

Mathématiques – résumé du cours



JANVIER – AVRIL 2019

Christophe Texier



La page ouèbe du cours : http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/

Conseils bibliographiques

Les sujets traités sont très classiques. Il existe de nombreux livres bien écrits sur ces sujets.

Ouvrages généralistes

- La série d'ouvrages de P. Benoist-Gueutal et M. Courbage [4].
- L'ouvrage de É. Belorizky [3]. Simple et clair.
- Le cours de Vladimir Dotsenko [5]. Beaucoup d'exercices.
- L'ouvrage de W. Appel [1], un peu plus formel mais intéressant.
- Le massif ouvrage de C. Aslangul [2] : plutôt un "traité" qu'un manuel universitaire!
- Dans le même style : le petit livre de H. Krivine [6].

A. Analyse complexe

- Le livre de la série Schaum [8]. Très clair, beaucoup d'exercices.
- Le tome 1 de P. Benoist-Gueutal et M. Courbage [4]. Bien écrit et clair.
- La partie analyse complexe du livre de Dotsenko [5] est très étoffée.

B. Transformation de Fourier et de Laplace

- Le tome 2 de P. Benoist-Gueutal et M. Courbage [4] ou les livres généralistes cités précédemment.

C. Théorie des distributions

- Une présentation très brève « à la physicienne » : cf. annexe du chapitre 2 de l'ouvrage [9] (écrit spécialement pour le magistère d'Orsay).



- Présentation complète (mais plus formelle) dans le tome 2 de [4]. Ou encore plus formelle [7].

update : 30 avril 2021

1 Analyse complexe

I. Préliminaires

Nombres complexes.— On rappelle que le plan complexe de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ peut être identifié au plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui permet de donner *simplement* des **interprétations géométriques** aux opérations : $z \rightarrow z + a$ (translation), $z \rightarrow e^{i\theta}z$ (rotation), $z \rightarrow \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+$: dilatation), $z \rightarrow \bar{z} = x - iy$ (réflexion par rapport à Ox), etc.

Il sera parfois utile de se repérer en coordonnées polaires : $z = r e^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta = \arg z \in]\pi, +\pi]$ (ou $\theta \in [0, 2\pi[$, ou plus généralement $\theta \in [\alpha, 2\pi + \alpha[$).

Exemple : la définition du logarithme est assez naturelle en utilisant les coordonnées polaires. On obtient cependant différentes définitions selon le domaine de définition de l'angle. Le choix $\theta \in]\pi, +\pi]$ correspond à la « détermination principale du logarithme », notée $\text{Ln}(z) = \ln r + i\theta$; dans ce cas la fonction présente une **coupure** sur \mathbb{R}_- , i.e. une ligne de part et d'autre de laquelle elle est *discontinue* : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\text{Ln}(-|x| + i\epsilon) - \text{Ln}(-|x| - i\epsilon)] = +2i\pi$.

Racines nèmes de l'unité : savoir retrouver rapidement les solutions de $z^n = 1$: $z_k = e^{2i\pi k/n}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ (ou $z_k = e^{i\pi/n + 2i\pi k/n}$ pour l'équation $z^n = -1$).

Inégalité triangulaire :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1)$$

Topologie.— On a introduit un peu de *vocabulaire* :

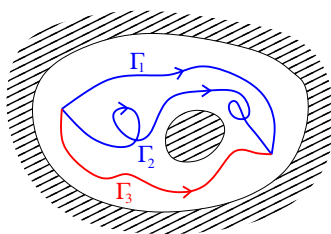
Domaine ouvert (« domaine de \mathbb{C} sans les bords »).

On a parfois noté $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$ le disque ouvert.

Chemin : ligne Γ dans le plan ; longueur du chemin $\ell_\Gamma = \int_\Gamma |dz|$. **Savoir paramétrer les chemins**, i.e. trouver $z(t)$, une application de $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{C} .

Circuit : chemin fermé

Chemins *homotopes* : équivalents par déformation (en restant dans le domaine de définition).



: Γ_1 et Γ_2 homotopes. Γ_3 non homotope à Γ_1 .

Courbe de Jordan : circuit tournant dans le sens direct et ne s'enroulant qu'une seule fois autour de chaque point à l'intérieur du circuit.

II. Fonctions holomorphes

Dérivabilité.— La notion de continuité d'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est claire. La fonction est continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, quel que soit le chemin suivi pour aller de z à z_0 .

Dérivabilité (\Leftrightarrow holomorphité) : une fonction f est **holomorphe** dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ ssi elle est dérivable en tout point de l'ouvert, i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) \quad (2)$$

la limite est indépendante du chemin pour se rapprocher de z_0 (faire $h \rightarrow 0$ avec $h \in \mathbb{C}$ correspond à choisir un *chemin* pour aller à l'origine).

Choisir soit $h = x \in \mathbb{R}$, soit $h = iy \in i\mathbb{R}$ et écrire l'égalité de la limite conduit aux **conditions de Cauchy-Riemann**. La fonction $f = u(x, y) + iv(x, y)$ est une fonction de la variable z seule, $f = f(z)$, à condition que

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (3)$$

DÉM. : on choisit soit $h = x \in \mathbb{R}$ soit $h = iy \in i\mathbb{R}$ dans (2), ce qui montre que $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. QED.

On peut aussi écrire les conditions de Cauchy-Riemann sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0} \quad (4)$$

qui exprime que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = F(x, y)$ est seulement fonction de la combinaison $z = x + iy$ (mais pas de $\bar{z} = x - iy$). Conséquence : $f(z) = F(x + iy, 0) = F(0, y - ix)$.

DÉM. : partir des conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées cartésiennes et utiliser

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (5)$$

Quelques fonctions.— Des exemples de **fonctions entières** (holomorphes sur \mathbb{C}) :

- Les polynômes $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$.
- La fonction exponentielle $e^z = e^{x+iy}$.
- Les fonctions hyperboliques $\text{ch } z, \text{sh } z, \dots$ et trigonométriques $\cos z, \sin z$.

Exercice : vérifier que toutes ces fonctions satisfont les conditions de Cauchy-Riemann.

Les fonctions holomorphes sur \mathbb{C} privé d'un ensemble de points isolés (les « singularités » de la fonction) sont appelées des **fonctions méromorphes**. Deux exemples : les fonctions $\text{th } z$ ou $\tan z$. Par exemple les singularités de $\text{th } z$ sont des *pôles simples*, $z_n = n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

III. Intégration dans le plan complexe

Paramétrisation des contours d'intégration.— à maîtriser.

Exemple : un arc de cercle de rayon R centré sur z_0 d'ouverture angulaire α : $z(\theta) = z_0 + R e^{i\theta}$ avec $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha]$. Notons que $dz(\theta) = R i e^{i\theta} d\theta$.

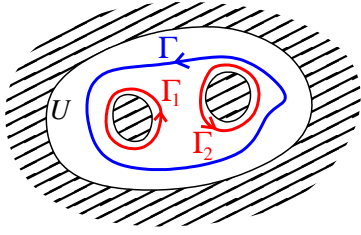
Théorème de Cauchy (1825) : Soit une fonction f holomorphe dans un ouvert U simplement connexe et Γ un circuit (donc nécessairement homotope à un point), alors

$$\boxed{\oint_{\Gamma} dz f(z) = 0} \quad (6)$$

DÉM. : Pour $f = u + iv$, on écrit $\int_{\Gamma} dz f(z) = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\Gamma} (v dx + u dy)$. L'analyse vectorielle nous dit que les deux formes différentielles sont des différentielles *exactes* si leurs dérivées croisées sont égales, ce qui découle ici des conditions de Cauchy-Riemann. On peut alors utiliser $\int_{\Gamma: a \rightarrow b} d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a)$ pour chaque intégrale. QED.

Le théorème est très important : il nous permet de déformer tout contour d'intégration à condition de rester dans le domaine d'holomorphicité de la fonction.

Théorème de Cauchy généralisé : Si le domaine n'est pas simplement connexe. Dans le cas où Γ entoure des trous du domaine d'holomorphité



$$\oint_{\Gamma} dz f(z) = \sum_i \oint_{\Gamma_i} dz f(z) \quad (7)$$

Inégalité fondamentale : Soit f holomorphe dans un ouvert U et Γ un chemin dans U de longueur ℓ_{Γ} . Un majorant du module de la fonction est noté $M = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|$. Alors

$$\left| \int_{\Gamma} dz f(z) \right| \leq \ell_{\Gamma} M \quad (8)$$

Lemmes de Jordan : Conséquences de l'inégalité fondamentale : Considérons $f(z)$ sur C_R , un arc de cercle de rayon R (centré sur l'origine pour simplifier), alors

$$\lim_{R \rightarrow 0} \sup_{z \in C_R} |z f(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} dz f(z) = 0 \quad (9)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R} |z f(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} dz f(z) = 0 \quad (10)$$

Fonction primitive.— À l'aide du théorème de Cauchy, on a montré que l'intégration dans le plan complexe (le long d'un chemin), est bien l'opération inverse de la dérivation, i.e. si Γ est un chemin allant de z_0 à z_1 ,

$$\int_{\Gamma: z_0 \rightarrow z_1} dz f(z) = F(z_1) - F(z_0) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z} = f(z) \quad (11)$$

Exemple : $\int_{\Gamma: 0 \rightarrow z} d\zeta \zeta^n = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$.

IV. Formules intégrales de Cauchy

Préliminaire.— Soit Γ une courbe de Jordan entourant l'origine

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = 2i\pi \delta_{n,1} . \quad (12)$$

Première formule intégrale de Cauchy.— Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U et Γ une courbe de Jordan entourant z_0

$$f(z_0) = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{2i\pi} \frac{f(z)}{z - z_0} \quad (13)$$

Si on connaît f le long d'un chemin Γ , la formule permet de déduire $f(z_0)$ en n'importe quel point à l'intérieur du chemin.

DÉM. : on écrit $f(z) = f(z_0) + f(z) - f(z_0)$ dans l'intégrand

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{2i\pi} \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0) \oint_{\Gamma} \frac{dz}{2i\pi} \frac{1}{z - z_0} + \oint_{\Gamma} \frac{dz}{2i\pi} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Le premier terme est $f(z_0)$, d'après (12). Le second terme est nul en vertu du *théorème de Cauchy* car $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ est analytique (z_0 est une singularité *apparente*). QED.

Formule intégrale de Cauchy généralisée.— Formule de Cauchy pour les dérivées d'une fonction holomorphe

$$f^{(n)}(z_0) = n! \oint_{\Gamma} \frac{dz}{2i\pi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (14)$$

Analyticité.— Une fonction analytique dans un domaine autour d'un point z_0 est représentable en **série entière**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (15)$$

pour z dans le disque de convergence $D(z_0, R)$ de la série, R étant le *rayon de convergence*. C'est une fonction infiniment dérivable en z_0 .

Conséquence importante (et remarquable) des formules intégrales : *une fonction holomorphe, i.e. dérivable une fois par rapport à la variable complexe, est indéfiniment dérivable !* Holomorphe \Rightarrow analytique. La réciproque est aussi vraie :

$$\boxed{\text{holomorphe} \Leftrightarrow \text{analytique}} \quad (16)$$

A. Quelques théorèmes

On a pu déduire des formules intégrales quelques théorèmes remarquables.

Théorème de Gauss de la moyenne : Soit $\mathcal{C}_{z_0, R}$ le cercle de rayon R centré sur z_0 inclus dans le domaine d'holomorphie de la fonction f . Alors la moyenne de la fonction sur le cercle est égale à sa valeur au centre

$$f(z_0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) \quad (17)$$

Notons que la formule nous dit que l'intégrale est indépendante du rayon R .

DÉM. : On utilise (13) où $\Gamma \rightarrow \mathcal{C}_{z_0, R}$.

⚠ : Vous ne serez **pas** interrogés sur les trois théorèmes suivants. On pourra juste en retenir les idées pour la culture.

Théorème de Liouville : Soit f une fonction entière (analytique dans \mathbb{C}). Si f est bornée alors elle est constante.

Théorème du maximum : Soit f analytique dans un ouvert U , alors $|f(z)|$ atteint son maximum sur le bord de U .

Théorème du minimum : Si f est analytique dans un ouvert U et n'a aucun zéro dans U , alors $|f(z)|$ atteint son minimum sur le bord de U .

B. Séries entières

Domaine de convergence.— On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, fournissant une représentation d'une fonction analytique autour de 0. Le **rayon de convergence** de la série est $R = \max\{\rho > 0 \text{ t.q. } \sum_n |a_n| \rho^n < \infty\}$. On appelle $D(0, R)$ le disque de convergence.

Trouver le rayon de convergence.— Deux formules pour trouver R :

- Formule d'Hadamard (critère de Cauchy) : $1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$.
- Formule de d'Alembert : $1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$.

Les deux critères nous disent que $|a_n| \sim 1/R^n$ à grand n , correspondant à la série géométrique $\sum_n (|z|/R)^n \simeq 1/(1 - |z|/R)$.

C. Séries de Laurent

Si une fonction est analytique dans un domaine autour de z_0 , elle peut être représentée sous forme de série de Taylor (série entière). *Les séries de Laurent permettent de représenter des fonctions analytiques autour de leurs singularités*, ou dans une couronne entourant un domaine de non analyticité. En général on écrira

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour } R_1 < |z - z_0| < R_2 \quad (18)$$

(où $R_1 = 0$ pour un développement autour d'une singularité z_0). La partie singulière $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ est appelée *partie principale du développement de Laurent* alors que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est la *partie analytique*.

Exemple :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} \quad (19)$$

(i) Autour de la singularité en $z = 1$: $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n (z-1)^n$, i.e. $a_n = 0$ pour $n < -1$, $a_{-1} = 1$ et $a_n = 1$ pour $n \geq 0$.

(ii) Autour de $z = 0$, dans la couronne $1 < |z| < 2$: $f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$, i.e. ce nouveau développement est caractérisé par les coefficients $b_n = 1$ pour $n < 0$ et $b_n = 2^{-n-1}$ pour $n \geq 0$.

Il est instructif (pour la suite) de remarquer que le seul coefficient commun aux deux développements de Laurent (de la même fonction) est ¹ $a_{-1} = b_{-1}$.

Classification des singularités.— On peut rencontrer différents types de singularités :

- $f(z) \sim \frac{1}{z-z_0}$ pour $z \rightarrow z_0$: **pôle simple**.
- $f(z) \sim \frac{1}{(z-z_0)^n}$ pour $z \rightarrow z_0$: **pôle d'ordre n** .
- $f(z) = g(z)/(z-z_0)$ où g est analytique dans le voisinage de z_0 avec $g(z_0) = 0$. Alors f a une *singularité apparente* en z_0 (elle est analytique en z_0).
- Si la partie principale du développement de Laurent a un nombre de termes infini, on parle de **singularité essentielle**.

Exemple : $e^{1/z}$ en $z = 0$.

- Le dernier type de singularité est un *point de branchement* d'où part une *coupure* (ligne de

¹ On comprendra plus loin que les deux coefficients coïncident car les deux domaines "entourent" la singularité en $z = 1$.

discontinuité).

Exemple : z^α avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$ a un point de branchement en 0.

Coefficients de la série de Laurent.— Si la fonction est analytique en z_0 , les coefficients de la série de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ sont donnés par les dérivées n -èmes de la fonction en ce point, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Mais si la fonction est singulière en z_0 , puisque ses dérivées en ce point ne sont pas définies, comment relier les coefficients de la série de Laurent aux propriétés de la fonction ?

On peut montrer que les formules intégrales de Cauchy (14) s'étendent à *tous les coefficients* du développement de Laurent : soit Γ une courbe de Jordan entourant z_0 ,

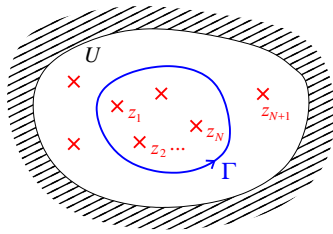
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{2i\pi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (20)$$

Les coefficients a_n dépendent évidemment de z_0 (tout comme les coefficients du développement de Taylor dépendent du point dans le voisinage duquel celui-ci est réalisé)... sauf a_{-1} (le coefficient dépend toutefois du domaine dans lequel le développement de Laurent existe). Cette remarque va se révéler importante.

V. Théorème des résidus

Résidu (définition).— Soit U un ouvert simplement connexe et $z_0 \in U$. Considérons f analytique dans $U - \{z_0\}$ telle que $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Le coefficient a_{-1} est appelé le résidu de f en z_0 . On le note $a_{-1} = \text{Res}[f, z_0]$

Théorème des résidus : Soit f une fonction analytique dans un ouvert U simplement connexe, excepté en un ensemble de points $\{z_1, z_2, \dots\}$, les *singularités* de f . Soit Γ une courbe de Jordan entourant N pôles z_1, \dots, z_N (et ne passant par aucune singularité), alors



$$\oint_{\Gamma} dz f(z) = 2i\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}[f, z_n] \quad (21)$$

DÉM. : La démonstration découle de (20) et du théorème de Cauchy généralisé.

A. Guide pratique : comment calculer les résidus ?

Le théorème des résidus est intéressant en pratique : il permet de relier une intégrale sur un contour à des propriétés obtenues localement au voisinage des singularités. La première question est donc de pouvoir calculer le résidu.

Pôle simple.— Pour un pôle simple, le résidu contrôle le terme dominant au voisinage de la singularité. Il donc facile à obtenir :

$$f(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\simeq} \frac{a_{-1}}{z - z_0} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\text{Res}[f, z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)} \quad (22)$$

En pratique on pourra calculer le résidu avec les formules suivantes

$$\operatorname{Res} \left[\frac{h(z)}{z - z_0}, z_0 \right] = h(z_0) \quad \text{ou} \quad \operatorname{Res} \left[\frac{h(z)}{g(z)}, z_0 \right] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \quad (23)$$

avec $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$.

Pôle multiple.— Au voisinage de la singularité, la fonction est dominée par le terme $f(z) \sim (z - z_0)^{-n}$, il est donc plus délicat d'extraire un terme sous dominant. Si on écrit $f(z) = h(z)/(z - z_0)^n$, où h est une fonction régulière, il est facile d'obtenir $\operatorname{Res} \left[\frac{h(z)}{(z - z_0)^n}, z_0 \right] = \frac{h^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$ (en écrivant le développement en série de Taylor de h). Autrement dit :

$$f(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\simeq} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \dots \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}[f, z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \quad (24)$$

B. Application au calcul intégral

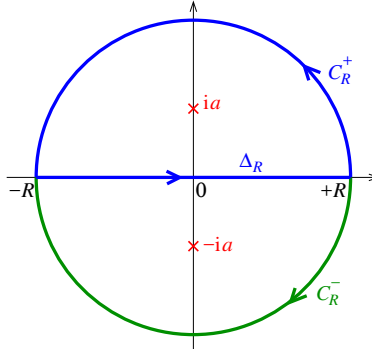
Exemple 1 : Considérons un exemple très simple pour exposer la méthode : calculons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad , \quad a > 0. \quad (25)$$

(i) On choisit une fonction d'une variable complexe $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ et on étudie ses propriétés d'analyticité \Rightarrow ici f est méromorphe, avec deux pôles simples en $z = \pm ia$.

On calcule les résidus : $f(z) = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)}$ ce qui montre que $\operatorname{Res}[f, \pm ia] = 1/(\pm 2ia)$.

(ii) On recherche un contour *fermé* qui contient le contour considéré (ici \mathbb{R}). \Rightarrow ici on considère le contour $\Gamma^+ = \Delta_R \cup \mathcal{C}_R^+$:



(iii) On borne les contributions des morceaux de contour supplémentaires :

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R^+} dz f(z) \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - a^2} \sim \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (26)$$

(iv) On applique le théorème des résidus

$$\oint_{\Gamma^+} dz f(z) = \underbrace{\int_{-R}^{+R} dx f(x)}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} I} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_R^+} dz f(z)}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} = 2i\pi \operatorname{Res}[f, +ia] \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{a}. \quad (27)$$

Exercice : vérifier qu'on arrive à la même conclusion en choisissant le contour $\Gamma^- = \Delta_R \cup \mathcal{C}_R^-$.

Exemple 2 : Un autre exemple important est

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2}, \quad a > 0. \quad (28)$$

On choisit cette fois la fonction analytique $f(z) = \frac{e^{-ikz}}{z^2 + a^2}$. En remarquant que $|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + a^2|} e^{k \operatorname{Im} z}$ (si $k \in \mathbb{R}$), on voit que *le choix de contour est maintenant gouverné par le signe de k* .

- Si $k > 0$, on choisit le contour Γ_- , et il est alors facile de montrer que $\left| \int_{C_R^-} dz f(z) \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ (en revanche on ne peut pas borner l'intégrale sur C_R^+ car $|f(z)|$ diverge pour $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$). L'application du théorème des résidus sur Γ_- (qui retient le résidu du pôle simple en $z = -ia$) montre que $F(k) = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$.

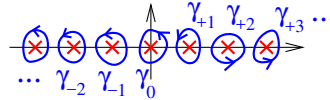
- Si $k < 0$, on choisit le contour Γ_+ . En utilisant $\left| \int_{C_R^+} dz f(z) \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ et le théorème des résidus (qui implique cette fois le résidu du pôle simple en $z = +ia$), on obtient $F(k) = \frac{\pi}{a} e^{+ka}$.

En conclusion

$$F(k) = \frac{\pi}{a} e^{-|k|a}. \quad (29)$$

C. Application au calcul de séries

Pour calculer des séries de la forme $\sum_n \varphi(n)$ ou $\sum_n (-1)^n \varphi(n)$, on utilise efficacement le théorème des résidus. L'idée est de remarquer que $\operatorname{Res} [\pi \cot \pi z, n] = 1$ et $\operatorname{Res} \left[\frac{\pi}{\sin \pi z}, n \right] = (-1)^n$.

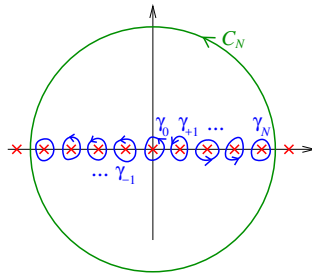


Si $\varphi(z)$ est analytique en $z = n$, peut alors écrire

$$\sum_n \varphi(n) = \sum_n \oint_{\gamma_n} \frac{dz}{2i} \varphi(z) \cot \pi z \quad \text{et} \quad \sum_n (-1)^n \varphi(n) = \sum_n \oint_{\gamma_n} \frac{dz}{2i} \frac{\varphi(z)}{\sin \pi z} \quad (30)$$

et procéder à des déformations de contour.

Illustration : Considérons la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n^2$. Introduisons la fonction $f(z) = \pi / [z^2 \sin(\pi z)]$. Elle a une infinité de pôles simples en $z = n \in \mathbb{Z}^*$, avec $\operatorname{Res} \left[\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}, n \right] = \frac{(-1)^n}{n^2}$, et un *pôle triple* en $z = 0$. Soit C_N le cercle de rayon $N + 1/2$ (figure).



D'après le théorème de Cauchy généralisé, on a $\sum_{n=-N}^{+N} \oint_{\gamma_n} dz f(z) = \oint_{C_N} dz f(z)$. Puisque la fonction décroît à l'infini, on peut montrer que $\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} dz f(z) = 0$, donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \oint_{\gamma_n} \frac{dz}{2i\pi} f(z) = 0$, et donc

$$2S = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \underbrace{\oint_{\gamma_n} \frac{dz}{2i\pi} f(z)}_{=(-1)^n / n^2} = - \oint_{\gamma_0} \frac{dz}{2i\pi} f(z) = -\operatorname{Res}[f, z = 0] = -\frac{\pi^2}{6}. \quad (31)$$

L'intérêt de la méthode est donc de relier une série (infinie) de résidus au résidu du pôle triple en $z = 0$. Finalement $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

2 Compléments sur l'intégration

2.1 Rappel : intégrale de Riemann

Considérons une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$ borné, t.q. $|f(x)|$ est borné sur l'intervalle. Découpons l'intervalle en N intervalles, de même largeur $\varepsilon = (b-a)/N$ pour simplifier. On note $\xi_k \in [a + k\varepsilon, a + (k+1)\varepsilon]$. L'intégrale de Riemann est définie comme

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k) . \quad (32)$$

2.2 Convergence des intégrales généralisées

On appelle une intégrale généralisée (ou intégrale impropre), une intégrale sur un support non borné, si $a \rightarrow -\infty$ et/ou $b \rightarrow +\infty$, ou l'intégrale d'une fonction non bornée, ayant une singularité en $x_0 \in [a, b]$.

Par exemple, considérons le cas des intégrales de type $\int_a^{\infty} dx f(x)$. Soit F une primitive de f . L'intégrale de Riemann est définie si $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ est finie.

Exemple : $\int_1^{\infty} dx x^{-\eta} < \infty$ (i.e. l'intégrale de Riemann existe) ssi $\eta > 1$.

Exemple 2 : $\int_0^1 dx x^{-\eta} < \infty$ ssi $\eta < 1$.

Convergence absolue : L'intégrale $\int_A dx f(x)$ converge **absolument** ssi $\int_A dx |f(x)| < 1$.

Exemple : $\int_{\mathbb{R}} dx \frac{x^2-1}{1+x^4}$ est absolument convergente.

Intégrale semi-convergente : Si une intégrale de Riemann est convergente mais non absolument convergente, on dit qu'elle est « semi-convergente ».

Exemple : $\int_{\mathbb{R}} dx \operatorname{sinc}(x)$, où $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$, est semi-convergente.

2.3 Intégrale de Lebesgue (pour la culture)

L'intégrale de Riemann procède en découpant l'intervalle de départ en N petits intervalles. Cette manière de procéder peut poser des problèmes (pour les mathématiciens). Par exemple, considérons la fonction de Dirichlet, la fonction indicatrice ² de \mathbb{Q} sur \mathbb{R} :

$$\mathcal{D}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (33)$$

On voit que l'intégrale de $\mathcal{D}(x)$ définie comme (32) n'est pas définie : si l'on choisit les ξ_k dans \mathbb{Q} , on obtient $\int_0^1 dx \mathcal{D}(x) = 1$ alors que si l'on choisit $\xi_k \notin \mathbb{Q}$, on obtient $\int_0^1 dx \mathcal{D}(x) = 0$ (un choix hybride donnerait un résultat intermédiaire). Quelle est la « bonne procédure » pour définir l'intégrale de cette fonction ?

La construction de l'intégrale de Lebesgue procède en trois étapes :

² **Fonction indicatrice :** Soit $A \subset \mathbb{R}$. La fonction indicatrice de l'ensemble A est $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

- (1) On définit la notion de *mesure* d'un ensemble. La mesure de Lebesgue est définie comme suit : La mesure d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} est

$$\mu([a, b]) = |b - a|. \quad (34)$$

En particulier, si l'ensemble est un point, $\{a\} \equiv [a, a]$, la mesure de l'ensemble est nulle

$$\mu([a, a]) = 0. \quad (35)$$

Un ensemble contenant un nombre infini *dénombrable* de points est de mesure nulle. Par exemple :

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu(\mathbb{Z}) = \mu(\mathbb{Q}) = 0 \quad (36)$$

Pour voir que \mathbb{Q} est dénombrable, on peut se souvenir que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

- (2) On introduit les *fonctions mesurables*, fonctions définies sur des ensembles mesurables.
 (3) a) Dans un premier temps, on introduit les fonctions étagées :

$$f(x) = \sum_n a_n \chi_{A_n}(x) \quad (37)$$

où A_n sont des sous ensembles de \mathbb{R} et $\chi_A(x)$ la fonction indicatrice de A . L'intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée est

$$\int dx f(x) = \sum_n a_n \mu(A_n). \quad (38)$$

- b) Dans un second temps, on considère les fonctions positives, vues comme limites de fonctions étagées.
 c) Enfin on considère les fonctions de signe quelconque en les décomposant sur des fonctions positives.

Remarques :

- Si une fonction est Riemann-intégrable et Lebesgue-intégrable, les deux intégrales coïncident évidemment.
- Pourquoi passer par les fonctions positives? Toutes les fonctions positives sont « *Lebesgue intégrables* » dans le sens où $\int dx f(x)$ est bien définie (même si le résultat est $+\infty$, par exemple si $f(x) = x^2$ sur \mathbb{R}).
- Pour une fonction f de signe quelconque, on la décompose à l'aide de deux fonctions positives : $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ où :

- $f_+(x) = f(x)$ si $f(x) > 0$ et $f_+(x) = 0$ si $f(x) < 0$.
- $f_-(x) = 0$ si $f(x) > 0$ et $f_-(x) = -f(x) > 0$ si $f(x) < 0$.

L'intégrale de f est alors simplement définie comme $\int f = \int f_+ - \int f_-$. La fonction est « *Lebesgue intégrable* » ssi la différence de ces deux termes est bien définie (ce qui exclut seulement le cas où les deux intégrales $\int f_+$ et $\int f_-$ seraient infinies. Par exemple, $f(x) = x^2 - 1$ est Lebesgue-intégrable car $\int f_+ = +\infty$ et $\int f_- = 4/3$ est finie.

- Une conséquence de la remarque précédente est que les intégrales semi-convergentes de Riemann ne peuvent pas être calculées avec l'approche de Lebesgue. ³

³ Avec l'intégrale de Riemann, il y a une notion « d'ordre » de sommation [1], ce qui permet de donner un sens aux intégrales semi-convergentes. Par analogie, pensons à la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = \ln 2$. L'approche de Lebesgue consisterait à regrouper d'un côté les termes positifs et de l'autre les termes négatifs, ce qui donnerait deux grandeurs infinies.

- Si l'intégrale de f est définie au sens de Lebesgue et $|\int_A dx f(x)| < \infty$, on dira que $f(x)$ est « *sommable* sur A ». Si f est Lebesgue-intégrable et $|\int f| < \infty$, alors cela signifie que $\int f_+ < \infty$ et $\int f_- < \infty$, ce qui revient à $\int |f| = \int f_+ + \int f_- < \infty$ (d'après la discussion précédente).
- **Conclusion** : Si l'intégrale de Riemann procède en découpant l'intervalle de départ $[a, b]$, sur lequel la fonction est intégrée, on voit que l'intégrale de Lebesgue correspond à échantillonner l'intervalle d'arrivée $f([a, b])$: associer à chaque valeur a_n prise par la fonction l'ensemble A_n sur lequel cette valeur est réalisée.

Le problème de l'intégrale de la fonction de Dirichlet est ainsi réglé : au sens de Lebesgue $\int_0^1 dx \mathcal{D}(x) = 1 \times \mu(\text{rationnels de } [0, 1]) = 0$ car $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

Cela dit, en tant que physiciens, on n'aura pas à intégrer la fonction de Dirichlet tous les jours !

2.3.1 Les points à retenir (sur cette introduction à la théorie de Lebesgue)

- La notion de mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .
- « **presque partout** » : Si une propriété est vraie sauf sur un ensemble de mesure nulle, alors on dira qu'elle est vraie « presque partout ».

Exemple : Puisque \mathbb{Q} est de mesure nulle, on écrira que la fonction de Dirichlet est

$$\mathcal{D}(x) = 0 \quad \text{p.p.} \quad (39)$$

- La notion de **fonction sommable** : Les fonctions sommables sont les fonctions Lebesgue-intégrables telles que

$$\int_A dx |f(x)| < \infty \quad (f \text{ sommable sur } A) \quad (40)$$

Pour les fonctions également intégrables au sens de Riemann : “sommable” = “intégrale absolument convergente”.

2.4 Espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$:

ensemble des fonctions f telles que $f(x)^p$ est sommable au sens de Lebesgue sur \mathbb{R} , i.e. $\int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^p < \infty$.

Exemples : $\text{sinc}(x) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais $\in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $p \geq 2$; $\frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-|x|} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais $\notin \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $p \geq 2$; $\frac{x^2-1}{1+x^4} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \forall p \geq 1$.

2.5 Convergence de suite de fonctions

Soit $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Convergence simple : La suite converge *simplement* vers $f(x)$ sur l'ensemble A ssi : $\forall x \in A, \forall \epsilon, \exists N_{\epsilon, x}$ t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour $n > N_{\epsilon, x}$.

Convergence uniforme : La suite converge *uniformément* vers $f(x)$ sur A ssi : $\forall \epsilon \in A, \exists N_{\epsilon}$, t.q. $\forall x, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour $n > N_{\epsilon}$.

Dans la pratique, il sera utile de montrer la convergence uniforme en utilisant le critère suivant

$$\text{Sup}_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (41)$$

Exemple : Si l'on considère $f(x) = \frac{1}{(x-n)^2+1}$, la suite converge simplement et uniformément vers 0 sur tout intervalle *borné*, par exemple sur $[0, 1]$.

En revanche, si elle converge simplement vers 0 sur \mathbb{R} , elle ne converge pas uniformément vers 0 sur \mathbb{R} puisque $\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = 1$.

Exemple 2 : Soit $g_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. La suite converge simplement vers 0 pour $x \in [0, 1[$, i.e. $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ presque partout sur $[0, 1]$.

En revanche, puisque $\sup_{x \in [0, 1]} g_n(x) = 1$, elle ne converge pas uniformément (plus x s'approche de 1, plus la suite converge lentement vers 0).

2.6 Convergence de l'intégrale d'une suite de fonctions

Il arrive parfois que l'on souhaite permuter une limite et une intégrale. Deux théorèmes nous permettent cela :

Théorème : soit $f_n(x)$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers $f(x)$ sur $[a, b]$, un intervalle *borné*. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x dt f_n(t) = \int_a^x dt f(t) \quad (42)$$

la convergence étant uniforme pour $x \in [a, b]$.

Dém. : $\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x dt f_n(t) - \int_a^x dt f(t) \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. QED.

Le théorème est simple, mais pas très puissant car il donne des conditions *suffisantes mais pas nécessaires* et ne concerne que le cas des intervalles bornés, i.e. il est trop restrictif. Donc, inutile de retenir ce premier théorème de la convergence uniforme ! On **retiendra** le théorème utile (et puissant) suivant :

Théorème de Lebesgue de la convergence dominée : soit $f_n(x)$ une suite de fonctions mesurables convergeant (simplement) presque partout vers $f(x)$ sur un ensemble mesurable A . S'il existe une fonction $h(x)$ *sommable* sur A telle que $|f_n(x)| \leq h(x) \forall n$ presque partout, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A dx |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (43)$$

Ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A dx f_n(x) = \int_A dx f(x)$, i.e. qu'il est possible de permuter limite et intégrale.

Exemple : reprenons la fonction $g_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$ qui ne converge pas uniformément et pour laquelle on ne peut donc pas appliquer le théorème de convergence uniforme. Néanmoins $g_n(x) \leq 1$, or $h(x) = 1$ est (trivialement) sommable sur $[0, 1]$. Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée et conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dx g_n(x) = \int_0^1 dx \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$.

Sur ce cas simple, on peut même le vérifier explicitement ! $\int_0^1 dx x^n = 1/(n+1) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Théorème de dérivation sous le signe somme : soit $f(x, \lambda)$ une fonction définie pour $x \in A$ et dépendant d'un paramètre $\lambda \in [a, b]$, t.q. :

- (i) $f(x, \lambda)$ est sommable sur A , $\forall \lambda \in]a, b[$
- (ii) $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ existe presque partout sur A , $\forall \lambda \in]a, b[$

(iii) $\left| \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \leq h(x) \quad \forall \lambda \in]a, b[$, où $h(x)$ est sommable sur A

Alors

$$\frac{d}{d\lambda} \int_A dx f(x, \lambda) = \int_A dx \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (44)$$

Dém. : on part de la formule des accroissements finis $\frac{f(x, \lambda_2) - f(x, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ avec $\lambda < \lambda_1 < \lambda_2$, puis on intègre sur A et on utilise le théorème de Lebesgue pour prendre la limite $\lambda_2 \rightarrow \lambda$.

3 Analyse de Fourier

3.1 Séries de Fourier

3.1.1 Définition

Soit une fonction $f(x)$ périodique de période L , i.e. $f(x + L) = f(x)$ (ou simplement une fonction définie seulement sur l'intervalle $[0, L]$ borné). Nous pouvons écrire la fonction comme une combinaison linéaire des fonctions harmoniques $\exp\{2i\pi n x/L\}$, qui forment une “base” :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{ik_n x} \quad \text{où } k_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi n}{L} \quad (45)$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\hat{f}_n = \int_0^L \frac{dx}{L} f(x) e^{-ik_n x} \quad (46)$$

(la transformée de Fourier discrète de $f(x)$).

Dém. : on considère $\int_0^L dx e^{-ik_n x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}_m e^{ik_m x}$, on permute somme et intégrale, et on utilise $\int_0^L dx e^{i(k_m - k_n)x} = L \delta_{n,m}$.

3.2 Transformation de Fourier dans \mathbb{R}

Si on réécrit la transformée de Fourier discrète comme $\int_{-L/2}^{+L/2} dx f(x) e^{-ik_n x}$ pour la fonction f définie sur $[-L/2, +L/2]$ et que l'on prend la limite $L \rightarrow \infty$, le spectre des k_n devient dense et l'on aboutit à la transformation de Fourier.

3.2.1 Définition

soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier est définie comme

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k [f] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx} \quad (47)$$

Nous pourrions supposer que la fonction est sommable pour simplifier certaines discussions, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ce qui assure que l'intégrale est absolument convergente. Cependant, *on pourra définir la transformée de Fourier tant que l'intégrale existe*, par exemple si l'intégrale est semi-convergente (par exemple pour $f(x) = |x|^{-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$).

3.2.2 Transformée de Fourier inverse

La transformation inverse est donnée par

$$f(x) = \mathcal{F}_x^\dagger [\hat{f}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) e^{ikx}. \quad (48)$$

Dém. : Étudions

$$\mathcal{F}_x^\dagger \left[e^{-\frac{1}{2}(\epsilon k)^2} \mathcal{F}_k [f] \right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon k)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(y) e^{-iky} = \int dy f(y) \int \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon k)^2 + ik(x-y)}$$

où l'introduction de $e^{-\frac{1}{2}(\epsilon k)^2}$ nous a permis de permuter l'ordre d'intégration. On reconnaît que la seconde intégrale correspond à la transformation de Fourier d'une gaussienne, i.e. donne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x-y)}{\epsilon} \right]^2 \right\}$. Finalement, un changement de variable $y = x + \epsilon t$ donne l'identité

$$\mathcal{F}_x^\dagger \left[e^{-\frac{1}{2}(\epsilon k)^2} \mathcal{F}_k [f] \right] = \int_{\mathbb{R}} dt f(x + \epsilon t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Si nous supposons de plus que $f(x)$ est bornée, nous pouvons utiliser le théorème de la convergence dominée pour prendre la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, ce qui donne $\mathcal{F}_x^\dagger [\mathcal{F}_k [f]] = f(x)$. QED.

3.2.3 Propriétés

Nous énonçons une série de propriétés utiles.

 Savoir retrouver ces propriétés **très rapidement** à partir de la définition (48). 

Linéarité : Soient f et g deux fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{F}_k [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \hat{f}(k) + \mu \hat{g}(k). \quad (49)$$

Parité : La TF conserve la parité. Si f est paire (resp. impaire), alors \hat{f} est aussi paire (resp. impaire).

Dém. : Supposons $f(-x) = \pm f(x)$ (+ pour paire et - pour impaire).

Alors $\hat{f}(-k) = \mathcal{F}_{-k} [f(x)] = \mathcal{F}_k [f(-x)] = \mathcal{F}_k [\pm f(x)] = \pm \hat{f}(k)$. QED.

Conjugaison :

$$\mathcal{F}_k [f(x)^*] = \hat{f}(-k)^*. \quad (50)$$

Conséquence :

→ Si $f(x)$ est paire et réelle, on peut combiner les deux propriétés $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$ et $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)^*$, ce qui montre que $\hat{f}(k) \in \mathbb{R}$.

→ Si $f(x)$ est impaire et réelle, on combine $\hat{f}(k) = -\hat{f}(-k)$ et $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)^* \Rightarrow \hat{f}(k) \in i\mathbb{R}$.

Translation : Une translation de a agit sur une fonction comme $f(x) \rightarrow f(x - a)$.

$$\mathcal{F}_k [f(x - a)] = e^{-ika} \hat{f}(k). \quad (51)$$

Dilatation : Une dilatation d'un facteur λ correspond à la transformation $f(x) \rightarrow f(x/\lambda)$.

$$\mathcal{F}_k [f(x/\lambda)] = \lambda \hat{f}(\lambda k) . \quad (52)$$

Cette propriété importante montre que si $f(x) \rightarrow f(x/\lambda)$ s'élargit d'un facteur $\lambda > 1$, sa transformée de Fourier est contractée du même facteur. ⁴

Dérivation : Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction :

$$\boxed{\mathcal{F}_k [f'(x)] = ik \hat{f}(k)} \quad (53)$$

i.e. $\ll \frac{d}{dx} \xrightarrow{\mathcal{F}} ik \gg$.

Propriété très importante qui montre l'importance de la TF pour l'étude des équations différentielles.

Corollaire :

$$\mathcal{F}_k [x f(x)] = i \hat{f}'(k) \quad (54)$$

i.e. $\ll x \xrightarrow{\mathcal{F}} i \frac{d}{dk} \gg$

Relation de Parseval-Plancherel : Soit f et g deux fonctions et \hat{f} et \hat{g} leurs TF. On montre que

$$\int_{\mathbb{R}} dx f(x) g(x)^* = \int_{\mathbb{R}} dk \hat{f}(k) \hat{g}(k)^* . \quad (55)$$

La démonstration de la relation est analogue à celle de la transformation inverse.

Conséquence : $\int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dk |\hat{f}(k)|^2$, ce qui montre que si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

3.2.4 Convolution

Le produit de convolution entre deux fonctions f et g est défini comme

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} dy f(x-y) g(y) = \int_{\mathbb{R}} dy f(y) g(x-y) \quad (56)$$

en particulier $f * g = g * f$.

On vérifie facilement

$$\mathcal{F}_k [f * g] = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k) . \quad (57)$$

Inversement, la TF d'un produit de fonctions est la convolution de leurs TF.

3.2.5 Exemples :

(i) La gaussienne est invariante sous la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}_k \left[e^{-\frac{1}{2}x^2} \right] = e^{-\frac{1}{2}k^2} . \quad (58)$$

Il sera parfois utile de considérer la TF de la gaussienne normalisée de largeur a

$$g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} e^{-\frac{1}{2}(x/a)^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{g}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(ka)^2} \quad (59)$$

(on peut écrire $\hat{g}_a = a g_{1/a}$)

⁴ Cette propriété est liée à la relation $\Delta x \Delta k \geq 1/2$ où Δx est la largeur de f et Δk la largeur de \hat{f} . La largeur de f est définie comme $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ où $\langle x \rangle = [\int dx x |f(x)|^2] / [\int dx |f(x)|^2]$ et $\langle x^2 \rangle = [\int dx x^2 |f(x)|^2] / [\int dx |f(x)|^2]$. De même pour Δk , définie à partir de \hat{f} .

- (ii) On considère la fonction $\Pi_a(x) = \frac{1}{a}\Pi_1(x/a)$ où $\Pi_1(x) = 1$ pour $|x| < 1/2$ et $\Pi_1(x) = 0$ pour $|x| > 1/2$. Un calcul très simple donne

$$\widehat{\Pi}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\Pi}_1(ak) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(ka/2) \quad (60)$$

qui est une fonction de largeur $1/a$.

- (iii) On considère maintenant $T_a(x) = \frac{1}{a}T_1(x/a)$ où $T_1(x) = 1 - |x|$ pour $|x| < 1$ et $T_1(x) = 0$ pour $|x| > 1$. On obtient

$$\widehat{T}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\text{sinc}(ka/2)]^2. \quad (61)$$

- (iv) Finalement nous considérons $t_a(x) = \frac{1}{a}t_1(x/a)$ où $t_1(x) = (1/2)e^{-|x|}$. Un calcul très simple donne

$$\widehat{t}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + (ka)^2} \quad (62)$$

Remarques :

- Toutes ces fonctions sont paires et réelles, propriétés qui se retrouvent sur les TF.
- On a obtenu $\widehat{T}_a(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{\Pi}_a(k)^2$. On a en effet $T_a = \Pi_a * \Pi_a$.
- On note que $\widehat{\Pi}_a(k) \sim 1/k$ pour $k \rightarrow \infty$ alors que $\widehat{T}_a(k)$ et $\widehat{t}_a(k)$ présentent toutes deux le même comportement $\sim 1/k^2$ à l'infini. C'est une manifestation de la **réciprocité de Fourier** qui relie les propriétés de la fonction aux petites échelles (continuité, dérivabilité) au comportement de sa TF à grand k . $\widehat{\Pi}_a(k) \sim 1/k$ pour $k \rightarrow \infty$ a pour origine la discontinuité de la fonction Π_a pour $x = \pm 1/2$ alors que pour les deux autres fonctions, le comportement $\sim 1/k^2$ est relié à la discontinuité de la dérivée à l'origine.

3.3 Transformation de Fourier dans \mathbb{R}^d

La généralisation est très naturelle si l'on considère des fonctions définies sur \mathbb{R}^d .

$$\widehat{f}(\vec{k}) = \mathcal{F}_{\vec{k}}[f] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d \vec{x}}{(2\pi)^{d/2}} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (63)$$

$$f(\vec{x}) = \mathcal{F}_{\vec{x}}^\dagger[\widehat{f}] = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^{d/2}} \widehat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (64)$$

(il est entendu que $d^d \vec{x} \equiv dx_1 dx_2 \cdots dx_d$).

On retrouvera facilement les analogues des propriétés démontrées plus haut pour la TF des fonctions définies sur \mathbb{R} . Mentionnons deux propriétés :

- La dérivation :

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[\vec{\nabla} f] = i\vec{k} \widehat{f}(\vec{k}). \quad (65)$$

- La convolution est maintenant définie comme $(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \vec{y} f(\vec{x} - \vec{y}) g(\vec{y})$ d'où

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[f * g] = (2\pi)^{d/2} \widehat{f}(\vec{k}) \widehat{g}(\vec{k}). \quad (66)$$

Transformée de Fourier des fonctions radiales dans \mathbb{R}^3

Étudios

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[\phi(\|\vec{x}\|)] = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \phi(\|\vec{x}\|) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (67)$$

Il est toujours possible de faire une rotation (de la variable muette d'intégration \vec{x}) pour ramener le vecteur \vec{k} selon \vec{u}_z , ce qui simplifie l'écriture de l'intégrale dans le système de coordonnées sphériques

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[\phi(\|\vec{x}\|)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr r^2 \phi(r) \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-ikr \cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (68)$$

On aboutit facilement à la formule utile

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[\phi(\|\vec{x}\|)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty dr r \sin(kr) \phi(r) \quad (69)$$

Ce qui montre que la TF d'une fonction radiale est une fonction radiale.

Exemple : On vérifiera aisément que

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[e^{-\alpha r}] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{8\pi\alpha}{(\vec{k}^2 + \alpha^2)^2}. \quad (70)$$

Notons que la loi de puissance $1/k^4$ a pour origine la réciprocité de Fourier puisque, si la fonction est continue partout, sa dérivée $\vec{\nabla} e^{-\alpha r} = -\alpha \frac{\vec{r}}{r} e^{-\alpha r}$ n'est pas continue à l'origine (le vecteur \vec{r}/r tend vers différentes limites selon la direction lorsque $r \rightarrow 0$).

3.4 Application pour la résolution des équations différentielles

On a étudié plusieurs exemples en cours et TD.

4 Distribution de Dirac

4.1 Définition

Considérons une fonction $h(x)$ ayant les propriétés :

- $h(x)$ est de largeur ~ 1 .
- $h(x)$ est centrée sur $x \sim 0$.
- $\int dx h(x) = 1$.

Dilatons cette fonction d'un facteur ϵ , en gardant sa normalisation,

$$\delta_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \quad (71)$$

Considérons maintenant une fonction $\varphi(x)$ continue en $x = 0$ et bornée (pour simplifier). Ces hypothèses nous permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée pour

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int dx \delta_\epsilon(x) \varphi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int dt h(t) \varphi(\epsilon t) = \varphi(0) \quad (72)$$

La théorie des distributions permet de donner un sens mathématique (rigoureux) à

$$\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta_\epsilon(x) \quad (73)$$

(c'est une « limite au sens des distributions »). On pourra simplement retenir

$$\boxed{\int dx \delta(x) \varphi(x) = \varphi(0)} \quad (74)$$

comme définition de la distribution de Dirac $\delta(x)$. (74) est l'*unique relation à retenir*, le reste du chapitre discutant des applications s'en déduisant facilement.

Remarques

- Nous avons ainsi introduit un objet (une « distribution ») extrêmement singulier, nul partout sauf en $x = 0$ où il est infini (précisément, où le poids de $\delta(x)$ est concentré puisque $\int dx \delta(x) = 1$). La théorie des distributions permet de donner un sens rigoureux à cet objet.
- Remarquons qu'en l'absence de l'intégrale, on peut écrire $\delta(x) \varphi(x) = \delta(x) \varphi(0)$ puisque l'expression est nulle partout sauf en $x = 0$.
- **Notations de la théorie des distributions :** (pour les mathématiciens) La définition (74) fait ressortir la nature précise de la distribution : une *fonctionnelle linéaire*, définie par son action sur une « fonction test » φ , i.e. une application d'un espace fonctionnel vers \mathbb{C} . On distingue deux types de distributions :

* Les distributions régulières, notées $[f]$, associées aux fonctions usuelles. L'action de la distribution sur la fonction test est notée à l'aide d'un crochet rappelant un produit scalaire : $\langle [f], \varphi \rangle = \int dx f(x) \varphi(x)$. Les fonctions tests sont choisies afin que $\langle \clubsuit, \spadesuit \rangle$ présente les propriétés simples, telles que $\langle [f]', \varphi \rangle = -\langle [f], \varphi' \rangle$, ce qui fournit une définition de la dérivation au sens des distributions (et montre que $[f]' = [f']$, i.e. la dérivée de la distribution régulière est représentée par la distribution régulière associée à la dérivée de la fonction f). On pourra se référer à la représentation $\langle T, \varphi \rangle$ pour une distribution T , en cas de doute sur une propriété.

* Les distributions singulières, dont fait partie la distribution de Dirac, $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

4.2 Propriétés

Un certain nombre de propriétés simples que l'on démontre facilement à l'aide de (74) (par de simples changements de variables).

Translation :

$$\int dx \delta(x - a) \varphi(x) = \varphi(a) \quad (75)$$

Dilalation : soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x) \quad (76)$$

δ d'une fonction : Soit $f(x)$ une fonction ayant N racines *simples* $\{x_1, \dots, x_N\}$ (i.e. $f'(x_n) \neq 0$) : en combinant les deux relations précédentes :

$$\delta(f(x)) = \sum_{n=1}^N \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} = \frac{1}{|f'(x)|} \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \quad (77)$$

où la seconde égalité utilise $\delta(x) \varphi(x) = \delta(x) \varphi(0)$.

Convolution : la distribution de Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$\delta * f = f * \delta = f \quad (78)$$

Dém. : on reprend la définition du produit de convolution $(\delta * f)(x) = \int dx \delta(x-y)f(y)$ et de δ .

Transformée de Fourier : La transformée de Fourier de δ est une constante $\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (cf. définition de la TF). En écrivant la transformée de Fourier inverse, nous obtenons une représentation extrêmement utile de δ :

$$\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \quad (79)$$

Exercice : Vérifier que $\mathcal{F}_x^\dagger[\mathcal{F}_k[f]] = f(x)$ en utilisant cette propriété.

Dirac et Heaviside : On définit la fonction de Heaviside comme

$$\theta_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (80)$$

Nous remarquons que $\int_{-\infty}^x du \delta(u) = \theta_H(x)$. Puisque la distribution de Dirac est symétrique, $\delta(x) = \delta(-x)$, il est naturel (et parfois utile en physique) de choisir $\theta_H(0) = 1/2$.

La distribution de Dirac permet donc de *donner un sens à la dérivée d'une fonction discontinue* :

$$\frac{d}{dx} \theta_H(x) = \delta(x) \quad (81)$$

La généralisation au cas d'une fonction f discontinue en x_0 , mais continue et dérivable partout ailleurs, est

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) + [f(x_0^+) - f(x_0^-)] \delta(x - x_0) \quad (\text{formule du saut}) \quad (82)$$

où $f'(x)$ est la dérivée de la fonction, définie $\forall x \neq x_0$.

Exemple : considérons $f(x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x) e^{-\lambda|x|}$. L'application de la formule du saut donne $\frac{d}{dx} f(x) = -\frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|} + \delta(x) = -\lambda \text{sign}(x) f(x) + \delta(x)$.

Dérivées de la distribution δ : nous partons de la définition (74) et utilisons une intégration par partie pour définir la dérivée du δ : $\int dx \delta'(x) \varphi(x) = - \int dx \delta(x) \varphi'(x) = -\varphi'(0)$. De manière générale, l'action de $\delta^{(n)}$ est définie par

$$\int dx \delta^{(n)}(x) \varphi(x) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) . \quad (83)$$

Il est intéressant de considérer la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}_k [\delta^{(n)}] = (ik)^n \mathcal{F}_k [\delta] = \frac{(ik)^n}{\sqrt{2\pi}} \quad (84)$$

Il est remarquable que nous ayons pu donner un sens à la transformée de Fourier de x^n (alors que cette fonction n'est clairement pas sommable !)

Solution de l'équation $x^n f(x) = 0$ dans l'espace des distributions : Si l'on recherche la solution de $x f(x) = 0$ dans l'espace des fonctions, i.e. on cherche une solution continue par morceaux telle que l'équation soit satisfaite $\forall x$, alors on obtient la solution triviale $f(x) = 0$ p.p.

En remarquant que $x \delta(x) = 0$, on voit que si la solution de l'équation est recherchée dans l'espace (plus large) des distributions, alors nous trouvons une solution non triviale $f(x) = c \delta(x)$ où c est une constante arbitraire.

De même, puisque $x^n \delta^{(n-1)}(x) = 0$ (cf. définition de $\delta^{(n)}$), nous voyons que, dans l'espace des distributions, la solution de

$$x^n f(x) = 0 \quad \text{est} \quad f(x) = c_0 \delta(x) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x) \quad (85)$$

où c_0, \dots, c_{n-1} sont des constantes arbitraires.

Exemple : la solution de $(x^2 - 1) f(x) = 0$ est $f(x) = a \delta(x - 1) + b \delta(x + 1)$.

4.3 Applications :

4.3.1 Densités

La distribution de Dirac nous permet d'écrire des densités très naturellement.

Exemple : densité de masse.— Considérons des masses m_1, \dots, m_N , concentrées en des points x_1, \dots, x_N . La densité de masse est

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^N m_n \delta(x - x_n). \quad (86)$$

Par exemple, on vérifie que $\int_A dx \mu(x)$ est la somme des masses qui sont dans l'intervalle.

En particulier, cela nous fournit un *moyen de passer du discret* (les N particules) *au continu* (la densité de masse définie comme une "fonction", ou plutôt une "distribution").

Exemple 2 : densité de particules et dynamique.— Pour insister sur ce dernier point, considérons N particules décrites par une équation d'évolution $\frac{dx_i(t)}{dt} = F(x_i(t))$. Introduisons la densité $\rho_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t))$ caractérisant la distribution des particules au temps t . Son équation d'évolution est

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [F(x) \rho_t(x)]. \quad (87)$$

Dém. : $\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^N F(x_i(t)) \delta'(x - x_i(t)) = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^N F(x_i(t)) \delta(x - x_i(t)) = -\frac{\partial}{\partial x} F(x) \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t))$. QED.

Exercice : Si la dynamique est décrite par l'équation de Newton dans un champ de force $F(x)$, on doit introduire une distribution dans l'espace des phases $\rho_t(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)) \delta(p - p_i(t))$. Déduire l'équation d'évolution de $\rho_t(x, p)$ (équation de Liouville) sachant que les équations du mouvement pour la particule i sont $\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{1}{m} p_i(t)$ et $\frac{dp_i(t)}{dt} = F(x_i(t))$.

Densité d'états en MQ : Considérons un problème quantique dont le spectre des énergies est donné par $E_n = \varepsilon_0 n^\alpha$ où $n \in \mathbb{N}$ est un nombre quantique. La notion de densité d'états est très utile :

$$\rho(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n) \quad (88)$$

ou de manière équivalente $\rho(E)dE \stackrel{\text{def}}{=} \text{nombre d'états quantiques} \in [E, E + dE]$. Si cette fonction est sondée à « grande échelle » (sur des échelles d'énergie $\gg \varepsilon_0$), on peut remplacer la somme par une intégrale ⁵ $\sum_{n=0}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty} dn$:

$$\rho(E) = \int_0^{\infty} dn \delta(E - \varepsilon_0 n^\alpha) \quad (89)$$

En posant $y = \varepsilon_0 n^\alpha$, puis en utilisant la définition du δ , on obtient

$$\rho(E) = \frac{1}{\alpha \varepsilon_0} \left(\frac{E}{\varepsilon_0} \right)^{-1+1/\alpha} \quad (90)$$

- Pour $\alpha = 1$ et $\varepsilon_0 = \hbar\omega$, on a la densité d'états de l'oscillateur harmonique $\rho(E) = 1/(\hbar\omega)$.
- Pour $\alpha = 2$ et $\varepsilon_0 = \pi^2 \hbar^2 / (2mL^2)$, on obtient la densité d'états d'une particule dans une boîte $\rho(E) = (\sqrt{2m} L) / (2\pi \hbar \sqrt{E})$.

4.3.2 Équations différentielles linéaires avec terme de source – Fonctions de Green

Considérons par exemple l'équation différentielle

$$\dot{I}(t) + \lambda I(t) = \frac{1}{L} U(t) \quad (91)$$

décrivant la dynamique du courant dans un circuit RL soumis à une tension $U(t)$, où $\lambda = R/L$. La méthode de variation de la constante permet de résoudre l'équation. Une autre méthode consiste à introduire la fonction de Green de l'équation différentielle, solution de

$$\dot{G}(t) + \lambda G(t) = \delta(t) \quad (92)$$

puis écrire la solution comme une convolution

$$I(t) = \int dt' G(t-t') \frac{U(t')}{L}. \quad (93)$$

Vérification :

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \int dt' G(t-t') \frac{U(t')}{L} = \int dt' \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) G(t-t') \frac{U(t')}{L} = \int dt' \delta(t-t') \frac{U(t')}{L} = \frac{1}{L} U(t)$$

QED. Ici la fonction de Green peut être trouvée facilement : on montre que

$$G(t) = \theta_{\text{H}}(t) e^{-\lambda t}. \quad (94)$$

Exercice : Retrouver l'expression de $G(t)$ à l'aide de la transformation de Fourier. Que devient cette analyse en présence d'amplification ($\lambda < 0$) plutôt que de dissipation ($\lambda > 0$) ? Calculer $G(t)$ en utilisant la TF dans ce cas.

Exercice : Calculer (avec la TF) la fonction de Green du circuit RLC

$$\ddot{G}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t) \quad (95)$$

⁵ En pratique, et pour être plus précis, cela veut dire que si l'on considère des sommes du type $\sum_n f(E) = \int dE \rho(E) f(E)$ où la fonction f varie lentement à l'échelle de ε_0 , on peut remplacer la somme par une intégrale. Cela revient à faire une moyenne locale de $\rho(E)$ sur une échelle $\gg \varepsilon_0$.

Références

- [1] W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H&K Eds, fifth edition (2017).
- [2] C. Aslangul, *Des mathématiques pour les sciences*, de Boeck, Bruxelles (2011).
- [3] E. Belorizky, *Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs*, EDP Science (2015).
- [4] P. Benoist-Gueutal and M. Courbage, *Mathématiques pour la physique*, Eyrolles (1992), tomes 1, 2 & 3.
- [5] V. Dotsenko, A. Courtat and G. Gauthier, *Méthodes mathématiques pour la physique*, Dunod (2018).
- [6] H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*, Cassini, Paris (2003).
- [7] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann (1965).
- [8] M. R. Spiegel, *Variables complexes*, McGraw Hill (1964).
- [9] C. Texier, *Mécanique quantique*, Dunod, Paris, second edition (2015).