TD n°1 :

1 Relation de Planck-Einstein

1.1 Effet photoélectrique

Introduction : L'étude de l'effet photoélectrique, découvert par Rudolf Hertz en 1887 et qui concerne l'émission d'électrons d'un métal soumis à un rayonnement ultraviolet, a joué un rôle très important dans l'émergence de la physique quantique. Lorsqu'on éclaire un métal avec un rayonnement *monochromatique* de pulsation ω on observe un effet de seuil :

- l'émission d'électrons n'a lieu que pour $\omega \geqslant \omega_s$ où ω_s dépend du métal. La caractéristique courant-tension démarre à la « contre-tension » $V_0 < 0$, qui fournit une information sur l'énergie cinétique *maximale* des électrons émis, $E_c^{\max}$.
- Le point remarquable est que ω_s et la contre tension –donc $E_c^{\max}$– sont *indépendantes* de l'intensité lumineuse (alors que l'énergie déposée dans le métal est proportionnelle au carré de l'intensité de l'onde électromagnétique).
- La contre-tension varie linéairement avec la pulsation ω :

$$E_c^{\max} = \hbar\,(\omega - \omega_s) \qquad \text{pour} \quad \omega > \omega_s\,, \tag{1}$$

  où la pente est *universelle* (indépendant du métal) : c'est la constante de Planck $\hbar$.

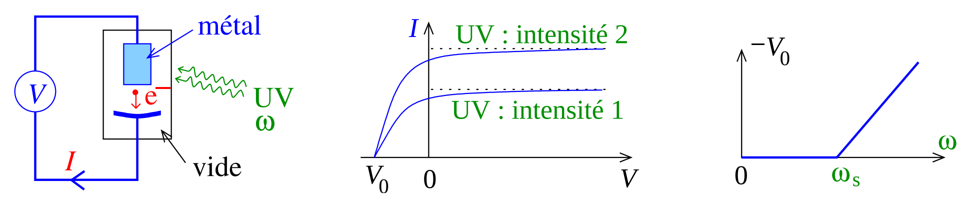

FIGURE 1 – Figure tirée de : C. Texier, *Mécanique quantique*, 2nde éd., Dunod, 2015.

L'interprétation donnée par Albert Einstein en 1905 de ce phénomène est que la lumière monochromatique ne peut être absorbée par le métal que par **quanta** d'énergie

$$\boxed{E = \hbar\omega} \qquad \text{(relation d'Einstein-Planck).} \tag{2}$$

Les quanta d'énergie sont identifiés avec les particules élémentaires médiatrices de l'interaction électromagnétique : les **photons** (la terminologie date de 1926 seulement). L'énergie du photon est divisée en une énergie minimum nécessaire pour arracher un électron du métal, le « travail d'extraction » $W = \hbar\omega_s$ et l'énergie cinétique de l'électron. Einstein établit ainsi une correspondance entre un concept matériel (l'énergie d'une particule) et un concept ondulatoire (la pulsation).

1/ On donne $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ S.I. Quelle est la dimension de $\hbar$? Déduire l'unité. Calculer $\hbar c$ en eV.nm.

2/ Rappeler la relation de dispersion pour des ondes planes lumineuses dans le vide.

3/ Le travail d'extraction du cuivre est de $W = 4.4\,\mathrm{eV}$. Quelle est l'énergie cinétique maximale des électrons si un métal est éclairé avec de la lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 250\,\mathrm{nm}$? Quelle est la vitesse des électrons associée à $E_c^{\max}$?

4/ Si nous attribuons l'énergie $E = 0$ au vide (extérieur du métal), les énergies des électrons de conduction de distribuent dans l'intervalle $[-(\varepsilon_F + W), -W]$. Dans le fer le travail d'extraction est $W = 4.31\,\mathrm{eV}$ et l'énergie de Fermi $\varepsilon_F = 11.1\,\mathrm{eV}$. Quelle est la longueur d'onde maximale du rayonnement permettant d'extraire les électrons de plus haute énergie ? Et les électrons de conduction de plus basse énergie ?

1.2 Modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène

En 1913, Niels Bohr a proposé un modèle permettant de rendre compte de l'existence des raies spectroscopiques : l'absorption de la lumière par une vapeur atomique n'est possible que pour un ensemble de valeurs discrètes de fréquences lumineuses.

L'interaction proton-électron est due à la force coulombienne

$$\vec{F}_{\mathrm{Coul}} = -\frac{e^2}{r^2}\vec{u}_r \text{ où } e^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \qquad \text{avec } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times 10^9\ \mathrm{S.I.} \tag{3}$$

r est la distance électron-proton et $\vec{u}_r$ un vecteur unitaire. Dans l'exercice on ne s'intéresse qu'aux trajectoires *circulaires* décrivant *l'état lié* proton-électron (l'atome).

1/ En appliquant la relation fondamentale de la dynamique ($m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\mathrm{Coul}}$), montrer que l'énergie cinétique est $E_c = e^2/(2r)$. Déduire l'énergie mécanique.

2/ Calculer e^2 en eV.nm. Sachant que l'électron est à distance $r \sim 0.5$ Å dans l'état de plus basse énergie, estimer cette dernière (nous allons justifier qu'il existe une énergie minimale...).

3/ Règle de quantification.– Bohr a *postulé* la quantification de l'action d'une trajectoire circulaire $S = \oint \vec{p}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2n\pi\hbar$ où $n \in \mathbb{N}^*$ (i.e. seules sont autorisées ces trajectoires). Appliquer cette règle aux orbites circulaires. Déduire que seules des valeurs discrètes de l'énergie de liaison sont autorisées, notées E_n. Donner l'expression des rayons r_n des trajectoires à ces énergies.

4/ Raies spectrales.– L'atome ne peut exister qu'aux énergies E_n. À quelles pulsations la lumière peut-elle être absorbée par l'atome ? Dessiner l'allure de la probabilité d'absorption en fonction de la pulsation lorsque l'atome est dans son état de plus basse énergie. Calculer quelle est la plus grande longueur d'onde à laquelle la lumière peut-être absorbée dans ce cas.

5/ Ions hydrogénoïdes.– Un ion hydrogénoïde est obtenu en ionisant $Z-1$ fois l'atome de numéro atomique Z. Donner les énergies E_n^Z et les rayons r_n^Z caractérisant les orbites de Bohr.

☺ **Pour en savoir plus :**

C. Aslangul, ≪ Mécanique quantique ≫, t. 1, De Boeck, 2007 (effet photoélectrique → chap. 5 ; atome de Bohr → chap. 6).

2 Expérience d'Young avec des particules matérielles

La dualité des points de vue corpusculaire-ondulatoire ne s'applique pas seulement à la lumière mais est de portée très générale. En 1924, Louis de Broglie suggère d'attribuer une longueur d'onde $\lambda = h/p$, où $h = 2\pi\hbar$, à une particule *matérielle* d'impulsion p, ce que nous préférons écrire en termes de grandeurs vectorielles :

$$\boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}} \qquad \text{(relation de de Broglie)} \tag{4}$$

où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde de l'onde. Cette relation complète donc la relation d'Einstein. Une vérification expérimentale directe sera apportée en 1927 par Davisson et Germer, qui observent la figure d'interférences produite par une onde électronique diffractée par un réseau cristallin (grâce à un accident de laboratoire (!)).

1/ Une expérience d'interférence d'Young a été réalisée avec une source de neutrons (figure). La vitesse des neutrons étant $v \simeq 200\,\mathrm{m.s}^{-1}$, quelle est la longueur d'onde associée à cette source de neutrons ?

2/ Le même groupe d'expérimentateurs a été capable de réaliser des interférences avec une source de molécules de fullérène C_{60} ! Sachant que le noyau de carbone contient 12 nucléons (6 protons et 6 neutrons), quelle est la masse d'une molécule de fullérène ? Estimer sa taille (C_{60} est formée de 20 hexagones et 12 pentagones et la liaison entre carbones a une longueur moyenne $a = 1.4\,\text{Å}$? Quelle est la longeur d'onde de l'onde de molécules de fullérènes de vitesse $v \simeq 130\,\mathrm{m.s}^{-1}$?

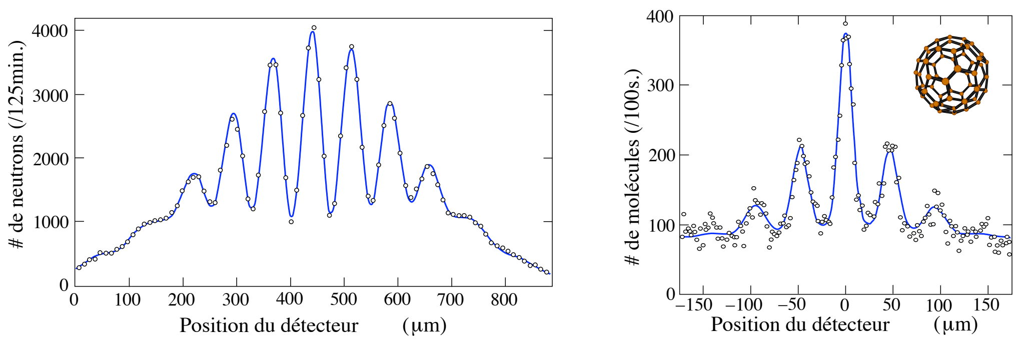

Figure 2 – **Interférences de particules.** À gauche : *Expérience d'Young réalisée avec des neutrons. [A. Zeilinger, Rev. Mod. Phys.* **60**, *1067 (1988)].* À droite : *Diffraction de molécules de fullerène* (C_{60}) *par un réseau de fentes [O. Nairz, M. Arndt & A. Zeilinger, Am. J. Phys.* **71**, *319 (2003)].* Figure tirée de : C. Texier, *Mécanique quantique*, 2nde éd., Dunod, 2015.

3 Fonction d'onde et distribution de probabilité

On rappelle que l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde (Max Born, 1926) est celle d'une « amplitude de densité de probabilité ». Autrement dit, dans la situation unidimensionnelle, $|\psi(x)|^2 \mathrm{d}x$ mesure la probabilité pour qu'une particule dans un état quantique ψ se trouve dans l'intervalle $[x, x + \mathrm{d}x]$.

On considère la fonction d'onde

$$\psi(x) = C \begin{cases} 1 + x/a & \text{pour } x \in [-a, 0] \\ 1 - x/b & \text{pour } x \in [0, b] \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ sont positifs.} \tag{5}$$

1/ Tracer $\psi(x)$ et la densité de probabilité $|\psi(x)|^2$.

2/ Quelle est la position la plus probable pour la particule ?

3/ Quelle condition doit satisfaire $\psi(x)$? Déduire C en fonction de a et b.

4/ Quelle est la probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[0, \epsilon]$ où $\epsilon > 0$?

5/ Quelle est la position moyenne de la particule $\langle x \rangle_\psi$?

6/ Calculer également $\left\langle x^2 \right\rangle_\psi$ et déduire l'écart type σ_ψ associé.

7/ Reprendre les questions **1**, **2**, **3**, **5** et **6** pour la fonction d'onde $\phi(x) = C\,x\,\mathrm{e}^{-(x/2a)^2}$.
On donne les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,x^{2n}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{n+1/2}}(2n-1)!! \qquad \text{pour } n > 0$$

La double factorielle désigne $(2n)!! = (2n) \times (2n-2) \times \cdots 4 \times 2$ et $(2n+1)!! = (2n+1) \times (2n-1) \times \cdots 3 \times 1$.

Annexe

Charge et masse de l'électron : $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C et $m_e = 0.9 \times 10^{-30}$ kg.
Masse du proton ($\approx$ celle du neutron) : $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.