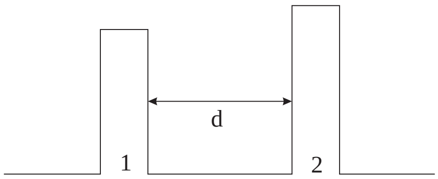
Physique Mésoscopique

Série 2 — Semestre d'été 2000

1 Diffusion résonante unidimensionnelle ; approximation de Breit-Wigner



On rappelle que la matrice de transfert s'écrit :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Les coefficients de transmission et de réflexion pour la diffusion gauche→droite, t et r, et ceux pour la diffusion droite→gauche, t' et r', sont liés par la relation : $\frac{r'}{t'} = -\frac{r^*}{t^*}$.

1) Exprimer le coefficient de transmission de la double barrière en fonction de t_1, t_2, r'_1 et r_2.

2) Retrouver le résultat précédent en sommant les amplitudes de probabilité associées à tous les chemins de diffusion possibles.

3) Dans la suite de l'exercice on suppose que les coefficients de réflexion et de transmission de chacune des barrières sont indépendants de l'énergie. On utilisera :

$$r_{1,2} = -\sqrt{R_{1,2}} \tag{2}$$
$$t_{1,2} = -\mathrm{i}\sqrt{T_{1,2}} \, . \tag{3}$$

Notons que $t_{1,2} = t'_{1,2}$ (invariance par renversement du temps). Comme les barrières de potentiel sont symétriques on a également : $r_{1,2} = r'_{1,2}$. Calculer dans ce cas $T(E) = |t|^2$, la probabilité de transmission à travers la double barrière.

4) Quelle sont les énergies E_n des états propres dans le puits si les barrières deviennent impénétrables (si leurs hauteurs tendent vers l'infini).

5) Si seule la barrière 2 est impénétrable, la particule d'énergie E_n peut s'échapper du puits par effet tunnel à travers la barrière 1, avec un taux de probabilité $\Gamma_{1n}/\hbar$. En supposant que la probabilité de transmission T_1 est très petite, trouver une expression pour $\Gamma_{1n}/\hbar$. Suivre la même procédure pour trouver $\Gamma_{2n}/\hbar$, le taux de probabilité pour quitter le puits par effet tunnel à travers la barrière 2.

6) **Formule de Breit-Wigner**. Montrer que la probabilité de transmission $T(E)$ peut s'écrire au voisinage de l'énergie d'une résonance :

$$T(E) \underset{E \sim E_n}{\simeq} \frac{\Gamma_{1n}\Gamma_{2n}}{(E - E_n)^2 + \frac{(\Gamma_{1n}+\Gamma_{2n})^2}{4}} \, . \tag{4}$$

2 Cristal unidimensionnel

On considère une particule soumise au potentiel périodique :

$$V(x) = v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - na)\,. \tag{5}$$

1) **Théorème de Bloch**. L'opérateur de translation de a est $\hat{T}_a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\hat{p}/\hbar}$ où $\hat{p}$ est l'opérateur d'impulsion. Calculer le commutateur $[\hat{x}, \hat{T}_a]$. Montrer que si le potentiel est périodique de période a, l'hamiltonien commute avec $\hat{T}_a$. En déduire que les états propres peuvent être indicés par un nombre k tel que $\psi_k(x + a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\psi_k(x)$. Quel est le domaine de définition de k ?

Autrement dit on peut indicer les états propres par le paramètre continu k, et un autre nombre quantique (noté n) $\psi_{n,k}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}u_{n,k}(x)$ où $u_{n,k}(x + a) = u_{n,k}(x)$. Cet état est associé à une énergie $E_n(k)$.

2) On rappelle que la matrice de transfert à travers un potentiel δ pour des ondes d'énergie $E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$ est :

$$\mathcal{T}_\delta = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mathrm{i}w}{2q} & -\frac{\mathrm{i}w}{2q} \\ \frac{\mathrm{i}w}{2q} & 1 + \frac{\mathrm{i}w}{2q} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où $w = \frac{2mv}{\hbar^2}$. Calculer la matrice de transfert $\mathcal{T}_R$ pour un pas du réseau.

3) Trouver les valeurs propres de $\mathcal{T}_R$. Quel est le lien avec le théorème de Bloch ? En déduire qu'il ne peut y avoir des états que dans certaines bandes d'énergie.

4) Calculer la densité d'états intégrée par unité de longueur. À cette fin on utilisera la fonction obtenue à la question précédente reliant le vecteur de Bloch k à l'énergie $k = \chi(E)$.