Devoir à rendre le **26 novembre 2015** :

Oscillateur harmonique et théorème d'Ehrenfest

La rédaction doit être synthétique (mais complète !)

On considère une particule quantique soumise à un potentiel quadratique en une dimension. L'Hamiltonien (l'opérateur « énergie ») est de la forme

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \,, \tag{1}$$

où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont respectivement les opérateurs position et impulsion.

1/ Commutateurs.– On rappelle la définition du commutateur de deux opérateurs A et B : $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$.

a) Retrouver rapidement la relation de commutation canonique $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$.

b) Verifier que $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$. Déduire les deux commutateurs $[H, \hat{x}]$ et $[H, \hat{p}]$.

2/ Théorème d'Ehrenfest.– On note $|\,\psi(t)\,\rangle$ la solution de l'équation de Schrödinger

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\psi(t)\,\rangle = H|\,\psi(t)\,\rangle \,. \tag{2}$$

Que vaut $\frac{\partial}{\partial t}\langle\,\psi(t)\,|$? Montrer

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\,\langle A\rangle_{\psi(t)} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\langle [H, A]\rangle_{\psi(t)}} \tag{3}$$

où $\langle A\rangle_{\psi(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\,\psi(t)\,|A|\,\psi(t)\,\rangle$ est la moyenne d'une observable A (supposée indépendante de t).

3/ Équations du mouvement.

a) Déduire deux équations différentielles couplées du premier ordre pour $\langle\hat{x}\rangle_{\psi(t)}$ et $\langle\hat{p}\rangle_{\psi(t)}$.

b) Résoudre ce couple d'équations différentielles.

c) Pourrait-on procéder de la même manière pour étudier la dynamique de l'oscillateur quartique $H = \hat{p}^2/(2m) + \lambda\,\hat{x}^4$?

4/ Opérateurs création/annihilation.– Nous introduisons l'opérateur d'annihilation [1]

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \,. \tag{4}$$

Analyser la dimension de a.

a) Calculer $[a, a^\dagger]$ et exprimer H en fonction de a et $a^\dagger$. Déduire $[H, a]$.

b) En utilisant à nouveau le théorème d'Ehrenfest trouver une équation différentielle pour $\langle a\rangle_{\psi(t)}$ puis la résoudre. Commenter le résultat et comparer aux calculs de la question **3**.

[1] On a vu en cours que cet opérateur détruit une excitation en faisant passer du $n$ème état excité au $n-1$ème.