Exam de math. 23/04/2019

Ch. Texier.

1. Analyse complexe. $h(z)$ une fct entière de $z \in \mathbb{C}$

$$\text{Rés}\left[\frac{h(z)}{z-z_0}, z_0\right] = h(z_0)$$

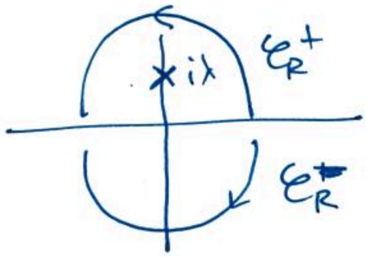
$$\text{Rés}\left[\underbrace{\frac{h(z)}{(z-z_0)^2}}_{\frac{h(z_0)}{(z-z_0)^2}+\frac{h'(z_0)}{z-z_0}+\frac{1}{2}h''(z_0)+\dots}, z_0\right] = h'(z_0)$$

2/ $$\Phi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dz \underbrace{\frac{e^{i\omega z}}{(z-i\lambda)^2}}_{f(z)}$$

$f(z) \longrightarrow$ analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{i\lambda\}$

$i\lambda$: pôle double.

3/ $$\text{Rés}\left[\frac{e^{i\omega z}}{(z-i\lambda)^2}, i\lambda\right] = \frac{d}{dz}\left(e^{i\omega z}\right)\Big|_{z=i\lambda} = i\omega\, e^{-\lambda\omega}$$

4/ 

$$|f(z)| = \frac{e^{-\omega \,\text{Im} z}}{|z-i\lambda|^2} = \frac{e^{-\omega\,\text{Im} z}}{|z|^2+\lambda^2}$$

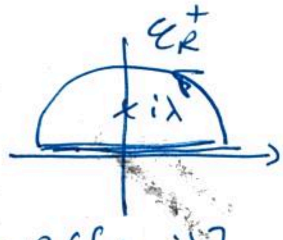
($\omega \in \mathbb{R}$)

si $\omega>0 \Rightarrow |f(z)| \to 0$ pour $|z|\to\infty$ avec $\text{Im} z>0$

si $\omega<0 \Rightarrow |f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$ avec $\text{Im} z<0$

$\Rightarrow$ si $\omega>0$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_R^+} f \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

si $\omega<0$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_R^-} f \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

5/ si $\omega>0$: on utilise le th. des résidus pour 

$$\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{\mathcal{C}_R^+} dz\, f(z) = 2i\pi\, \text{Rés}[f, i\lambda]$$

$\downarrow R\to\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{i\omega x}}{(x-i\lambda)^2} = 2i\pi\, i\omega\, e^{-\lambda\omega} = -2\pi\omega\, e^{-\lambda\omega}$$

2

si $\underline{\omega < 0}$ $\qquad \int_{-R}^{+R} f + \int_{\mathcal{C}_R^-} f = 0$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx \, \frac{e^{i\omega x}}{(x - i\lambda)^2} = 0$$

conclusion : $\boxed{\Phi(\omega) = -2\pi \, \Theta_H(\omega) \, \omega \, e^{-\lambda\omega}}$

6/ Application. $\quad y'' + 2\lambda y' + \lambda^2 y = \underbrace{s(x)}_{\text{source}}$.

$$\tilde{y}(k) = \int dx \, y(x) \, e^{-ikx}$$

$$\underbrace{(-k^2 + 2i\lambda k + \lambda^2)}_{(ik + \lambda)^2 = -(k - i\lambda)^2} \tilde{y}(k) = \tilde{s}(k)$$

$$\tilde{y}(k) = - \frac{\tilde{s}(k)}{(k - i\lambda)^2}$$

si $\tilde{s}(k) = 1 \Rightarrow \tilde{y}(k) = \frac{-1}{(k - i\lambda)^2} \Rightarrow y(x) = -\underbrace{\int \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{(k - i\lambda)^2}}_{\text{question 5/}}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \Theta_H(x) \, x \, e^{-\lambda x}}$$

$\tilde{s}(k) = 1 \Rightarrow s(x) = \delta(x)$ $\rightarrow$ fct de Green

$$G(x) = \Theta_H(x) \, x \, e^{-\lambda x}$$

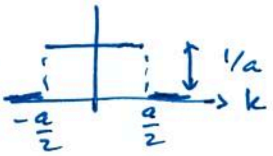
$\Rightarrow$ Solution générale :

$$y(x) = \int_{\mathbb{R}} dx' \, G(x - x') \, s(x')$$

Convolution

objectif : calculer $G_a = \mathrm{sinc} * \mathcal{L}_a$

où $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $\mathcal{L}_a(x) = \frac{a/\pi}{x^2+a^2}$; $a>0$

1/ $\Pi_a(k) =$ 

$$\mathcal{F}_x^+[\Pi_a] = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a/2}^{a/2} dk\, e^{ikx} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{ikx}}{ix}\right]_{k=-a/2}^{k=a/2}$$

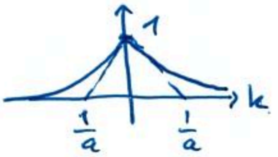
$$\underline{\mathcal{F}_x^+[\Pi_a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{xa}{2}\right)}$$

$$\Pi_a(k) = \mathcal{F}_k\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{xa}{2}\right)\right]$$

$\underline{a=2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{F}_k[\mathrm{sinc}(x)] = \sqrt{2\pi}\;\Pi_2(k)}$

vérif : $k=0 \Rightarrow \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sinc}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \int dx\,\mathrm{sinc}(x) = \pi$ ok

2/ $h_a(k) = e^{-a|k|}$ 

$$\mathcal{F}_x^+[h_a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{-a|k|+ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{x^2+a^2}$$

$$\mathcal{F}_x^+[h_a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,2\pi\,\frac{a/\pi}{x^2+a^2} = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{L}_a(x) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}_k[\mathcal{L}_a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a|k|}}$$

3/ $\hat{G}_a(k) = \sqrt{2\pi}\;\widehat{\mathrm{sinc}}(k)\,\hat{\mathcal{L}}_a(k) = \sqrt{2\pi}\,\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\Pi_2(k)\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}e^{-a|k|}$

$$\boxed{\hat{G}_a(k) = \sqrt{2\pi}\;\Pi_2(k)\,e^{-a|k|}}$$

4/ $G_a(x) = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\int_{\mathbb{R}} dk\,\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\Pi_2(k)\,e^{-a|k|+ikx} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dk\, e^{-a|k|+ikx}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dk\, e^{-(a-ix)k} + c.c. = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{a-ix}}_{\frac{a+ix}{a^2+x^2}}\left(1-e^{-(a-ix)}\right) + c.c.\right]$$

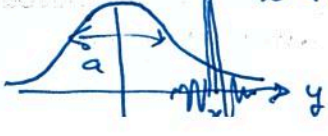
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{a^2+x^2}\left[(a+ix)\underbrace{\left(1-e^{-a+ix}\right)}_{1-e^{-a}(\cos x+i\sin x)} + c.c.\right]$$

$$\boxed{G_a(x) = \frac{a - a e^{-a}\cos x + x e^{-a}\sin x}{x^2+a^2}}$$

5/ limite $a \gg 1$: $e^{-a} \to 0$

$G_a(x) \simeq \frac{a}{x^2+a^2} = \pi\mathcal{L}_a$

interprétation : $\mathcal{L}_a$ est bcp plus large que sinc



$G_a(x) = (\mathcal{L}_a * \text{sinc})(x) = \int dy\, \underbrace{\mathcal{L}_a(y)}_{\text{très large}}\ \underbrace{\text{sinc}(x-y)}_{\text{très étroite}} \approx \mathcal{L}_a(x) \times \underbrace{\int dy\, \text{sinc}(y)}_{\pi}$

$= \pi\, \mathcal{L}_a(x)$ ok.

6/ <u>Limite $a \ll 1$</u>. on attend $G_a(x) \approx \text{sinc}(x)$ car $\mathcal{L}_a(x)$ est beaucoup plus étroite que sinc dans cette limite.

→ plus difficile à voir sur l'expression de G_a.

<u>mais</u> : $\mathcal{L}_a(x) \xrightarrow[a \to 0]{} \delta(x)$ (distrib. de Dirac)

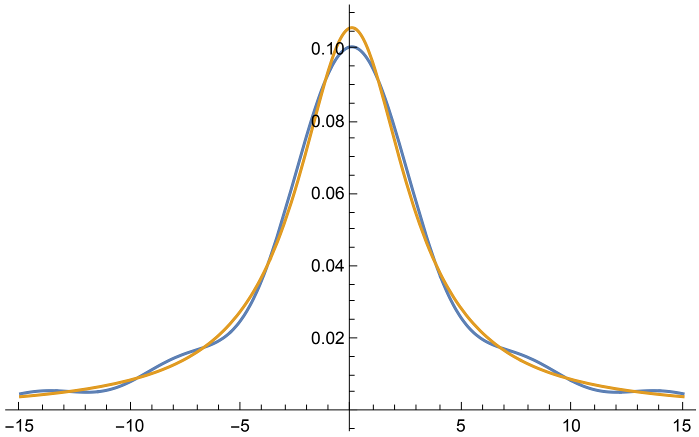
$G_a \xrightarrow[a \to 0]{} \delta * \text{sinc} = \text{sinc}$

f[x_] = Sinc[x] / π;

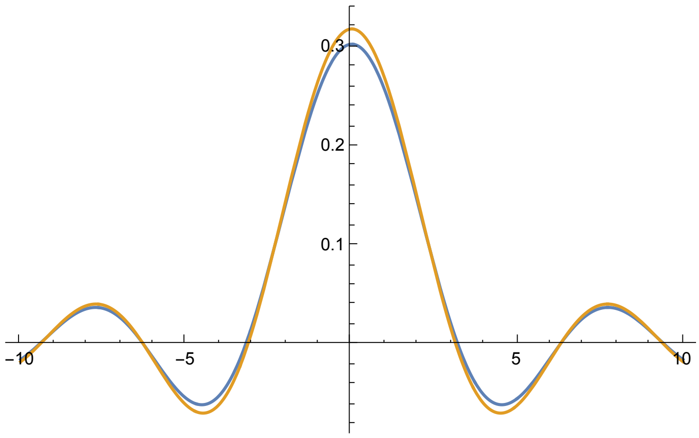
$$\texttt{h[x\_, a\_] = }\frac{\texttt{a} / \pi}{\texttt{x}^2 + \texttt{a}^2}\texttt{;}$$

$$\texttt{G[x\_, a\_] = }\frac{1}{\pi}\,\frac{\texttt{a + Exp[-a]}\left(\texttt{x Sin[x] - a Cos[x]}\right)}{\texttt{x}^2 + \texttt{a}^2}\texttt{;}$$

```
b = 3;
Plot[{G[x, b], h[x, b]}, {x, -5 b, 5 b}]
```




```
b = 0.1;
Plot[{G[x, b], f[x]}, {x, -10, 10}]
```



Formule de Poisson

A. 1/ $\Phi(x)$ périodique de période 1.

$\Rightarrow$ décomposable en série de Fourier $\Phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \underbrace{e^{2i\pi m x}}_{\text{fct harmonique de période 1}}$

$$\int_0^1 dx\, \Phi(x)\, e^{-2i\pi m x} = \int_0^1 dx \sum_n c_n\, e^{2i\pi(n-m)x} = \sum_n c_n \underbrace{\int_0^1 dx\, e^{2i\pi(n-m)x}}_{\delta_{n,m}}$$
$$= c_m$$

2/ $\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ où $f(x)$ décroît assez "vite" pour que la série converge $\forall x$.

$$\Phi(x+1) = \sum_n f(x+1+n) \underset{m=n+1}{=} \sum_m f(x+m) = \Phi(x)$$ est bien périodique de période 1.

3/
$$c_m = \int_0^1 dx\, \Phi(x)\, e^{-2i\pi m x} = \int_0^1 dx \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\, e^{-2i\pi m x}$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} dx\, f(x)\, \underbrace{e^{-2i\pi m(x-n)}}_{e^{-2i\pi m x}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-2i\pi m x}}_{\text{on reconnaît } \hat{f}(2\pi m)}$$

(la Transformée de Fourier

$$\boxed{c_m = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(2\pi m)}$$

c_m : coeff. de la série de Fourier pour Φ

$\hat{f}(2\pi m)$: transf de Fourier de f

4/ écrivons Φ en terme des c_m :
$$\boxed{\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sqrt{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi m)\, e^{2i\pi m x}}$$

$x = 0$

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi m)}$$

formule de Poisson.

B. Application : Fonction de partition pour une particule quantique ~~dans une boîte~~. sur un anneau.

$$(*)\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\,\psi(x)$$
pour $x \in [0, L]$ avec c.a.l. périodiques

Spectre des énergies :

sol. de $(*)$: $\psi(x) = e^{ikx}$ + périodicité $\Rightarrow e^{ikL} = 1$

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ $\qquad k = \frac{2\pi n}{L};\ n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\, n^2}$$

$E_n = n^2 \varepsilon_0$ avec $n \in \mathbb{Z}$

fct de partition canonique $\boxed{Z_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2}}$ où $t = \beta\varepsilon_0$

1/ $\mathcal{F}_k\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = e^{-\frac{k^2}{2}}$

utilisons $\mathcal{F}_k\left[f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = \lambda \hat{f}(\lambda k)$ pour calculer

$$\mathcal{F}_k\left[e^{-tx^2}\right] \underset{\lambda = 1/\sqrt{2t}}{=} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

2/ on applique la formule de Poisson avec $f(x) = e^{-tx^2}$

$$\Rightarrow \boxed{Z_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}}}$$

forme appropriée pour étudier $t \to \infty$

forme appropriée pour étudier la lim. $t \to 0$

3/ <u>limite $t \to 0$</u>

$$Z_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\left(1 + \underbrace{2e^{-\frac{\pi^2}{t}}}_{\ll 1} + \dots\right)$$

si $t \ll 1$

<u>Rq</u>: ce premier terme correspond à faire :

$$\sum_n e^{-tn^2} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} dn\, e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

les autres termes s'interprètent comme la différence entre $\sum_n e^{-tn^2}$ et $\int dn\, e^{-tn^2}$

<u>limite $t \to \infty$</u>

$$Z_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} = 1 + \underbrace{2e^{-t}}_{\ll 1} + \dots$$

si $t \gg 1$