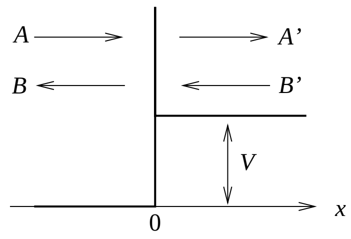
Physique Mésoscopique

Série 1 Semestre d'été 1999/2000

1 Matrice S pour la diffusion par un potentiel unidimensionnel



On considère la diffusion par un potentiel :

$$V(x) = V\,\theta(x) + v\delta(x)\,, \tag{1}$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside.

1) Trouver les deux états stationnaires de diffusion en résolvant l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} \psi_g^E(x) &= A_g e^{ik x} + B_g e^{-ikx} && \text{pour } x < 0 \quad (2)\\ &= A'_g e^{ik'x} && \text{pour } x > 0 \quad (3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_d^E(x) &= B_d e^{-ikx} && \text{pour } x < 0 \quad (4)\\ &= A'_d e^{ik'x} + B'_d e^{-ik'x} && \text{pour } x > 0\,. \quad (5) \end{aligned}$$

2) Calculer le courant de probabilité associé à chacun de ces états. Vérifier que le courant est le même à gauche et à droite de la barrière δ pour chacun des états.

3) Donner la probabilité de transmission T et la probabilité de réflexion R dans chaque cas.

4) La matrice de diffusion S relie les amplitudes de courant des ondes incidentes, $a = \sqrt{v}A$ et $b = \sqrt{v}B$, à celles des ondes diffusées, $a' = \sqrt{v'}A'$ et $b' = \sqrt{v'}B'$. $v = \frac{\hbar k}{m}$ et $v' = \frac{\hbar k'}{m}$ sont les vitesses de groupe associées aux ondes de part et d'autre de la barrière δ. On a donc, par définition :

$$\begin{pmatrix} b \\ a' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ b' \end{pmatrix}\,. \tag{6}$$

Calculer S pour le potentiel $V(x)$. Vérifier que S est unitaire et symétrique.

5) Montrer que la conservation du courant exige que S soit unitaire. On peut alors écrire :

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}\,, \tag{7}$$

où r, t sont les coefficients de réflexion pour la transmission gauche→droite et r', t' ceux décrivant la transmission droite→gauche. Exprimer ces coefficients pour le potentiel $V(x)$ considéré précédemment. Quelle est leur relation avec R et T. Trouver une autre relation entre ces quatre coefficients.

6) Montrez que S doit être symétrique si l'équation de Schrödinger est invariante par renversement du sens du temps.

2 Matrice de transfert

La matrice de transfert T pour un système unidimensionel est définie par

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} . \tag{8}$$

1) Exprimer T en fonction de r, t, r' et t'.

2) Quel avantage peut-il y avoir à utiliser des matrices de transfert ?

En utilisant notamment la matrice T pour le potentiel de l'exercice précédent, calculer la matrice T d'une barrière de potentiel rectangulaire, de hauteur V et de longueur ℓ.