

Mathématiques pour la Physique II

TD 5 : Applications du théorème des résidus

Exercice 1 : Calcul de séries

1 – Calculer la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \quad (1)$$

Indication : considérer la fonction $\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + a^2}$.

Vérifier votre résultat en faisant $a \rightarrow 0$.

2 – En utilisant la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4 \sin \pi z}$, prouver que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

Exercice 2 : Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes, en utilisant l'intégration dans le plan complexe :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n} dx \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad n > 1 + \alpha > 0),$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x[x^4 + (1 - \pi^2)x^2 - \pi^2]} dx,$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \alpha \cos \theta} \quad (\text{pour } -1 < \alpha < +1)$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \quad (\text{pour } 0 < \alpha < 1),$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} dx \quad (\text{on intégrera la fonction } \frac{(\ln z - C)^2}{1+z^3} \text{ où } C \text{ est une constante } ad \text{ hoc}).$$