Mathématiques pour la Physique II

TD 8 : Applications de la transformation de Fourier

On prendra comme définition de la transformée de Fourier d'une fonction f, sommable sur $\mathbb{R}$,

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{1}$$

La transformée de Fourier inverse est

$$f(x) = \mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{2}$$

Exercice 1 : Convolution

1 – La Lorentzienne est

$$\mathcal{L}_a(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2} \tag{3}$$

Calculer la fonction $\mathcal{L}_a * \mathcal{L}_b$.
Indication : Utiliser la transformation de Fourier

2 – Même question pour $g_a * g_b$ où $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\}$.

3 – **Mouvement brownien.**– On considère un processus aléatoire

$$x_t = x_{t-1} + \eta_t \qquad \text{pour } x_0 = 0\,, \tag{4}$$

où $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t, \cdots\}$ sont des variables *indépendantes* et identiquement distribuées, selon la loi de probabilité $g_\sigma(\eta)$. Déduire quelle est la distribution de x_t, que l'on notera $P_t(x)$ (on pourra supposer que $P_0 = g_a$).

4 – **Vols de Lévy.**– Même question si les η_t sont distribués par la loi $\mathcal{L}_\sigma(x)$ (on pourra supposer que $P_0 = \mathcal{L}_a$).

Exercice 2 : Une équation intégrale

Résoudre l'équation intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-\lambda|x-y|}\, f(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \mathrm{e}^{-x^2/(4a)} \tag{5}$$

Exercice 3 : Transformée de Fourier d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^3$

1 – Soit $f(||\vec{x}||)$ une fonction radiale. Exprimer sa transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^3$ comme une intégrale radiale.
Déduire la transformée de Fourier de la fonction $f(||\vec{x}||) = 1$ pour $||\vec{x}|| < a$ et $f(||\vec{x}||) = 0$ sinon.

2 – Potentiel de Yukawa.– Si l'on introduit une charge électrique dans un métal, les charges électriques de ce dernier se meuvent afin d'écranter la charge extérieure. Considérons la densité de charge

$$\rho_{\text{ext}}(\vec{x}) = Q\,\frac{1}{(2\pi\,\varepsilon^2)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\vec{x}^{\,2}}{2\varepsilon^2}\right\} \tag{6}$$

L'équation décrivant le potentiel dans le métal en présence de cette densité est

$$\left(-\Delta + \kappa^2\right) V(\vec{x}) = \rho_{\text{ext}}(\vec{x}) \tag{7}$$

où $1/\kappa$ est la longueur d'écran (dans un bon métal, c'est une échelle atomique). Le terme $-\kappa^2 V(\vec{x})$ correspond à la densité induite par le déplacement des charges du métal.

a) Prendre la transformée de Fourier de l'équation différentielle.

b) Discuter le sens physique de la limite $\varepsilon \to 0^+$

c) Déduire $\hat{V}(\vec{k})$ dans cette limite puis revenir à $V(\vec{x})$.

Exercice 4 : Équations différentielles

1 – Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2\lambda y'(x) + 2\lambda^2 y(x) = \frac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-|x|/a} \tag{8}$$

On étudiera la solution pour $a \to 0^+$

2 – Équation de la diffusion.— On étudie la densité de particules $\rho_t(\vec{x})$ dans $\mathbb{R}^d$, où $\rho_t(\vec{x})\,\mathrm{d}^d\vec{x}$ représente le nombre de particules dans le volume $\mathrm{d}^d\vec{x}$ au temps t. Cette densité obéit à une équation de la diffusion. En l'absence de force extérieure, les particules migrent depuis les régions de haute densité vers les régions de basse densité, ce qui génère un courant de diffusion

$$\vec{j}_t(\vec{x}) = -D\,\vec{\nabla}\rho_t(\vec{x}) \qquad \text{(loi de Fick)}, \tag{9}$$

où D est la constante de diffusion. En utilisant l'équation de conservation $\partial_t\rho_t(\vec{x}) + \mathrm{div}\vec{j}_t(\vec{x}) = 0$, on obtient finalement l'équation de la diffusion

$$\frac{\partial\rho_t(\vec{x})}{\partial t} = D\,\Delta\rho_t(\vec{x})\,, \tag{10}$$

qui gouverne l'évolution de la densité, à partir d'une densité initiale $\rho_0(\vec{x})$ donnée. On se restreint ci-dessous au cas undimensionnel, $d = 1$.

a) Trouver une équation différentielle pour la transformée de Fourier spatiale de la densité $\hat{\rho}_t(k) = \mathcal{F}_k[\rho_t]$. La résoudre, en supposant $\hat{\rho}_0(k)$ connue.

b) **Propagateur de la diffusion.–** Justifier que la solution a la forme

$$\rho_t = G_t * \rho_0 \tag{11}$$

et préciser l'expression de la fonction $G_t(x)$.

c) On choisit $\rho_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$. Déduire $\rho_t(x)$ (utiliser le résultat obtenu plus haut). Étudier $\langle x^2\rangle_t = \int \mathrm{d}x\,\rho_t(x)\,x^2$.

d) Reprendre les questions précédentes en dimension $d > 1$.

e) **Dérive.–** On considère maintenant la diffusion en présence d'une force de dérive, que nous écrivons $\vec{F} = \vec{v}/\mu$, où μ est la mobilité et $\vec{v}$ la vitesse de dérive (par exemple pour des particules chargées soumises à un champ électrique). Le courant contient alors deux termes (le courant de dérive et le courant de diffusion) :

$$\vec{j}_t(\vec{x}) = (\vec{v} - D\,\vec{\nabla})\rho_t(\vec{x}) \tag{12}$$

Écrire la nouvelle équation de diffusion et la résoudre (trouver seulement le nouveau G_t).