Examen de Physique statistique II -Correction

Mercredi 29 Août 2018

Durée de l'épreuve : **1h30.**

Questions de cours : le gaz de fermions /4.5

On considère un système de fermions sans interaction. On note λ les états stationnaires individuels (états à une particule) et ε_λ la valeur propre de l'énergie associée. Les fermions sont en contact avec un thermostat/réservoir de particules fixant la température T et le potentiel chimique μ.

1. Rappeler la définition de la grande fonction de partition $\Xi(T;\mu)$. Quelle est la relation entre $\Xi(T;\mu)$ et la grande fonction de partition associée à un état individuel ξ_λ ? (/1.5)

   On a la relation suivante

   $$\Xi(T;\mu) = \prod_\lambda \xi_\lambda \text{ avec } \xi_\lambda = \sum_n e^{-n\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)}$$

2. Calculer explicitement ξ_λ^F pour des fermions. Déduire l'expression du grand potentiel $J(T;\mu)$, exprimée comme une somme sur les états individuels. (/1)

   Pour des fermions $n = 0, 1$ et

   $$\xi_\lambda^F = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} \ .$$

   On en déduit

   $$J(T;\mu) = -\frac{1}{\beta}\ln\Xi(T;\mu) = -\sum_\lambda \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}\right) = \sum_\lambda j_\lambda(T;\mu) \ .$$

3. Comment déduire le nombre moyen de particules $\overline{N}^G(T;\mu)$ et l'occupation moyenne d'un état individuel $\bar{n}_\lambda$? Calculer explicitement le nombre d'occupation moyen $\bar{n}_\lambda^F$ pour des fermions. Tracer l'allure de ce dernier en fonction de ε_λ pour $T = 0$, puis pour deux températures T et $T_0 > T$, et même μ. (/2)

   $\overline{N}^G(T;\mu)$ est la somme des nombres moyens d'occupation de chaque niveau $\bar{n}_\lambda$, dont l'expression est donnée par

   $$\bar{n}_\lambda^F = -\partial_\mu j_\lambda(T;\mu) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}+1} \ .$$

Équilibre entre photons, électrons et positrons dans une étoile (/15.5)

Dans une étoile existe un équilibre associé à la réaction de dissociation d'un photon γ en paires électron - positron (e^-, e^+) selon

$$\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^- \ . \quad (1)$$

Cet équilibre entraîne la relation suivante

$$\mu_\gamma = \mu_+ + \mu_- \quad (2)$$

entre les potentiels chimiques μ_γ des photons et ceux μ_+ et μ_- des positrons et des électrons.

Les gaz d'électrons et de positrons seront traités comme des gaz parfaits de fermions à trois dimensions confinés dans un volume V à une température T. Nous noterons les densités respectives de positrons et d'électrons $n_\pm = \overline{N}^G_\pm/V$. Enfin, la conservation de la charge électrique impose que la différence entre ces densités

$$n_0 = n_- - n_+ \tag{3}$$

est fixée.

Aux températures stellaires, les électrons (positrons) peuvent se comporter de manière relativiste si bien que l'on rappelle l'expression de l'énergie cinétique (la seule prise en compte dans cet exercice, on néglige tout effet gravitationnel).

$$\varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2}}\ , \tag{4}$$

avec m la masse de l'électron (positron) et c la vitesse de la lumière.

4. Quelle est la valeur du potentiel chimique des photons ? (/1)

   Le nombre de photon n'est pas conservé $\mu_\gamma = 0$. On en déduit $\mu_+ = -\mu_-$.

5. Justifier rapidement que les électrons et positrons ont la même densité d'états $\rho(\varepsilon)$. Donner l'expression de $\overline{N}^G_\pm(T;\mu_\pm)$ sous forme d'intégrales faisant intervenir $\rho(\varepsilon)$. (/1)

   La relation de dispersion $\varepsilon(\vec{p})$ ne dépend que de la masse m de la particule. Or, positron et électron on les mêmes caractéristiques (masse, spin, ...) en dehors de la charge ($-e$ pour l'électron et $+e$ pour le positron). Ils auront donc la même densité d'état $\rho(\varepsilon)$.

   Le nombre moyen de particules $\overline{N}^G_\pm(T;\mu_\pm)$ prend la forme

   $$\overline{N}^G_\pm(T;\mu_\pm) = \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu_\pm)}+1}d\varepsilon$$

Limite non-relativiste $\|\vec{p}\|c \ll mc^2$.

6. À quel régime de température peut-on appliquer cette approximation ? (/0.5)

   On peut appliquer cette approximation dans le régime de basse température $k_BT \ll mc^2$.

7. Montrer que la densité d'états d'électrons ou de positrons prend alors la forme

   $$\rho(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon - mc^2} \text{ pour } \varepsilon \geqslant mc^2\ . \tag{5}$$

   Donner l'expression de A en fonction de m et V et la constante de Planck h. On rappelle qu'électrons et positrons ont un spin 1/2. (/2)

   On calcule la densité d'état $\rho(\varepsilon)$ avec la relation de dispersion $\varepsilon = mc^2 + p^2/(2m)$

   $$\begin{aligned}\rho_\pm(\varepsilon) &= 2\times 4\pi\frac{V}{h^3}\int_0^\infty p^2\delta\left(\varepsilon - mc^2 - \frac{p^2}{2m}\right)dp = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty dx\sqrt{x}\delta(\varepsilon - mc^2 - x)dx\\ &= 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon - mc^2} \ \Rightarrow\ A = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\ .\end{aligned}$$

8. La température est supposée suffisamment grande pour que l'on puisse appliquer la limite de Maxwell-Boltzmann à la distribution de Fermi-Dirac $\bar{n}^F(\varepsilon)$. Montrer que l'on a alors

   $$n_\pm = n(T)e^{\pm\beta\mu} \tag{6}$$

et donner les expressions de $n(T)$ et μ en fonction des données du problème. (/2)

A l'approximation de Maxwell-Boltzmann, $\overline{n}^F(\varepsilon) \approx e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ et on obtient

$$n_\pm = \frac{A}{V}\int_{mc^2}^{\infty} \sqrt{\varepsilon - mc^2} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon e^{\beta\mu_\pm} \ .$$

$$n(T) = \frac{A}{V}\int_{mc^2}^{\infty} \sqrt{\varepsilon - mc^2} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}A}{2V\beta^{\frac{3}{2}}} e^{-\beta mc^2} \ \text{ et } \ \mu = \mu_+ = -\mu- \ .$$

9. Déterminer enfin les expressions des densités $n_\pm(T)$ en fonction de $n(T)$ et n_0 uniquement. (/1)

   On pose $x = e^{\beta\mu}$, on a alors

$$n_0 = n(T)(x^{-1} + x) \ \Rightarrow \ x = -\frac{n0}{2n(T)} + \frac{\sqrt{n_0^2 + 4n(T)^2}}{2n(T)} \ , \ n_\pm = n(T)x^{\pm 1} \ .$$

Limite ultra-relativiste $\|\vec{p}\|c \gg mc^2$.

10. À quel régime de température peut-on appliquer cette approximation ? (/0.5)

    On peut appliquer cette approximation dans le régime de haute température $k_BT \gg mc^2$.

11. Montrer que la densité d'états d'électrons ou de positrons prend alors la forme

$$\rho(\varepsilon) = A'\varepsilon^2 \ . \tag{7}$$

    et donner l'expression de A'. (/1.5)

    On calcule la densité d'état $\rho(\varepsilon)$ avec la relation de dispersion $\varepsilon(\vec{p}) = ||\vec{p}||c$

$$\rho_\pm(\varepsilon) = 2 \times 4\pi\frac{V}{h^3}\int_0^\infty p^2\delta\left(\varepsilon - pc\right) dp = \frac{8\pi V}{(hc)^3}\varepsilon^2 \ \Rightarrow \ A' = \frac{8\pi V}{(hc)^3} \ .$$

12. Montrer que $n_\pm$ sont des fonctions strictement croissantes de $\mu_\pm$. (/1)

    On dérive l'expression de $n\pm$ par rapport à $\mu_\pm$

$$\partial_{\mu_\pm} n_\pm = \frac{\beta}{V}\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\rho(\varepsilon)e^{\beta(\varepsilon-\mu_\pm)}}{(1 + e^{\beta(\varepsilon-\mu_\pm)})^2} > 0 \ .$$

13. Dans cette limite, les densités $n_\pm$ deviennent si importantes que l'on peut négliger la densité n_0 et considérer que $n_+ \simeq n_- = n$. Justifier alors que l'on peut prendre $\mu_+ \simeq \mu_- = 0$. (/1)

    On a $n_+ = n_-$, on en déduit alors que l'on doit avoir $\mu_+ = \mu-$ et par ailleurs $\mu_+ = -\mu_-$ donc $\mu_+ = \mu_- = 0$.

14. Donner alors l'expression de n sous forme d'une intégrale. (/1)

    L'expression est la suivante

$$n = \frac{A'}{V}\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{1 + e^{\beta\varepsilon}} \ .$$

15. Calculer explicitement l'intégrale et montrer que l'on a alors une relation du type

$$n(T) = KT^\alpha \tag{8}$$

    en donnant l'expression de K en fonction de A' et k_B et la valeur de α. (/1.5)

    Le calcul de l'intégrale se fait par changement de variable et en utilisant les données du formulaire

$$n = \frac{A'}{V\beta^3}\int_0^\infty dx \frac{x^2}{1 + e^x} = \frac{3A'\zeta(3)}{2V\beta^3} = \frac{3A'\zeta(3)}{2V}(k_BT)^3 \ \Rightarrow \ \alpha = 3 \ , \ K = \frac{3A'\zeta(3)k_B^3}{2} \ .$$

16. Sans faire de longs calculs, quelle est alors la dépendance en température de la densité en énergie $\varepsilon(T) = \overline{E}^G/V$ du gaz ? (/1.5)

    On écrit l'énergie moyenne comme l'intégrale

$$\varepsilon(T) = \frac{1}{V}\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\rho(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}+1} = \frac{A'}{V\beta^4}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x+1} \propto T^4 \ .$$

Formulaire

- on donne

$$J_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x+1}dx = \left(1-2^{-n}\right)\Gamma(n+1)\zeta(n+1) \tag{9}$$

  avec $\Gamma(n+1) = n!$ et $\zeta(3) = 1.202\dots$