Examen de Physique statistique II

Mercredi 29 Août 2018

Durée de l'épreuve : **1h30.**

L'utilisation de documents, téléphones portables,... est interdite. Calculatrices autorisées.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.
Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.

Pensez aux **informations en annexe**.

Questions de cours : le gaz de fermions

On considère un système de fermions sans interaction. On note λ les états stationnaires individuels (états à une particule) et ε_λ la valeur propre de l'énergie associée. Les fermions sont en contact avec un thermostat/réservoir de particules fixant la température T et le potentiel chimique μ.

1. Rappeler la définition de la grande fonction de partition $\Xi(T;\mu)$. Quelle est la relation entre $\Xi(T;\mu)$ et la grande fonction de partition associée à un état individuel ξ_λ ?
2. Calculer explicitement ξ_λ^F pour des fermions. Déduire l'expression du grand potentiel $J(T;\mu)$, exprimée comme une somme sur les états individuels.
3. Comment déduire le nombre moyen de particules $\overline{N}^G(T;\mu)$ et l'occupation moyenne d'un état individuel $\bar{n}_\lambda$? Calculer explicitement le nombre d'occupation moyen $\bar{n}_\lambda^F$ pour des fermions. Tracer l'allure de ce dernier en fonction de ε_λ pour $T = 0$, puis pour deux températures T et $T_0 > T$, et même μ.

Équilibre entre photons, électrons et positrons dans une étoile

Dans une étoile existe un équilibre associé à la réaction de dissociation d'un photon γ en paires électron - positron (e^-, e^+) selon

$$\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^- \ . \tag{1}$$

Cet équilibre entraîne la relation suivante

$$\mu_\gamma = \mu_+ + \mu_- \tag{2}$$

entre les potentiels chimiques μ_γ des photons et ceux μ_+ et μ_- des positrons et des électrons.

Les gaz d'électrons et de positrons seront traités comme des gaz parfaits de fermions à trois dimensions confinés dans un volume V à une température T. Nous noterons les densités respectives de positrons et d'électrons $n_\pm = \overline{N}_\pm^G/V$. Enfin, la conservation de la charge électrique impose que la différence entre ces densités

$$n_0 = n_- - n_+ \tag{3}$$

est fixée.

Aux températures stellaires, les électrons (positrons) peuvent se comporter de manière relativiste si bien que l'on rappelle l'expression de l'énergie cinétique (la seule prise en compte dans cet exercice, on néglige tout effet gravitationnel).

$$\varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2}}\ , \tag{4}$$

avec m la masse de l'électron (positron) et c la vitesse de la lumière.

4. Quelle est la valeur du potentiel chimique des photons ?
5. Justifier rapidement que les électrons et positrons ont la même densité d'états $\rho(\varepsilon)$. Donner l'expression de $\overline{N}^G_\pm(T;\mu_\pm)$ sous forme d'intégrales faisant intervenir $\rho(\varepsilon)$.

Limite non-relativiste $\|\vec{p}\|c \ll mc^2$.

6. À quel régime de température peut-on appliquer cette approximation ?
7. Montrer que la densité d'états d'électrons ou de positrons prend alors la forme
$$\rho(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon - mc^2} \text{ pour } \varepsilon \geqslant mc^2\ . \tag{5}$$
Donner l'expression de A en fonction de m et V et la constante de Planck h. On rappelle qu'électrons et positrons ont un spin 1/2.
8. La température est supposée suffisamment grande pour que l'on puisse appliquer la limite de Maxwell-Boltzmann à la distribution de Fermi-Dirac $\bar{n}^F(\varepsilon)$. Montrer que l'on a alors
$$n_\pm = n(T)e^{\pm\beta\mu} \tag{6}$$
et donner les expressions de $n(T)$ et μ en fonction des données du problème.
9. Déterminer enfin les expressions des densités $n_\pm(T)$ en fonction de $n(T)$ et n_0 uniquement.

Limite ultra-relativiste $\|\vec{p}\|c \gg mc^2$.

10. À quel régime de température peut-on appliquer cette approximation ?
11. Montrer que la densité d'états d'électrons ou de positrons prend alors la forme
$$\rho(\varepsilon) = A'\varepsilon^2\ . \tag{7}$$
et donner l'expression de A'.
12. Montrer que $n_\pm$ sont des fonctions strictement croissantes de $\mu_\pm$.
13. Dans cette limite, les densités $n_\pm$ deviennent si importantes que l'on peut négliger la densité n_0 et considérer que $n_+ \simeq n_- = n$. Justifier alors que l'on peut prendre $\mu_+ \simeq \mu_- = 0$.
14. Donner alors l'expression de n sous forme d'une intégrale.
15. Calculer explicitement l'intégrale et montrer que l'on a alors une relation du type
$$n(T) = KT^\alpha \tag{8}$$
en donnant l'expression de K en fonction de A' et k_B et la valeur de α.
16. Sans faire de longs calculs, quelle est alors la dépendance en température de la densité en énergie $\varepsilon(T) = \overline{E}^G/V$ du gaz ?

Formulaire

- on donne
$$J_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x+1}dx = \left(1 - 2^{-n}\right)\Gamma(n+1)\zeta(n+1) \tag{9}$$
avec $\Gamma(n+1) = n!$ et $\zeta(3) = 1.202\ldots$