Examen partiel de mathématiques

Lundi 25 février 2019

Durée de l'épreuve : **2 heures.**

L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, … est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et **rédigez** *succinctement* et *clairement* votre réponse.
n'oubliez pas de vous **relire**.
Pensez aux **informations en annexe**.

Question de cours

Soit $f = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

1/ À quelles conditions sur u et v, f est-elle une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + \mathrm{i}y$?

2/ $v(x,y) = \cos x \,\mathrm{sh}\, y$ est-elle la partie imaginaire d'une fonction holomorphe ? Si oui, laquelle ?

3/ Énoncer le théorème de Cauchy en supposant que f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe.

4/ Rappeler la démonstration du théorème de Cauchy (à partir des conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées cartésiennes).

Exercice 1 : Une intégrale

On souhaite calculer l'intégrale

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\cos kx}{x^2 - 2x + 2} \,. \tag{1}$$

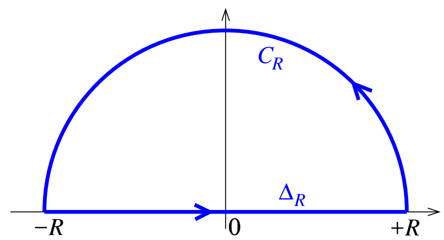
On choisit $k \geqslant 0$. On considère la fonction de la variable complexe

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{z^2 - 2z + 2} \,. \tag{2}$$

1/ Quel est le domaine d'analyticité de la fonction f ?

2/ Si elle a des pôles, calculer les résidus correspondants.

3/ On considère le contour suivant :



Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \mathrm{d}z\, f(z) = 0\,. \tag{3}$$

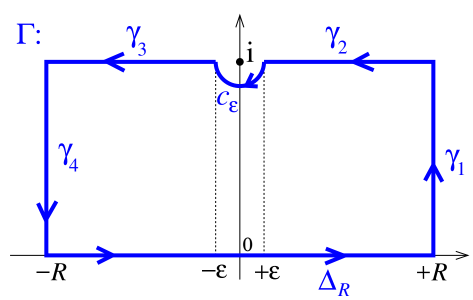
4/ En appliquant le théorème des résidus, déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)$, puis l'intégrale $\Phi(k)$.

Exercice 2 : Application du théorème de Cauchy

L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{x}{\operatorname{sh} \pi x}\,. \tag{4}$$

On considère le contour suivant :



1/ Quel est le domaine d'analyticité de la fonction

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sh} \pi z}\ ? \tag{5}$$

Si la fonction a une(des) singularité(s), préciser sa(leur) nature.

2/ Paramétrer les différents morceaux du contour $\Gamma = \Delta_R \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup c_\varepsilon \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$.

3/ Montrer que dans la limite $R \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$ les trois morceaux Δ_R, γ_2 et γ_3 du contour Γ donnent une contribution proportionnelle à I :

$$\lim_{R\to\infty\ ,\ \varepsilon\to 0} \left(\int_{\Delta_R} \mathrm{d}z\, f(z) + \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z) + \int_{\gamma_3} \mathrm{d}z\, f(z) \right) = \alpha\, I \tag{6}$$

donner le coefficient α.

3/ Montrer que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) = 0$ et que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} \mathrm{d}z\, f(z) = 0$.

4/ Calculer la contribution du demi cercle $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c_\varepsilon} \mathrm{d}z\, f(z)$.

5/ Déduire I.

Exercice 3 : Série de Laurent

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)} \,. \tag{7}$$

1/ Discuter l'analyticité de cette fonction et la nature de ses singularités.

2/ Donner les développements en série de Laurent, en précisant les domaines de convergence des séries :

(a) un développement autour de $z = 0$, valable lorsque $z \to 0$.

(b) Un développement autour de $z = -1$, pour $1 < |z+1| < 2$.

Comparer (dessiner les domaines de convergence). Ces deux développements ont-ils un coefficient commun ? Si oui pourquoi ?

Annexe

On rappelle les deux lemmes de Jordan. Considérons $f(z)$ sur $\mathcal{C}_R$, un arc de cercle de rayon R centré sur 0, alors

$$\lim_{R\to 0} \operatorname*{Sup}_{z\in\mathcal{C}_R} |z\,f(z)| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{R\to 0} \int_{\mathcal{C}_R} \mathrm{d}z\, f(z) = 0 \tag{8}$$

$$\lim_{R\to \infty} \operatorname*{Sup}_{z\in\mathcal{C}_R} |z\,f(z)| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{R\to \infty} \int_{\mathcal{C}_R} \mathrm{d}z\, f(z) = 0 \tag{9}$$