TD 7 : Transformation de Fourier

On prendra comme définition de la transformée de Fourier d'une fonction f, sommable sur $\mathbb{R}$,

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{1}$$

La transformée de Fourier inverse est

$$f(x) = \mathcal{F}_x^{\dagger}[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{2}$$

Exercice 1 : Préliminaire : Séries de Fourier

1 – On étudie la fonction périodique

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cosh\lambda - \cos x} \qquad \text{pour } \lambda > 0\,. \tag{3}$$

Calculer $\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$.
Déduire le développement en série de Fourier $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ de cette fonction.

2 – On considère la fonction périodique g de période 2π qui vaut $g(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$. Justifier que la série de Fourier $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ peut se réécrire $g(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ et donner la relation entre les coefficients $\hat{g}_n$ et b_n. Calculer b_n.

3 – Comparer les deux séries de coefficients $\hat{f}_n$ et $\hat{g}_n$.

Exercice 2 : Espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$

$\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f telles que $|f(x)|^p$ soit sommable sur $\mathbb{R}$.

1 – Les fonctions suivantes sont-elles dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$?

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\mathrm{e}^{-|x|}\,, \qquad h(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

Exercice 3 : Trois transformées de Fourier

1 – Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

(*i*) $\Pi_1(x) = 1$ pour $|x| < 1/2$ et $\Pi_1(x) = 0$ sinon.

(*ii*) $T_1(x) = 1 - |x|$ pour $|x| < 1$ et $T_1(x) = 0$ sinon.

(*iii*) $t_1(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$

2 – Dilatation.– Exprimer $\mathcal{F}_k[f(x/\lambda)]$ en fonction de $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$.

Dans les cas suivant, tracer soigneusement la fonction et sa transformée de Fourier :

(*i*) $\Pi_a(x) = \frac{1}{a}\,\Pi_1(x/a)$.

(*ii*) $T_a(x) = \frac{1}{a}\,T_1(x/a)$.

(*iii*) $t_a(x) = \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-|x|/a}$

3 – Déduire la transformée de Fourier de la fonction $\Pi_a(x-b)$ (tracer d'abord la fonction).

Exercice 4 : D'autres transformées de Fourier

1 – Gaussienne.– Vérifier que la fonction gaussienne $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est stable sous la transformation de Fourier,

$$\hat{g} = g \qquad \text{où } \hat{g} = \mathcal{F}[g]\,. \tag{4}$$

2 – On introduit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.

a) Calculer $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

b) Déduire $\mathcal{F}_k[xf(x)]$.

c) Calculer $\mathcal{F}_k[f(x)^2]$.

Suggestion : Utiliser la dérivation sous le signe $\int$ pour relier $\mathcal{F}_k[f(x)^2]$ et $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

3 – Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2} \tag{5}$$

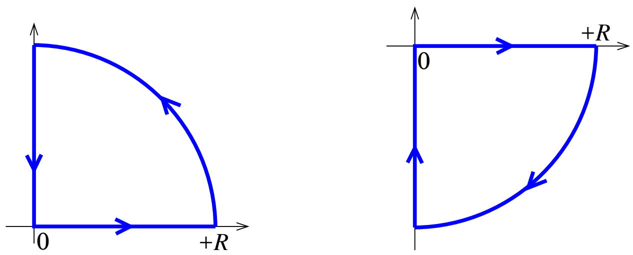
Indication : utiliser le théorème des résidus

4 – On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

a) Discuter la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$.

b) En étudiant l'intégrale de la fonction de la variable complexe $\varphi(z) = z^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$ sur l'un ou l'autre des deux contours suivant, déduire $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$:



Indication : On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t}$.

c) Si la loi de puissance caractérise seulement le comportement asymptotique de la fonction, $\psi(x) \sim x^{-\alpha}$ pour $x \to +\infty$, y a-t-il une relation entre $\hat{\psi}(k)$ et $\hat{f}(k)$? Pour $k \to 0$ ou $k \to \infty$?

Exercice 5 : À propos du théorème d'inversion

1 – Parité.– Soit $f_\pm(x)$ une fonction de parité définie : $f_\pm(-x) = \pm\, f_\pm(x)$.

a) Montrer que $\hat{f}_\pm(k) = \mathcal{F}_k[f_\pm]$ a la même parité.

b) On introduit la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Calculer sa transformée de Fourier.

c) On introduit maintenant les fonctions

$$f_\pm(x) = \phi(x) \pm \phi(-x) \tag{8}$$

Tracer ces deux fonctions. Déduire les deux transformées de Fourier $\hat{f}_\pm(k)$.

d) Vérifier que $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}_+] \to 1$ pour $x \to 0^\pm$.

e) En utilisant la propriété de symétrie, justifier que $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}_-]$ s'annule en $x = 0$.

Commentaire : On peut aussi comprendre ce résultat en utilisant la ≪ partie principale de Cauchy ≫. Pour $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = C$, on définit $⨍ \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^{+B} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)-f(-x)}{2x}$

2 – On considère maintenant une fonction

$$\psi(x) = a\,\phi(x - x_0) + b\,\phi(-x + x_0) \qquad \text{pour } x \neq x_0\,. \tag{9}$$

On ne précise pas la valeur de la fonction en x_0.

a) Tracer la fonction $\psi(x)$.

b) Décomposer cette fonction sur f_+ et f_-.

c) Déduire la valeur de $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{\psi}(k)] = \mathcal{F}_x^\dagger\big[\mathcal{F}_k[\psi]\big]$ en $x = x_0$.