Correction de l'Exercice 2 du TD4

Développement de Taylor : développer une fct analytique en série entière

Développement de Laurent : développer une fonction au voisinage d'une singularité en z_0

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

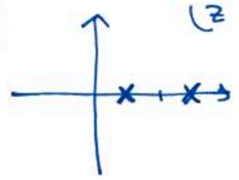
1/ $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$z=0$ est un pôle double

développement de Laurent en $z=0$:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$$

2/ $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-1}\right)$

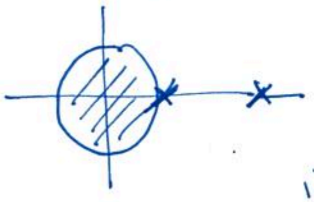


Deux pôles simples en $z=1$ et $z=3$

On peut écrire différents développements...

(a) $\boxed{|z|<1}$ Dans le disque autour de $z=0$: la fonction est analytique en $z=0$ $\Rightarrow$ elle admet un dévelop. de Taylor.

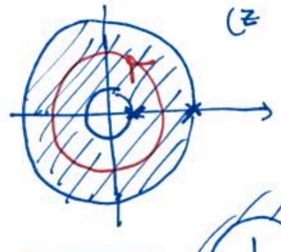
$$f(z)=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{1-z}}_{|z|<1}-\underbrace{\frac{1}{3(1-\frac{z}{3})}}_{|z/3|<1}\Big)=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}z^n}_{\text{rayon de conv }=1}-\frac{1}{3}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n}_{\text{rayon de conv. }=3}\Big]$$



$|z|<1 \Downarrow$ on peut écrire $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ qui a pour rayon de convergence $R=1$

$$\Rightarrow \boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1-3^{-n-1}}{2}}\,z^n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

(b) $\boxed{1<|z|<3}$ Dans la couronne

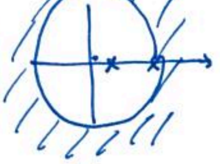


dans la couronne $|z|>1 \Rightarrow \dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n$ ($|\frac{1}{z}|<1$)

finalement : $\boxed{f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n}z^n}$

$$\equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n z^n$$

(c) $\boxed{|z|>3}$



on écrit $\dfrac{1}{z-3}=\underbrace{\dfrac{1}{z(1-\frac{3}{z})}}_{|3/z|<1}=\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}\quad z^n$

d'où $\boxed{f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(3^{-n-1}-1\right)z^n} \equiv \sum_{n=-\infty}^{-1}c_n z^n$

Remarque : Et autour de la singularité $z=1$?

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\,\cancel{+}\,\frac{1}{2}\frac{1}{2-(z-1)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$\equiv \sum_{n=-1}^{\infty}d_n(z-1)^n$$

Rq : $\boxed{b_{-1}=d_{-1}}$ car les deux coefficients sont donnés par une intégrale ~~qui~~ sur un contour qui entoure $z=1$. (et le coeff $n=-1$ du développ. de Laurent est indép. de z_0) → cf. cours sur les séries de Laurent