Université Paris-Sud **Année 2018–2019**
Licences L3 PAPP & PMEC

Mathématiques pour la Physique II

TD 4 : Singularités et résidus

Exercice 1 : Pôles et résidus

Identifier et caractériser les singularités des fonctions suivantes. En calculer les résidus.

$$f_1(z) = \frac{1}{1+z^n} ,$$
$$f_2(z) = \frac{1}{\sin(z)} ,$$
$$f_3(z) = \mathrm{e}^{-1/z^2} ,$$
$$f_4(z) = \frac{1}{1-z^n} ,$$
$$f_5(z) = \frac{\cos z}{z[z^4+(1-\pi^2)z^2-\pi^2]} ,$$
$$f_6(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z-2\mathrm{i})^2} .$$

Exercice 2 : Développement en série de Laurent

1 – Donner le développement de Laurent dans $\mathbb{C}^*$ de la fonction $f(z) = \mathrm{e}^z/z^2$.

2 – Donner les développements de Laurent dans les régions $|z| < 1$; $1 < |z| < 3$; $|z| > 3$ de la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{z^2-4z+3}.$$

Exercice 3 : Théorème des résidus

1 – En choisissant un contour fermé adapté, calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x-\mathrm{i}\,a)^2} \qquad , \text{ avec } a > 0 . \tag{1}$$

Comparer à l'intégrale du TD3. On pourra discuter $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{(x-\mathrm{i}\,a)^2}$ selon le signe de k.

2 – En choisissant un contour approprié, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2) \tag{2}$$

(rq : les racines de z^n+1 ont été étudiées au TD1).

3 – Soit la fonction[1] $C(\lambda,\theta)=\sinh\lambda/\big[\cosh\lambda-\cos\theta\big]$. Nous étudions sa décomposition de Fourier (discrète) $C(\lambda,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n(\lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\cosh\lambda-\cos\theta}\qquad\text{pour }\lambda>0\,. \tag{3}$$

Indications :

• on considèrera le cas $n\geqslant 0$ (le résultat pour $n<0$ sera déduit par symétrie).
• Convertir l'intégrale sur $[0,2\pi]$ en intégrale sur le cercle unité centré sur l'origine.

Vérifier le résultat en calculant directement $\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n(\lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

1. Cette fonction apparaît dans le contexte de l'étude du **transport quantique** dans un anneau métallique de dimension mésoscopique (de périmètre $L\sim 1\,\mu$m). Elle contrôle la ≪ *correction de localisation faible* ≫ à la conductance, donnée par $C(L/L_\varphi,\theta)$ où L_φ est la longueur de cohérence de phase et $\theta=4\pi\phi/\phi_0$ le rapport du flux magnétique par le quantum de flux $\phi_0=h/e$. Ces oscillations quantiques sont appelées ≪ oscillations AAS ≫ et ont été prédites dans un article célèbre par B. Al'tshuler, A. Aronov & B. Spivak (JETP Lett. **33**, p. 94, 1981). Elles ont été observées expérimentalement par D. Sharvin & Yu. Sharvin (JETP Lett. **35**, p. 588, 1982) pour une autre géométrie (cylindre).