Physique Mésoscopique

Série 4 Semestre d'été 2000

1 Correction de localisation faible et fluctuations de conductance d'un fil diffusif

On peut montrer que la conductivité de conducteurs faiblement désordonnés et cohérents de phase est reliée à la probabilité de retour à l'origine $Z(t)$ d'un problème de diffusion.

La correction de localisation faible (correction à la condutivité de Drude $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau_e}{m} = e^2 D\rho_0(E_F)$) est

$$\Delta\sigma = \langle\sigma\rangle - \sigma_0 = -\frac{2e^2 D}{\pi\hbar V}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, Z(t)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{1}$$

et les fluctuations de la conductivité

$$\left\langle \delta\sigma^2 \right\rangle = \frac{12e^4 D^2}{\beta\pi^2\hbar^2 V^2}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, t\, Z(t)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\,. \tag{2}$$

D est la constante de diffusion, V le volume du système et $\gamma = 1/\tau_\phi = D/L_\phi^2$ l'inverse du temps de cohérence de phase. L'exponentielle sert à exclure les trajectoires diffusives de longueurs supérieures à L_ϕ. $\beta = 1$ lorsqu'il y a symétrie par renversement du temps et $\beta = 2$ sinon.

$Z(t) = \int \mathrm{d}\vec{r}\, P(\vec{r},\vec{r};t)$ où $P(\vec{r},\vec{r}\,';t)$ est solution de $\left[\partial_t - D\left(\vec{\nabla} + \frac{2\mathrm{i}e}{\hbar}\vec{A}\right)^2\right] P(\vec{r},\vec{r}\,';t) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t)$. La probabilité de retour à l'origine $Z(t)$ peut donc s'écrire $Z(t) = \sum_n \mathrm{e}^{-E_n t}$ en fonction des valeurs propres de l'opérateur de diffusion :

$$-D\left(\vec{\nabla} + \frac{2\mathrm{i}e}{\hbar}\vec{A}\right)^2 \psi_n = E_n\psi_n\,. \tag{3}$$

Si le conducteur est connecté on impose des conditions de Dirichlet et si il est isolé des conditions de Neumann (de manière analogue au problème de diffusion).

1) On considère un fil de longueur $L \gg \ell_e$ et de section étroite $s \ll \ell_e^2$, de manière à faire un traitement unidimensionnel du problème de diffusion. $\ell_e = \sqrt{D\tau_e}$ est le libre parcours moyen élastique. Le fil est connecté à ses deux extrémités. Calculer les valeurs propres de l'opérateur de diffusion (pour les conditions aux limites appropriées). En déduire $C(\gamma) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, Z(t)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$.
Rq : On utilisera la relation $\coth \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2+n^2}$ (Gradshteyn [1.421]).

2) La conductance est définie comme $G = I/U$ où U est la tension aux bornes du fil et I le courant qui le traverse. On introduit une conductance adimensionnée : $G = \frac{e^2}{h}g$. Relier g à σ puis exprimer la correction de localisation faible Δg et les fluctuations de conductance $\left\langle \delta g^2 \right\rangle$ en fonction de $C(\gamma)$.

3) Étudier $C(\gamma)$ dans les deux cas limites $L \gg L_\phi$ et $L \ll L_\phi$.

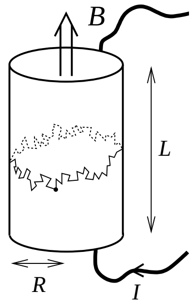
4) Déduire Δg et $\left\langle \delta g^2 \right\rangle$. Pourquoi ces résultats sont-ils qualifiés d'*universels* dans un des deux cas limites ?

2 Expérience de Sharvin et Sharvin (1982)

0) **Correction de localisation faible d'un plan**. On rappelle que $P(\vec{r},\vec{r};t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}}$ pour la diffusion libre dans un espace à d dimensions. Déduire la correction de localisation faible pour

un plan de surface V. Dans ce cas l'intégrale est divergente à $t \to 0$; elle est régularisée en supprimant les contributions des temps $t < \tau_e$, où τ_e est le temps de diffusion élastique, le plus petit temps pour la diffusion : $\int_0^\infty \mathrm{d}t\, Z(t)\, \mathrm{e}^{-t/\tau_\phi} \to \int_0^\infty \mathrm{d}t\, Z(t)\, (\mathrm{e}^{-t/\tau_\phi} - \mathrm{e}^{-t/\tau_e})$.

Cylindre en champ magnétique. On considère un cylindre de longueur L et de rayon R traversé par un flux magnétique $\phi = B\pi R^2$. Le cylindre est connecté à ses deux extrémités.



1) Trouver le spectre de l'opérateur de diffusion sur le cylindre de surface $V = 2\pi R \times L$:

$$-D\left[\left(\partial_x + \frac{\mathrm{i}eBR}{\hbar}\right)^2 + \partial_y^2\right]\psi = E\psi \tag{4}$$

et en déduire la probabilité de retour à l'origine $Z(t)$ (sous la forme d'une double série).

2) Dans la limite où $L \gg L_\phi$ on peut remplacer une des sommes de $Z(t)$ par une intégrale. En déduire une expression de $C(\gamma) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, Z(t)\, \mathrm{e}^{-\gamma t}$ sous la forme d'une série, puis la correction de localisation faible $\Delta\sigma(B)$.
Rq :
• on utilisera la formule de Poisson $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ny} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - 2n\pi)$
• Avant de calculer l'intégrale sur t on remarque qu'un des termes est divergent est doit être régularisé de la même manière qu'à la question 0).
• On introduira la fonction de MacDonald (Bessel modifiée) $K_0(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{e}^{-t-z^2/4t}$.

3) Quelle est la périodicité du résultat en fonction du flux ϕ ?

3 Conductances

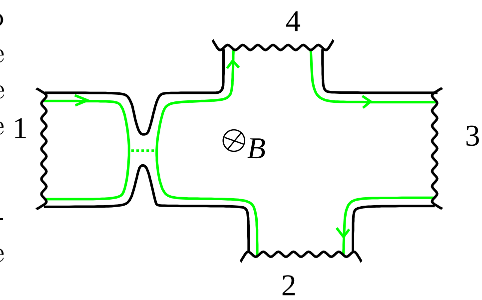
La matrice de conductance $G_{\alpha\beta}$ relie les courants I_α aux contacts d'un conducteur aux potentiels V_β : $I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} V_\beta$.

1) Quelles relations doivent être satisfaites par la matrice de conductance pour que (i) le courant soit conservé : $\sum_\alpha I_\alpha = 0$, (ii) les courants restent inchangés en rajoutant une constante à tous les potentiels $V_\beta \to V_\beta + V_0$?

2) Dans le cas d'un conducteur cohérent de phase, retrouver ces deux relations en utilisant la propriété d'unitarité de la matrice s, *i.e.* $\sum_\alpha s^\dagger_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta'} = \delta_{\beta\beta'} 1_\beta$ et $\sum_\alpha s_{\beta\alpha} s^\dagger_{\beta'\alpha} = \delta_{\beta\beta'} 1_\beta$. On considèrera uniquement les conductances à température nulle : $G_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{h}(N_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \mathrm{Tr}\left\{s^\dagger_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}\right\})$; N_α est le nombre de canaux ouverts au contact α à l'énergie de Fermi E_F et $s_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(E_F)$.

3) Donner la forme générale de la matrice des conductances d'un conducteur à deux contacts.

4) On considère la structure à 4 contacts en champ magnétique de la figure. Pour un facteur de remplissage $\nu = 1$, le courant est porté par les états de bord. Construire la matrice s de cette structure et en déduire la matrice de conductance.



Rq : on introduira les coefficients de réflexion et de transmission r, r', t et t' pour décrire la transmission à travers le point quantique.