Université Paris-Sud **Année 2018–2019**
Licences L3 PAPP & PMEC

Mathématiques pour la Physique II

TD 6 : Compléments sur l'intégration

Notation : on écrira $\int_A \mathrm{d}x\, f(x) < \infty$ pour désigner une intégrale *convergente.*

Exercice 1 : Convergence d'intégrales de Riemann impropres

Discuter la convergence des intégrales impropres suivantes, en fonction de $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^2}{(1+x^2+x^4)^{\frac{\alpha+2}{4}}}, \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{[\sin(\pi x)]^\alpha}, \qquad \int_1^\infty \mathrm{d}x \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

Exercice 2 : Théorème d'Abel

1 – Soit $f(x)$ une fonction bornée (en valeur absolue) sur $\mathbb{R}_+$ et monotone avec $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Deux exemples : $f(x) = (1+x)^{-a}$ pour $a > 0$ ou $f(x) = 1/\big[1 + \ln(x+1)\big]$.

Discuter la convergence de l'intégrale suivante

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\, \sin x\,. \tag{1}$$

Est-elle absolument convergente, semi-convergente ou divergente ?

2 – (FACULTATIF) Démontrer le théorème suivant :

Théorème d'Abel : Soit f et g deux fonctions satisfaisant les propriétés :
(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
(ii) f est dérivable et $\int_a^\infty \mathrm{d}x\, |f'(x)| < \infty$.
(iii) g est dérivable et $|g(x)|$ est bornée par une constante sur $[a, +\infty[$.
Alors

$$\int_a^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\, g'(x) < \infty$$

Retrouver le résultat de la première question par application du théorème.

Exercice 3 : Convergence uniforme *versus* convergence dominée

• Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions. La suite converge *uniformément* vers $f(x)$ pour $x \in A$ si $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ pour $n \to \infty$.

Une condition *suffisante* pour permuter limite et intégrale dans $\lim_{n\to\infty} \int_A \mathrm{d}x\, f_n(x)$ est que la suite de fonctions soit uniformément convergente sur A, un intervalle de mesure finie.

• Le théorème de Lebesgue de la convergence dominée donne des conditions plus faibles pour permuter limite et intégrale.

1 – Rappeler le théorème de Lebesgue de la convergence dominée.

2 – Pour les suites de fonctions suivantes, peut-on appliquer le théorème sur la convergence uniforme ou le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée pour permuter limite et intégrale ?

(*i*) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{n}{a\,n+2+(n+3)\cos(2\pi x)}$, avec $a > 2$.

(*ii*) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, g_n(x)$ où $g_n(x) = x^n$.

(*iii*) Tracer la fonction

$$h_n(x) = \begin{cases} n^{3/2}x & \text{pour } x \in [0, 1/n] \\ 1/\sqrt{x} & \text{pour } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

et discuter la convergence de $\int_0^1 \mathrm{d}x\, h_n(x)$.

Exercice 4 : Dérivation sous le signe $\int$

1 – Considérons l'intégrale $I(\lambda) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x,\lambda)$ dépendant d'un paramètre λ. Rappeler les conditions permettant de permuter dérivation par rapport à λ et intégration.

2 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant la dérivation sous le signe $\int$:

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x\, x^2 \sin x \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\, \mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}\,.$$

(ici on pourra aussi utiliser la dérivation par parties pour vérifier le résultat).

Exercice 5 : Causalité et analyticité

On souhaite établir une relation entre causalité d'une fonction et propriétés d'analyticité de sa transformée de Fourier. Soit $\chi(t)$ une fonction *causale* et tendant vers 0 pour $t \to \infty$,

$$\chi(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty \mathrm{d}t\, |\chi(t)| < \infty\,. \tag{2}$$

Le prolongement analytique de sa transformée de Fourier (aux fréquences complexes) est

$$\widetilde{\chi}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \chi(t)\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}zt} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}\,. \tag{3}$$

1 – Montrer que

$$\boxed{\frac{\partial\widetilde{\chi}(z)}{\partial z^*} = 0 \quad \text{pour } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0} \tag{4}$$

(préciser pourquoi la propriété n'est pas vraie pour $\mathrm{Im}(z) < 0$).

2 – Que pouvez-vous conclure sur les propriétés analytiques de $\widetilde{\chi}(z)$?

3 – Illustration : Analyser la transformée de Fourier $\widetilde{\chi}(z)$ de $\chi(t) = \theta_\mathrm{H}(t)\, \exp\big\{-\big(\mathrm{i}\omega_0 + \frac{1}{\tau}\big)t\big\}$ pour $\tau > 0$, où $\theta_\mathrm{H}(t)$ est la fonction de Heaviside ($\theta_\mathrm{H}(t) = 1$ pour $t > 0$ et $= 0$ pour $t < 0$).

Commentaire : cette propriété a des conséquences extrêmement importantes en physique. En particulier, elle conduit aux célèbres relations de **Kramers-Kronig** reliant l'indice de *réfraction* d'un milieu optique et son coefficient d'*absorption*. Plus généralement, elle permet d'établir une relation entre parties réactive et dissipative d'une fonction de réponse.