EXAMEN FINAL DE MATHÉMATIQUES
Mardi 23 avril 2019

Durée de l'épreuve : **3 heures.**

L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.

Recommandations :
Lisez attentivement l'énoncé et **rédigez** *succinctement* et *clairement* votre réponse.
n'oubliez pas de vous **relire**.
Pensez aux **informations en annexe**.

Questions de cours

Les propriétés suivantes seront utiles pour les autres exercices. Une (petite) *démonstration est exigée* pour chacune.

1/ On note $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$ la transformée de Fourier de f. Montrer que si f est réelle, $f(x)^* = f(x)$, et symétrique, $f(x) = f(-x)$, alors $\hat{f}(k)$ a les mêmes propriétés (réelle et symétrique).

2/ Soit $\lambda > 0$. Exprimer la transformée de Fourier de $\frac{1}{\lambda} f(x/\lambda)$ en fonction de $\hat{f}(k)$.

3/ Soit f et g deux fonctions et $(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(y)g(x-y)$ leur produit de convolution. Exprimer $\mathcal{F}_k[f * g]$ en fonction de $\hat{f}(k)$ et $\hat{g}(k)$.

4/ Soit δ la distribution de Dirac et soit $\varphi(x)$ une fonction continue. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta(x)\, \varphi(x)$? Que vaut $\delta * \varphi$?

1 Analyse complexe

1/ Soit $h(z)$ une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Rappeler (sans démonstration) les formules donnant les résidus de $f(z) = h(z)/(z-z_0)$ et $g(z) = h(z)/(z-z_0)^2$ en z_0.

2/ On considère l'intégrale

$$\Phi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{(z - \mathrm{i}\lambda)^2} \tag{1}$$

Discuter les propriétés d'analyticité de $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}/(z-\mathrm{i}\lambda)^2$.

3/ Calculer le résidu de f au pôle.

4/ Soit $C_R^{\pm}$ les demi-cercles de rayon R, soit dans le demi plan complexe supérieur (+), soit dans le demi plan complexe inférieur (−). À quelle condition sur $\omega \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \mathrm{d}z\, f(z) = 0 \text{ ?} \tag{2}$$

De même, à quelle condition sur ω a-t-on $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^-} \mathrm{d}z\, f(z) = 0$?

5/ En utilisant le théorème des résidus, montrer que

$$\Phi(\omega) = -2\pi\, \theta_{\mathrm{H}}(\omega)\, \omega\, \mathrm{e}^{-\lambda\omega} \tag{3}$$

où θ_{H} est la fonction de Heaviside ($\theta_{\mathrm{H}}(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\theta_{\mathrm{H}} = 0$ pour $x < 0$). On précisera le contour utilisé selon le signe de ω.

6/ Application : On étudie l'équation différentielle

$$y''(x) + 2\lambda\, y'(x) + \lambda^2\, y(x) = s(x) \tag{4}$$

où $s(x)$ est un terme de source, supposé connu. On cherche y.

a) Quelle est l'équation satisfaite par la transformée de Fourier $\hat{y}(k) = \mathcal{F}_k[y]$, exprimée en fonction de $\hat{s}(k) = \mathcal{F}_k[s]$?

b) On suppose $\hat{s}(k) = 1/\sqrt{2\pi}$. Déduire $y(x)$.

c) Bonus : Quel commentaire pouvez-vous faire sur cette solution ? À partir de cette solution, pourriez-vous écrire la solution de l'équation différentielle pour un $s(x)$ quelconque ?

2 Une convolution

L'objectif de l'exercice est de calculer $G_a = \mathrm{sinc} * \mathcal{L}_a$, qui représente la convolution (définie dans la question de cours) du sinus cardinal et d'une lorentzienne :

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_a(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2} \tag{5}$$

1/ On introduit la fonction $\Pi_a(k) = 1/a$ pour $|k| < a/2$ et $\Pi_a(k) = 0$ pour $|k| > a/2$. Calculer la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}_x^\dagger[\Pi_a(k)]$. Déduire la transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{sinc}}(k) = \mathcal{F}_k[\mathrm{sinc}(x)]$.

2/ Soit $h_a(k) = \mathrm{e}^{-a|k|}$. Calculer la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}_x^\dagger[h_a(k)]$. Déduire la transformée de Fourier $\widehat{\mathcal{L}}_a(k) = \mathcal{F}_k[\mathcal{L}_a(x)]$.

3/ Donner l'expression de la transformée de Fourier $\hat{G}_a(k) = \mathcal{F}_k[\mathrm{sinc} * \mathcal{L}_a]$.

4/ À l'aide de la transformation de Fourier inverse, calculer $G_a(x)$.

5/ Que vaut $G_a(x)$ dans la limite $a \gg 1$? Comment comprendre ce résultat ?

6/ Bonus : Nous analysons l'autre limite, $a \ll 1$: que devient $\mathcal{L}_a(x)$ dans la limite $a \to 0$? Déduire la limite attendue pour $G_a = \mathrm{sinc} * \mathcal{L}_a$.

3 Formule de Poisson

A. Formule sommatoire de Poisson

1/ Soit $\Phi(x)$ une fonction périodique, $\Phi(x+1) = \Phi(x)$, pouvant être représentée en série de Fourier

$$\Phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi m x} \tag{6}$$

Montrer que le coefficient c_m est relié à $\int_0^1 \mathrm{d}x\, \Phi(x)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi m x}$ (on *admettra* qu'il est licite de permuter somme et intégrale).

2/ On considère la fonction

$$\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \tag{7}$$

où $f(x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, décroissant suffisamment vite à l'infini pour que la série soit convergente : $|f(x)| \leqslant C\, |x|^{-1-\epsilon}$ pour $x \to \pm\infty$ avec $\epsilon > 0$. Justifier que $\Phi(x)$ peut être représentée en série (6).

3/ On note $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$ la transformée de Fourier de f. Montrer que le coefficient c_m de la *série* de Fourier pour Φ est relié à la *transformée* de Fourier $\hat{f}(2\pi m)$.

4/ Déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi m)} \tag{8}$$

B. Application

On considère une particule quantique de masse m sur un anneau de périmètre L. Le spectre des énergies est $E_n = \varepsilon_0\, n^2$ pour $n \in \mathbb{Z}$, où $\varepsilon_0 = h^2/(2mL^2)$ où h est la constante de Planck. La fonction de partition canonique est définie comme

$$Z_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-tn^2} \qquad \text{avec } t \stackrel{\text{def}}{=} \beta\varepsilon_0 \tag{9}$$

où $\beta = 1/(k_B T)$ est l'inverse de la température.

1/ On rappelle que $\mathcal{F}_k[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}] = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2}$. Déduire la transformée de Fourier de $f(x) = \mathrm{e}^{-tx^2}$.

2/ Appliquer la formule de Poisson (8) pour trouver une autre représentation en série de la fonction de partition Z_t.

3/ En choisissant la série appropriée pour étudier chaque limite, donner les *comportements* de Z_t pour $t \to 0$ et $t \to \infty$ (on donnera le terme dominant et la première correction au terme dominant dans chaque cas).

Annexe

- Transformation de Fourier

$$\mathcal{F}_k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{10}$$

- On rappelle les deux lemmes de Jordan. Considérons $f(z)$ sur $\mathscr{C}_R$, un arc de cercle de rayon R centré sur 0, alors

$$\lim_{R\to 0} \operatorname*{Sup}_{z\in\mathscr{C}_R} |z\, f(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to 0} \int_{\mathscr{C}_R} \mathrm{d}z\, f(z) = 0 \tag{11}$$

$$\lim_{R\to \infty} \operatorname*{Sup}_{z\in\mathscr{C}_R} |z\, f(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to \infty} \int_{\mathscr{C}_R} \mathrm{d}z\, f(z) = 0 \tag{12}$$