourra vérifier que :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \left[1 + \frac{\sin(2\omega_1 t)}{\omega_1 \tau} + 2 \left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 \tau} \right)^2 \right] e^{-2t/\tau}. \quad (6.49)$$

En présence de dissipation, le système n'est *pas conservatif* et **l'énergie mécanique décroît** au cours du temps.

Nous nous concentrons maintenant sur le cas du très faible amortissement, $1/\tau \ll \omega_0 \simeq \omega_1$, qui conduit à quelques simplifications. Nous pouvons négliger le terme oscillant de l'énergie. Nous obtenons une simple décroissance exponentielle (lente à l'échelle de la période T)

$$E_m(t) \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 e^{-2t/\tau}. \quad (6.50)$$

Ce résultat aurait pu être déduit plus simplement en remarquant que la loi horaire (6.47) peut être approximée par

$$x(t) \simeq x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-t/\tau}$$

d'où

$$E_c(\dot{x}(t)) \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) e^{-2t/\tau} \quad (6.51)$$

$$E_p(x(t)) \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) e^{-2t/\tau} \quad (6.52)$$

qu'on comparera à (6.22) et (6.23).

Facteur de qualité. – Introduisons le « *facteur de qualité* »

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \frac{\text{énergie stockée au temps } t}{\text{énergie perdue pendant une pseudo-période}} \quad (6.53)$$

pour caractériser l'efficacité de la dissipation. L'expression approchée obtenue plus haut, éq. (6.50), nous donne précisément :

$$Q \simeq 2\pi \frac{\frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 e^{-2t/\tau}}{\frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 (e^{-2t/\tau} - e^{-2(t+T_1)/\tau})} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2T_1/\tau}}.$$

En utilisant que $T_1 \simeq T \ll \tau$, nous pouvons développer l'exponentielle $1 - e^{-2T_1/\tau} \simeq 2T_1/\tau$ d'où nous concluons que⁹

$$\boxed{Q \simeq \frac{1}{2} \omega_0 \tau \gg 1} \quad (6.54)$$

Le facteur de qualité a été défini par des considérations énergétiques ; l'expression finale, $Q \simeq \pi\tau/T$ montre qu'il mesure également le *nombre typique d'oscillations avant amortissement du mouvement* (figure 6.9).

Facteur de qualité Q :

$2\pi/Q$ est la fraction d'énergie perdue par période. Q correspond aussi au nombre typique d'oscillations avant amortissement. Dans la limite de faible amortissement, on a

$$Q \simeq \frac{1}{2} \omega_0 \tau.$$

9. On a utilisé le développement limité $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$ pour $x \rightarrow 0$.

Ordres de grandeurs : Comme son nom l'indique, le facteur de qualité Q mesure la « qualité » d'un oscillateur, i.e. sa faculté à osciller sans s'amortir. Donnons deux exemples de « bons » oscillateurs :

- Corde de piano. Un instrument de musique est un résonateur dont on cherche à maximiser le facteur de qualité afin que le son persiste. Les fréquences s'échelonnent typiquement entre quelques 10 Hz et quelques kHz. Prenons $f \sim 1$ kHz. D'autre part, lorsque l'on frappe une touche, le son persiste sur un temps de l'ordre de la seconde, i.e. $\tau \sim 1$ s. Nous déduisons l'ordre de grandeur $Q \sim 10^3$.
- Atome d'hydrogène. On peut assimiler l'oscillation d'un électron autour du proton à un problème d'oscillateur. Considérons par exemple un électron dans le premier état excité, appelé « 2p ». La période de l'orbite est $T_{2p} \simeq 10^{-15}$ s. À cause du couplage au champ électromagnétique, l'atome ne reste pas dans son état excité mais retombe dans son état fondamental, noté 1s (ce phénomène est appelé « l'émission spontanée »). Le vide électromagnétique génère l'analogie d'une force de friction sur l'électron. Le taux de désexcitation (dans le vide) est $\Gamma_{2p \rightarrow 1s} \simeq 0.66 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ ($\leftrightarrow 1/\tau$).¹⁰ On déduit un facteur de qualité $Q \simeq 2\pi/(T_{2p}\Gamma_{2p \rightarrow 1s}) \simeq 10^7$.

10. Pour en savoir plus : chapitre 15 de C. Texier, *Mécanique quantique*, Dunod, 2011.

6.5 Oscillateur amorti forcé – Résonance

6.5.1 Introduction

Nous terminons le chapitre en revenant sur la question importante de l'oscillateur forcé, dans le cadre d'un modèle plus réaliste prenant en compte la présence de dissipation, par exemple pour modéliser la situation de la figure 6.7.

Nous décrivons donc une masse soumise à

- la force de rappel,
- la force de frottement fluide,
- une force extérieure sinusoïdale de pulsation ω a priori *distincte* de la pulsation propre de l'oscillateur, $\omega \neq \omega_0$.

Le P.F.D conduit à l'équation différentielle non homogène du second ordre :

$$\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos(\omega t), \quad (6.55)$$

où ω est a priori différente de la pulsation propre ω_0 . Nous procédons comme précédemment pour résoudre l'équation non homogène : la solution est décomposée en deux contributions :

$$x(t) = \underbrace{x_{\text{homo}}(t)}_{\text{Éq. (6.45)}} + x_{\text{part}}(t)$$

La solution homogène correspondant au problème étudié dans la section 6.4, nous allons pouvoir nous concentrer sur la recherche et l'analyse

de la solution particulière.

6.5.2 Analyse du régime de faible amortissement – Résonance

Nous procédons exactement comme dans la section 6.3. Les équations seront un peu plus compliquées du fait de la présence du terme de friction et l'avantage qu'il y a à complexifier la solution devient assez explicite. Considérons l'équation différentielle auxiliaire :

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) + \frac{2}{\tau} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) + \omega_0^2 \tilde{x}(t) = \omega_0^2 A_{\text{ext}} e^{i\omega t} \quad \text{avec } x(t) = \text{Re } \tilde{x}(t) \quad (6.56)$$

Afin de compenser le terme oscillant du second membre de l'équation, nous devons chercher une solution sous la forme :

$$\tilde{x}_{\text{part}}(t) = \tilde{A}_\omega e^{i\omega t}. \quad (6.57)$$

Injectant cette forme dans l'équation différentielle, nous obtenons l'expression du coefficient complexe :

$$\tilde{A}_\omega = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i}{\tau}\omega} A_{\text{ext}}. \quad (6.58)$$

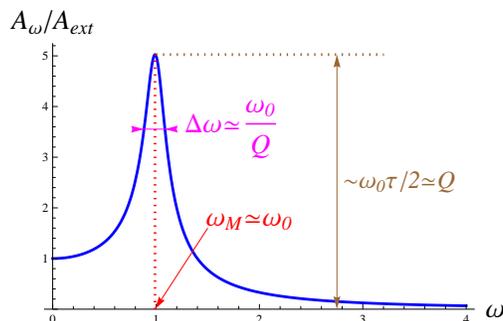
Nous pouvons revenir à la solution réelle

$$x_{\text{part}}(t) = A_\omega \cos(\omega t + \phi_\omega) \quad (6.59)$$

où l'amplitude et la phase de $\tilde{A}_\omega = A_\omega e^{i\phi_\omega}$ sont ¹¹

$$A_\omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2}} A_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \tan \phi_\omega = \frac{2\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (6.60)$$

Le signe négatif du déphasage, $\phi_\omega \in [-\pi, 0]$ (cf. figure 6.11) traduit le fait que la réponse de l'oscillateur est *en retard* sur l'excitation (la force extérieure).



Un examen rapide de A_ω montre qu'elle présente un comportement assez similaire à l'amplitude (6.33) obtenue en l'absence de dissipation,

11. Nous utilisons que le module et la phase de $\frac{1}{x-iy}$ sont donnés respectivement par $1/\sqrt{x^2+y^2}$ et $e^{i\phi} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, i.e. $\tan \phi = y/x$.

FIGURE 6.10: Amplitude en fonction de la fréquence de la force extérieure; la courbe correspond à $\omega_0 \tau = 10$.

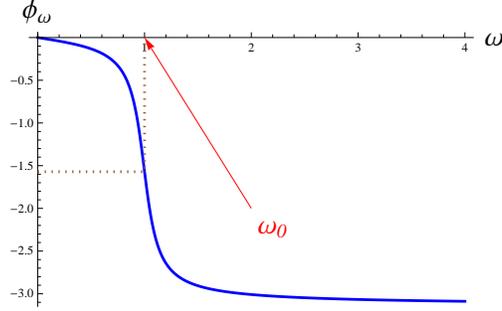


FIGURE 6.11: Déphasage en fonction de la fréquence extérieure. À résonance, $\omega = \omega_0$, l'oscillateur est en retard d'un quart de période ($\phi_\omega = -\pi/2$); la courbe correspond à $\omega_0\tau = 10$.

à la différence importante que l'amplitude ne présente plus de divergence pour $\omega = \omega_0$. Nous pouvons cependant essentiellement répéter les conclusions de la section 6.3.2 :

- Aux petites fréquences, $\omega \ll \omega_0$, la force extérieure est très lente ; l'oscillateur a le temps de répondre à la perturbation d'où $A_\omega \simeq A_{\text{ext}}$ (qui serait le résultat statique). Ceci explique que la réponse soit *en phase* avec la force extérieure, $\phi_\omega \simeq 0$.
- L'amplitude du mouvement augmente fortement lorsque ω se rapproche de la pulsation propre de l'oscillateur : c'est le phénomène de **résonance**, mais cette fois limité par la dissipation (le dénominateur de A_ω ne s'annule plus, grâce à la présence du terme proportionnel à $1/\tau^2$). Lorsque $\omega \sim \omega_0$, le mouvement est *un quart de période en retard* sur la force (on dit « en quadrature »), $\phi_\omega \simeq -\pi/2$ (nous avons remarqué que l'amplification est plus efficace si l'on exerce une force au moment où la vitesse est maximale).
- Aux hautes fréquences, $\omega \gg \omega_0$, l'oscillateur n'a pas le temps de répondre à l'excitation : il est *en opposition de phase*, $\phi_\omega \simeq -\pi$, et résiste à la force, d'où $A_\omega \ll A_{\text{ext}}$.

Analysons maintenant plus en détail l'amplitude, et en particulier le voisinage de la résonance. Nous cherchons d'abord la position du maximum de A_ω , qui correspond au minimum du dénominateur :

$$\frac{d}{d(\omega^2)} \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2 \right] = 0 \Rightarrow 2(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{4}{\tau^2} = 0$$

Le maximum correspond à la pulsation

$$\omega_M \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\omega_0^2 - 2/\tau^2} \quad (6.61)$$

légèrement en dessous de la fréquence $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ introduite plus haut. À cette fréquence, nous déduisons de (6.60) que l'amplitude est donnée par

$$\boxed{\frac{A_{\omega_M}}{A_{\text{ext}}} = \frac{\omega_0^2\tau}{2\omega_1} \simeq \frac{\omega_0\tau}{2} \simeq Q} \quad (6.62)$$

Le calcul de l'amplitude maximale fait donc apparaître le facteur de qualité de l'oscillateur, défini dans la section précédente.

Nous pouvons également déterminer la largeur de la courbe. Nous cherchons les fréquences ω_{\pm} où l'amplitude est réduite d'un facteur $\sqrt{2}$. Écrivons

$$A_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\omega_M}$$

nous obtenons une équation du second degré pour ω^2 :

$$\omega^4 - 2\omega_M^2 \omega^2 - \frac{8}{\tau^2} \omega_1^2 = 0.$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_M^2 \pm \frac{2\omega_1}{\tau},$$

i.e.¹²

$$\omega_{\pm} = \omega_M \sqrt{1 \pm \frac{2\omega_1}{\omega_M^2 \tau}} \underset{\omega_0 \tau \gg 1}{\simeq} \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{\omega_0 \tau} \right).$$

La largeur du pic de résonance est directement reliée au coefficient de frottement :

$$\Delta\omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_+ - \omega_- \simeq \frac{2}{\tau} \simeq \frac{\omega_0}{Q} \quad (6.63)$$

Il est donc d'autant plus étroit que le frottement est faible, i.e. le facteur de qualité est grand.

6.5.3 Analyse énergétique

En présence de dissipation et lorsque l'oscillateur est isolé (non forcé) l'énergie mécanique décroît rapidement, sur une échelle de temps caractéristique τ . La force extérieure injecte de l'énergie dans le système afin d'entretenir le mouvement (cette énergie est dissipée par frottement, i.e. elle est convertie en énergie thermique). Nous souhaitons quantifier l'énergie absorbée par le système : pour cela nous calculons la puissance instantanée de la force extérieure¹³

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) = F_{\text{ext}}(t) \dot{x}_{\text{part}}(t) = -m\omega_0^2 \omega A_{\text{ext}} A_{\omega} \underbrace{\cos(\omega t) \sin(\omega t + \phi_{\omega})}_{\frac{1}{2} [\sin(2\omega t + \phi_{\omega}) + \sin(\phi_{\omega})]}$$

Cette expression est appropriée au moyennage temporel :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle = -\frac{1}{2} m\omega_0^2 \omega A_{\text{ext}} A_{\omega} \sin(\phi_{\omega}).$$

Si nous revenons à la définition de la phase, ou plutôt à (6.58), nous voyons que

$$\sin(\phi_{\omega}) = \frac{-2\omega/\tau}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2}}$$

12. Nous utilisons le développement limité $\sqrt{1 + \epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$.

13. Encore des formules trigonométriques (dédites des précédentes) :
 $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
 $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
 $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)].$

Cette expression nous permet d'obtenir la puissance moyenne apportée au système :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle = m\omega_0^2 A_{\text{ext}}^2 \frac{\omega_0^2}{\tau} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2} \quad (6.64)$$

La puissance s'annule aussi bien aux basses fréquences, $\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle \propto_{\omega \rightarrow 0} \omega^2$, qu'aux hautes fréquences, $\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle \propto_{\omega \rightarrow \infty} 1/\omega^2$. Si nous cherchons la position du maximum de $\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$, nous obtenons

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle \quad \text{maximum pour} \quad \omega = \omega_0. \quad (6.65)$$

La puissance absorbée est maximum *précisément à résonance*.

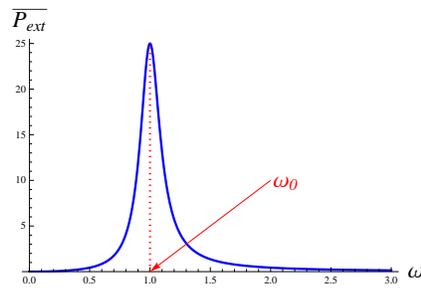


FIGURE 6.12: Puissance de la force extérieure en fonction de la pulsation ; la courbe correspond à $\omega_0\tau = 10$.

6.5.4 Régime transitoire vs régime permanent

Pour clore ce chapitre, nous revenons sur le point évoqué au début de la section : la solution complète $x(t) = x_{\text{homo}}(t) + x_{\text{part}}(t)$ est la somme de la solution de l'équation homogène, donnée par l'eq. (6.45), et de la solution particulière (6.59).

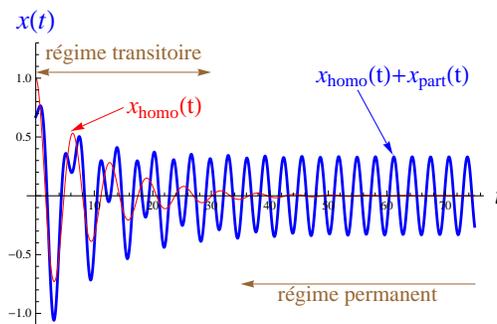


FIGURE 6.13: Déplacement de l'oscillateur. En trait fin : contribution de la solution de l'équation homogène. La courbe correspond à $\omega_0\tau = 10$ et $\omega/\omega_0 = 2$.

En présence d'amortissement, ces deux solutions présentent des caractères *très différents* puisque $x_{\text{homo}}(t)$ décroît exponentiellement avec le temps, sur l'échelle de temps τ , alors que $x_{\text{part}}(t)$ a une amplitude fixée par la force extérieure (d'autre part les deux fonctions oscillent à des fréquences distinctes). C'est donc la solution $x_{\text{homo}}(t)$ qui *porte*

toute l'information sur les conditions initiales, i.e. x_0 et v_0 . Lorsque $t \gtrsim$ quelques τ , cette information est donc perdue, et le mouvement de l'oscillateur entièrement déterminé par la force extérieure. On parle de « régime transitoire » pour désigner l'intervalle de temps sur lequel l'oscillateur garde la mémoire des conditions initiales. Lorsque celle-ci est perdue, on dit que le « régime permanent » s'est établi.

Annexe : Oscillateur anharmonique (HORS PROGRAMME)

Nous avons remarqué au début de la section qu'une propriété remarquable de l'oscillateur harmonique (ou oscillateur linéaire) est que la période est la même pour toutes les trajectoires :

$$\text{oscillateur harmonique} \Rightarrow \text{période indépendante de } E_m$$

Pour bien apprécier cette observation, nous considérons dans cette petite annexe la situation où cette propriété n'est plus respectée, i.e. nous étudions un oscillateur *non harmonique* (non amorti et libre). Les calculs apparaîtront probablement un peu difficiles, donc cette annexe n'est recommandée qu'à ceux qui ont un goût pour les calculs plus techniques.

Considérons l'exemple du pendule de la figure 6.2 dont le mouvement est décrit par l'équation différentielle non linéaire

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0,$$

où $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. L'équation peut être résolue en utilisant le théorème de l'énergie mécanique. Cette dernière prend la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta.$$

En utilisant que $E_m = \text{constante} \stackrel{\text{def}}{=} -mgl \cos \theta_E$, nous pouvons écrire

$$\dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_E)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_E)}} = \pm \omega_0 dt$$

où les deux signes correspondent aux allers-retours. L'angle varie de $-\theta_E$ à $+\theta_E$ en une demi-période, d'où

$$T(E) = \frac{2}{\omega_0} \int_{-\theta_E}^{+\theta_E} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_E)}}.$$

Nous avons obtenu la période comme une fonction de l'énergie non triviale, via $\theta_E = \arccos(-E/mgl)$ (nous notons simplement $E_m \rightarrow E$). Cette fonction est définie par une intégrale, ce qui permet déjà de l'analyser (ou de la calculer numériquement). Nous montrons qu'elle peut être reliée à une fonction spéciale assez populaire et largement étudiée dans la littérature mathématique. En utilisant $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$ nous écrivons

$$T(E) = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\theta_E} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_E/2) - \sin^2(\theta/2)}}. \quad (6.66)$$

Le changement de variable $\sin \alpha = \sin(\theta/2) / \sin(\theta_E/2)$ nous permet d'obtenir

$$T(E) = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_E/2) \sin^2 \alpha}}. \quad (6.67)$$

L'intérêt de cette nouvelle représentation intégrale est d'établir la relation avec une fonction bien connue, appelée « intégrale elliptique de première espèce », notée $K(k)$:

$$T(E) = \frac{4}{\omega_0} K(\sin(\theta_E/2)), \quad (6.68)$$

connue notamment des programmes de calcul symbolique comme **Mathematica** ou **Maple**.

Montrons l'intérêt de la représentation intégrale (6.66) pour l'analyse des cas limites. Considérons la limite des petits angles, $\theta < \theta_E \ll 1$ permettant de développer les sinus :

$$T(E) \underset{\theta_E \ll 1}{\simeq} \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\theta_E} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_E^2 - \theta^2}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \stackrel{u=\sin\alpha}{=} \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

On a retrouvé l'expression de la période de l'oscillateur harmonique vue plus haut, ce qui s'explique comme suit : dans la limite des petits angles, le pendule n'explore que la partie quadratique de l'énergie potentielle $E_p(\theta) = -mgl \cos \theta \simeq -mgl + \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2\theta^2$.

Lorsque l'énergie est telle que l'oscillateur explore des grands angles, la période excède $2\pi/\omega_0$: pour une énergie E le domaine angulaire exploré par l'oscillateur est plus grand que pour l'oscillateur harmonique (cf. partie gauche de la figure 6.14).

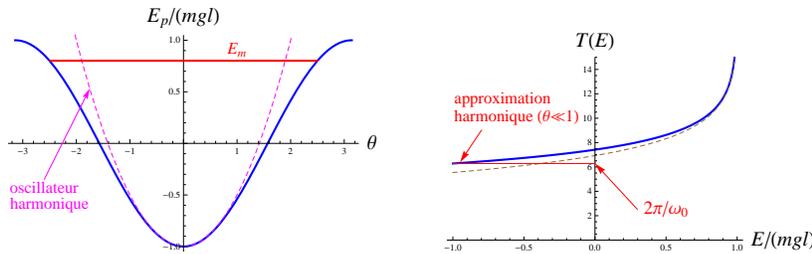


FIGURE 6.14: À gauche : Énergie potentielle pour le potentiel anharmonique. À droite : Période de l'oscillateur anharmonique en fonction de l'énergie. La ligne en tirets correspond à l'approximation logarithmique obtenue dans le texte.

Lorsque E s'approche de la valeur maximale de la barrière de potentielle, $E \rightarrow mgl^-$ i.e. $\theta \rightarrow \pi^-$, on utilise le comportement limite $K(k) \simeq \ln(4/k')$ où $k' = \sqrt{1-k^2}$ pour $k \rightarrow 1^-$, i.e.

$$T(E) \underset{\theta_E \rightarrow \pi^-}{\simeq} \frac{4}{\omega_0} \ln\left(\frac{8}{\pi - \theta_E}\right) \simeq \frac{2}{\omega_0} \ln\left(\frac{32}{1 - E/mgl}\right) \text{ pour } E \rightarrow mgl^-.$$

Nous avons utilisé que l'argument de l'intégrale elliptique est $k = \sin(\theta_E/2)$ d'où $k' = \cos(\theta_E/2) \simeq (\pi - \theta_E)/2$, qui peut être relié à l'énergie puisque $E/(mgl) = -\cos(\theta_E)$. La période diverge logarithmiquement lorsque E tend vers $+mgl$. Cette divergence n'est pas surprenante puisque si le pendule a une énergie mécanique supérieure à $+mgl$, il n'y a plus de mouvement oscillant : le pendule tourne autour de son axe avec une vitesse qui est modulée au cours du temps mais ne change pas de signe.