Université Paris-Sud **Année 2018–2019**
Licences L3 PAPP & PMEC

Mathématiques pour la Physique II

TD 1 : Fonctions holomorphes

Exercice 1 : Racines n-ième de moins l'unité

1 – Donner les racines de l'équation $z^n + 1 = 0$. On les notes $\{z_0, \cdots, z_{n-1}\}$.

2 – Montrer que $\displaystyle\sum_{0\leqslant k<l\leqslant n-1} z_k z_l = 0$.

Exercice 2 : Dérivabilités au sens de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$

1 – Pour une fonction $f(z) = F(x,y) = P(x,y) + \mathrm{i}\,Q(x,y)$ avec $z = x + \mathrm{i}y$ et P, $Q \in \mathbb{R}$, y a-t-il équivalence entre la dérivabilité de F par rapport à x et y, et celle de f au sens complexe ?

2 – On introduit les opérateurs différentiels

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

agissant sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de deux variables réelles à valeurs complexes.
Calculer ∂z, $\partial \bar{z}$, $\bar{\partial} z$ ainsi que $\bar{\partial}\bar{z}$.

3 – Si f est holomorphe, montrer que

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

4 – Soit $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ une fonction holomorphe. Montrer que le jacobien du mapping $(x,y) \mapsto (u,v)$ est $J = |f'(z)|^2$.
Vocabulaire : l'application $w = f(z)$, avec $f(z) \neq 0$, est appelée une *transformation conforme*. Par exemple, on pourra vérifier que la transformation $f(z) = (\mathrm{i}\,z + 1)/(z + \mathrm{i})$, analytique sur le demi-plan complexe supérieur, permet de mapper ce dernier sur le disque unité, $D(0,1) = \{w \in \mathbb{C}\ ,\ |w| < 1\}$.

Exercice 3 : Conditions de Cauchy–Riemann

1 – Soit la fonction $F(x,y) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}\,xy$. Est-ce que la fonction vérifie les conditions de Cauchy–Riemann ? Retrouver le résultat précédent en exprimant F à l'aide de z et $\bar{z}$.

2 – Soit $P(x,y) = x^2 + y^2$. Existe-t-il $Q(x,y)$ de telle sorte que $f = P + \mathrm{i}\,Q$ soit holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$?

3 – Même question pour $P(x,y) = \cosh x \, \cos y$.

4 – Démontrer que si $f = P + \mathrm{i}\, Q$ est une fonction entière (holomorphe dans la totalité de $\mathbb{C}$), alors les faisceaux de courbes $P(x, y) = \text{cst}$ et $Q(x, y) = \text{cst}$ se coupent orthogonalement.

5 – Facultatif : Si l'on prend dans le plan non plus les coordonnées cartésiennes (x, y), mais les coordonnées polaires (r, θ), comment se réécrivent les conditions de Cauchy–Riemann ?

6 – Facultatif : On écrit $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Vérifier que $\mathrm{Ln}\, z \overset{\text{def}}{=} \ln r + \mathrm{i}\,\theta$ est holomorphe ; on *choisit* $\theta \in]-\pi, +\pi]$, ce qui correspond à la « *détermination principale du logarithme* ». Discuter la continuité de $\mathrm{Ln}\, z$ et déduire son domaine d'analyticité.

Exercice 4 : Propriétés des fonctions holomorphes

Montrer que, si $f : D \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est constante sur D ;
2. $P = \mathrm{Re}(f)$ est constante sur D ;
3. $Q = \mathrm{Im}(f)$ est constante sur D ;
4. $|f|$ est constante sur D ;
5. $\varphi = \arg f$ est constant sur D ;
6. $\overline{f}$ est holomorphe sur D.