CORRIGÉ de l'examen partiel de mathématiques du 25 février 2019

Question de cours

$f = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

1/ conditions de Cauchy-Riemann → cf. cours

2/ On donne $v(x,y) = \cos x \,\mathrm{sh}\, y$. On utilise les conditions de Cauchy-Riemann :
(a) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \,\mathrm{sh}\, y = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow u = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + \varphi(x)$.
(b) $\frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \,\mathrm{ch}\, y = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + \chi(y)$.
les deux résultats sont compatibles en choisissant $\varphi = \chi = 0$.
Finalement $f(z) = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + \mathrm{i} \cos x \,\mathrm{sh}\, y = \sin x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \sin(\mathrm{i}y) = \sin z$.

3 & 4/ cf. cours

Exercice 1 : Une intégrale

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{z^2 - 2z + 2} \qquad \text{pour } k \geqslant 0\,. \tag{1}$$

1/ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ est une fonction entière. Le dénominateur est un polynôme $z^2 - 2z + 2 = (z - z_+)(z - z_-)$ qui s'annule pour $z_\pm = 1 \pm \mathrm{i}$. La fonction $1/(z^2 - 2z + 2)$ est donc holomorphe sur $\mathbb{C} - \{z_+,\, z_-\}$, tout comme f. Elle a deux *pôles simples*.

2/ On calcule les résidus aux deux pôles

$$\mathrm{Res}\,[f, z_\pm] = \lim_{z \to z_\pm} [(z - z_\pm) f(z)] = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_\pm}}{z_\pm - z_\mp} = \pm \frac{1}{2\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(1 \pm \mathrm{i})} = \pm \frac{1}{2\mathrm{i}} \mathrm{e}^{(\mathrm{i} \mp 1)k}\,. \tag{2}$$

3/ On borne la fonction sur le demi-cercle :

$$\left| \int_{C_R} \mathrm{d}z\, f(z) \right| \leqslant \frac{\pi R}{(R - |z_+|)(R - |z_-|)} \sim \frac{1}{R} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

On peut aussi utiliser le lemme de Jordan.

4/ Application du théorème des résidus au contour fermé $\Gamma = \Delta_R \cup C_R$:

$$\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) = \underbrace{\int_{\Delta_R} \mathrm{d}x\, f(x)}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)} + \underbrace{\int_{C_R} \mathrm{d}z\, f(z)}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0} = 2\mathrm{i}\pi\, \mathrm{Res}\,[f, z_+] \tag{4}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x) = \pi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k - k} \quad \xrightarrow{\mathrm{Re}} \quad \Phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\cos kx}{x^2 - 2x + 2} = \pi \cos(k)\, \mathrm{e}^{-k} \tag{5}$$

Notons que le résultat doit être une fonction *paire* de k, on a donc $\Phi(k) = \pi \cos(k)\, \mathrm{e}^{-|k|}$ en général. On pourrait le vérifier en considérant $\oint f$ sur un contour refermé par en bas pour $k < 0$.

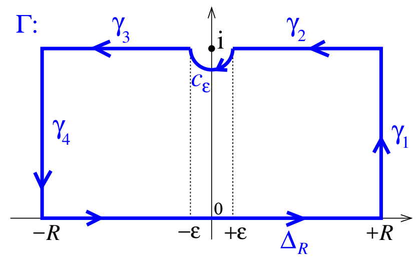
Exercice 2 : Application du théorème de Cauchy

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sh}\pi z} \tag{6}$$

1/ Puisque $\operatorname{sh}(\mathrm{i}\pi y) = \mathrm{i}\sin(\pi y)$, on voit que le dénominateur s'annule linéairement pour $z = \mathrm{i}\,n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Notons toutefois que $z = 0$ est une *singularité apparente* car le numérateur s'annule également. En conclusion f est analytique sur $\mathbb{C} - \mathrm{i}\mathbb{Z}^*$. Toutes les singularités sont des *pôles simples*.

2/ On paramétrise les différents morceaux du contour



Δ_R : $z = x$ avec $x \in [-R, +R]$.
γ_1 : $z = R + \mathrm{i}y$ avec $y \in [0, 1]$. De même pour γ_4 : $z = -R + \mathrm{i}y$ avec $y \in [1, 0]$.
γ_2 : $z = x + \mathrm{i}$ avec $x \in [+R, \varepsilon]$. Et γ_3 : $z = x + \mathrm{i}$ avec $x \in [-\varepsilon, -R]$.
c_ε : $z = \mathrm{i} + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0, -\pi]$.

3/ Il est clair que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Delta_R} \mathrm{d}x\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{x}{\operatorname{sh}\pi x} \equiv I\,. \tag{7}$$

D'autre part, en utilisant la périodicité de la fonction sh : $\operatorname{sh}\pi(x + \mathrm{i}) = -\operatorname{sh}\pi x$

$$\int_{\gamma_2\cup\gamma_3} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_{+R}^{+\varepsilon} \mathrm{d}x\, \frac{x + \mathrm{i}}{\operatorname{sh}\pi(x + \mathrm{i})} + \int_{-\varepsilon}^{-R} \mathrm{d}x\, \frac{x + \mathrm{i}}{\operatorname{sh}\pi(x + \mathrm{i})} = \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+R}\right) \mathrm{d}x\, \frac{x + \mathrm{i}}{\operatorname{sh}\pi x}\,. \tag{8}$$

sh est une fonction *impaire*, d'où

$$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+R}\right) \mathrm{d}x\, \frac{1}{\operatorname{sh}\pi x} = 0 \tag{9}$$

Finalement

$$\int_{\gamma_2\cup\gamma_3} \mathrm{d}z\, f(z) = \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+R}\right) \mathrm{d}x\, \frac{x}{\operatorname{sh}\pi x} \underset{R\to\infty\ \&\ \varepsilon\to 0}{\longrightarrow} I \tag{10}$$

On conclut que la constante de l'énoncé est $\alpha = 2$.

3/ On borne f sur les segments γ_1 et γ_3.
Examinons le dénominateur : nous remarquons simplement que $\operatorname{sh}\pi(R + \mathrm{i}y) \sim \mathrm{e}^{\pi R}$ ce qui laisse penser que les deux intégrales tendent vers zéro dans la limite $R \to \infty$.
On peut être plus soigneux et chercher un *minorant* du dénominateur :

$$|\operatorname{sh}\pi(R + \mathrm{i}y)| = \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{\pi(R+\mathrm{i}y)} - \mathrm{e}^{-\pi(R+\mathrm{i}y)}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi R} - \mathrm{e}^{-\pi R}\right) = \operatorname{sh}\pi R \tag{11}$$

(on a juste utilisé $|z_1 + z_2| \geqslant \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$). Finalement, pour $z \in \gamma_1$ on a

$$|f(R + \mathrm{i}\,y)| \leqslant \frac{R + 1}{\operatorname{sh}\pi R} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z)\right| = \left|\int_0^1 \mathrm{i}\mathrm{d}y\, f(R + \mathrm{i}y)\right| \leqslant \frac{R + 1}{\operatorname{sh}\pi R} \sim R\,\mathrm{e}^{-\pi R} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le calcul est le même pour γ_4 : $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4}\mathrm{d}z\, f(z) = 0$.

4/ Le dernier morceau d'intégrale se calcule en paramétrant le demi-cercle :

$$\int_{c_\varepsilon}\mathrm{d}z\, f(z) = \int_0^{-\pi}\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{d}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{\mathrm{i}+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{sh}\,\pi(\mathrm{i}+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} \underset{\varepsilon\to 0}{\simeq} \int_{-\pi}^{0}\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{d}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{\mathrm{i}+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\pi\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -1 \tag{12}$$

où l'on a utilisé $\mathrm{sh}\,\pi(\mathrm{i}+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = -\,\mathrm{sh}(\pi\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \simeq -\pi\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\varepsilon\to 0$

5/ Conclusion : on utilise le théorème de Cauchy $\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) = 0$ et l'on prend la limite $R\to\infty$ et $\varepsilon\to 0$ d'où

$$\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) = \underbrace{\int_{\Delta_R}\mathrm{d}x\, f(x)}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} I} + \underbrace{\int_{\gamma_1}\mathrm{d}z\, f(z)}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\int_{\gamma_2\cup\gamma_3}\mathrm{d}z\, f(z)}_{\underset{R\to\infty\ \&\ \varepsilon\to 0}{\longrightarrow} I} + \underbrace{\int_{\gamma_4}\mathrm{d}z\, f(z)}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\int_{c_\varepsilon}\mathrm{d}z\, f(z)}_{\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -1} = 0$$

Finalement $2I-1=0$ i.e.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\frac{x}{\mathrm{sh}\,\pi x} = \frac{1}{2}\,. \tag{13}$$

Exercice 3 : Série de Laurent

1/ La fonction $f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}$ est analytique sur $\mathbb{C}-\{0,\,1\}$. Les deux singularités sont des *pôles simples*.

2/ On écrit $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$

(a) Autour de $z=0$, on peut développer $1/(1-z)$ en série géométrique, dans le disque $|z|<1$, d'où

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{pour } |z|<1\,. \tag{14}$$

Si on appelle a_n les coefficients du développement de Laurent on a $a_n = 0$ pour $n<1$, le résidu est $a_{-1}=1$ et $a_n = 1$ pour $n\geqslant 0$.

(b) Autour de $z=-1$, dans la couronne $1<|z+1|<2$: on écrit

$$f(z) = \frac{1}{z+1-1} + \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{(z+1)\left(1-\frac{1}{z+1}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\frac{z+1}{2}\right)}$$

on utilise que $|\frac{1}{z+1}|<1$ et $|\frac{z+1}{2}|<1$ dans la couronne pour développer en séries géométriques :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(z+1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}(z+1)^n \tag{15}$$

les coefficients du nouveau développement de Laurent sont $b_n = 1$ pour $n<0$ et $b_n = 2^{-n-1}$ pour $n\geqslant 0$.

On remarque que $a_{-1} = b_{-1} = 1$. Explication : ces deux coefficients de Laurent sont donnés par une intégrale qui entoure le pôle simple en $z=0$ (cf. cours).