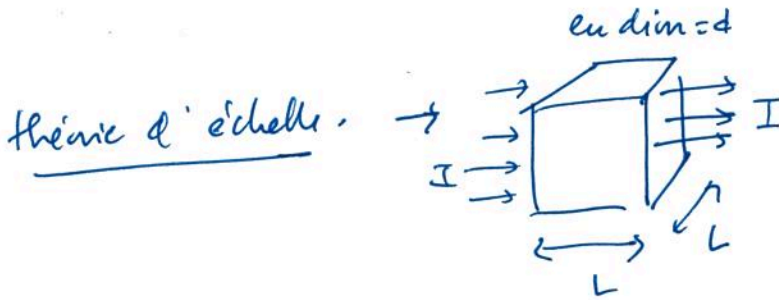


Transition métal-isolant en 2D?



$g(L)$ = conductance sans dimension

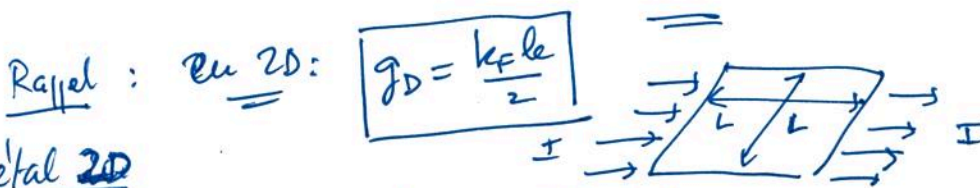
$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L}$$

single parameter scaling hypothesis

faible désordre : $g(L) \approx \frac{\sigma_D}{D} L^{d-2}$ (loi d'Ohm) $\Rightarrow \beta(g) \approx d-2$

fort désordre : $g(L) \sim e^{-2L/\xi}$ (localisation) $\Rightarrow \beta(g) \approx \ln g + \text{cte}$

$d=2$: $\beta(g) \approx 0$ (classique) ... Connection à $g_D \rightarrow \begin{cases} \beta > 0 \text{ (métal)} \\ \text{ou} \\ \beta < 0 \text{ (isolant)} \end{cases} ?$



$G = \sigma \times \frac{\text{section}}{\text{long.}}$
 $\frac{L}{L} = 1$ en 2D

A. Métal 2D

1) Approche perturbative (faible désordre):
 $k_F l_e \gg 1 \Rightarrow g_D \gg 1$

2) Coopération en 2D.

a) Eq. de la diffusion: $(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta) P_t(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (*)$
 solution: $P_t(\vec{r}, \vec{r}') = \Theta_H(t) \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{4Dt}}$

retrouver cela : Fourier de (*) (en espace)

$$(\frac{\partial}{\partial t} + D\vec{q}^2) \tilde{P}_t(\vec{q}) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_t(\vec{q}) = \Theta_H(t) e^{-D\vec{q}^2 t}$$

$$P_t(\vec{r}, \vec{r}') = \Theta_H(t) \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} e^{-D\vec{q}^2 t + i\vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \quad \text{QED}$$

b) le Cooperon $\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}')$ est solution de

$$(\frac{1}{L\varphi^2} - \Delta) \mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

par une transf. de Laplace: $\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}') = D \int_0^\infty dt P_t(\vec{r}, \vec{r}') e^{-t/L\varphi}$
 où $L\varphi = \sqrt{D\tau\varphi}$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(4\pi r)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{Dt}{(Dt)^{d/2}} dt e^{-\frac{t}{L_p} - \frac{R^2}{4Dt}}$$

en reconnaissant la fonction de Macdonald $K_0(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^d \int_0^\infty \frac{dt}{t^{d+1}} e^{-t - \frac{z^2}{4t}}$

posons $Dt = y L_p^2$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (L_p^2)^{1-d/2} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{d/2}} e^{-y - \frac{(R/L_p)^2}{4y}}$$

ou $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$

$$2 \left(\frac{R}{2L_p}\right)^{d/2+1} K_{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{R}{L_p}\right)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{R}{2L_p}\right)^{1-d/2} K_{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{R}{L_p}\right)$$

check: $K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \Rightarrow \rho = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{R}{2L_p}} \sqrt{\frac{\pi}{2R}} e^{-R/L_p}$

$$G(x, x') = \frac{L_p}{2} e^{-|x-x'|/L_p} \text{ OK}$$

d=2 :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{L_p}\right)$$

c) Correction de loc. faible dans le plan: $\Delta g_{WL} = -2G(\vec{r}, \vec{r}')$

ici $G(\vec{r}, \vec{r}') = \infty \dots$

Où mais le calcul a été fait dans le cadre de l'approximation de la diffusion, valable aux échelles $\gg l_e$

\Rightarrow on doit régulariser sur la échelle l_e .

exemple: $G(\vec{r}, \vec{r}') \approx \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{l_e}{L_p}\right) \approx \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{L_p}{l_e} + \ln 2 - c \right]$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{L_p \gg l_e}$ \downarrow
Euler

dans l'énoncé; on suppose

$$\bar{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \int_{\|\vec{p}\| < l_e} \frac{d^2 \vec{p}}{\pi l_e^2} G(\vec{r} + \vec{p}, \vec{r})$$

$p < l_e \Rightarrow \frac{p}{L_p} \ll 1$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\ln 2L_p - c - \int_0^{l_e} \frac{dp}{l_e^{2/2}} \ln \frac{p}{L_p} \right]$$

$-\ln p + \ln 2L_p - c$

$$\left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho\right)' = \rho \ln \rho + \frac{\rho}{2}$$

$$\int_0^L d\rho \rho \ln \rho = \left[\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right]_0^L = \frac{L^2}{2} \ln L - \frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{E}}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln L\varphi + \ln 2 - C - \ln L\epsilon + \frac{1}{2} \right]$$

$$\bar{\mathcal{E}}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{L\varphi}{\epsilon} + \ln 2 - C + \frac{1}{2} \right]$$

la cste est un peu différente par rapport à la régularisation simple.

3/ loc. faible:

$$\Delta g_{WL} = -2 \bar{\mathcal{E}}(\vec{r}, \vec{r})$$

↓

$$\Delta g_{WL}(L\varphi) = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{L\varphi}{\epsilon} + \text{cste}$$

↓
dépend de la régularisation

4/ Champ magnétique

$$\phi_0 = \frac{h}{e} = \text{quantum de flux magn.} \\ = \text{surf.} \times \text{champ}$$

$$L_B = \sqrt{\frac{h}{e|B|}}$$

2 cutoffs. L_φ ou L_B

$$\text{le plus petit domine} \Rightarrow \Delta g_{WL} \approx -\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\min(L_\varphi, L_B)}{\epsilon} \right)$$

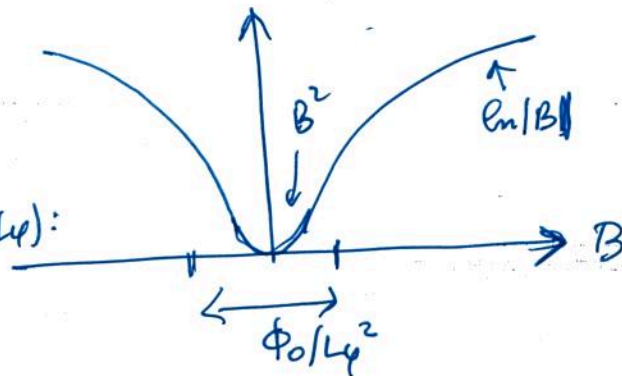
$$\text{à fort champ } L_B \ll L_\varphi \quad (B \gg \frac{\phi_0}{L_\varphi^2})$$

$$\Delta g_{WL} \approx -\frac{1}{\pi} \ln \frac{L_B}{\epsilon} \approx +\frac{1}{2\pi} \ln |B|$$

allure attendue:

traçons

$$\Delta g_{WL}(B, L_\varphi) - \Delta g_{WL}(0, L_\varphi):$$



5) Fonction β : revenons au cas $\beta=0$

$L \rightarrow L \downarrow$

échantillon cohérent ($L \lesssim L_D$) $\Rightarrow \Delta g_{WL} = -\frac{1}{\pi} \ln(L/l_e) + \text{cte}$

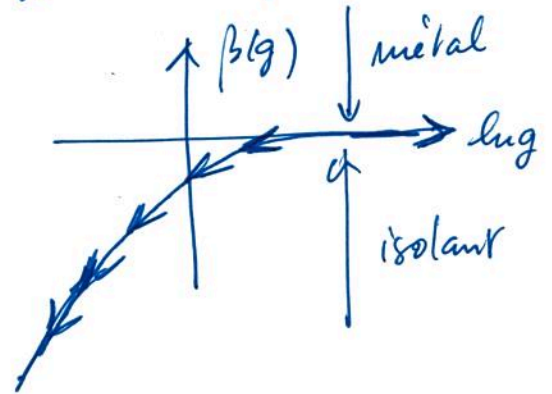
$$g(L) \approx \underbrace{g_D}_{\text{indep de } L} - \frac{1}{\pi} \ln(L/l_e)$$

$$\beta = \frac{d \ln g}{d \ln L} = \frac{d}{d \ln L} \left[\ln g_D + \ln \left(1 - \frac{1}{\pi g_D} \ln(L/l_e) \right) \right]$$

$$= \downarrow 0 - \frac{1}{\pi g_D} \approx -\frac{1}{\pi g}$$

$$\boxed{\beta(g) \approx -\frac{1}{\pi g} \quad \text{en } d=2}$$

$\beta(g) < 0 \Rightarrow$ on est conduit vers l'isolant à grande échelle



6) Longueur de localisation

estimation :

$g \sim 0$ pour $L > \xi$

$$g(\xi) \approx g_D - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\xi}{l_e} \approx 0$$

$$\Downarrow \xi \approx l_e \exp[\pi g_D]$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{\xi^{(2D)}}{l_e} \approx l_e \exp\left[\frac{\pi}{2} k_F l_e\right]}$$

très grand facteur !

A.N.

Gas dans $\text{AsGa}/\text{AlGaAs}$

$$E_F = 9,9 \text{ meV}$$

$$T_e \approx 3,3 \text{ ps}$$

(Eshkol et al, PRB, 2006)

$$E_F = \frac{\hbar k_F v_F}{2}$$

$$k_F l_e = 2 \frac{E_F T_e}{\hbar} = 2 \times \frac{0,01 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 3,3 \times 10^{-12}}{10^{-34}}$$

$$k_F l_e \approx 105$$

$$\text{Rq: (i) } E_F = \frac{1}{2} m_e v_F^2 \Rightarrow v_F \approx 2,3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$l_e = v_F T_e \approx 0,76 \text{ nm (grand!)}$$

$$\frac{\xi^{(2D)}}{l_e} \approx e^{\frac{\pi}{2} k_F l_e} \approx e^{\approx 165} \sim 4 \times 10^{71}$$

\rightarrow pas de localisation en pratique !!

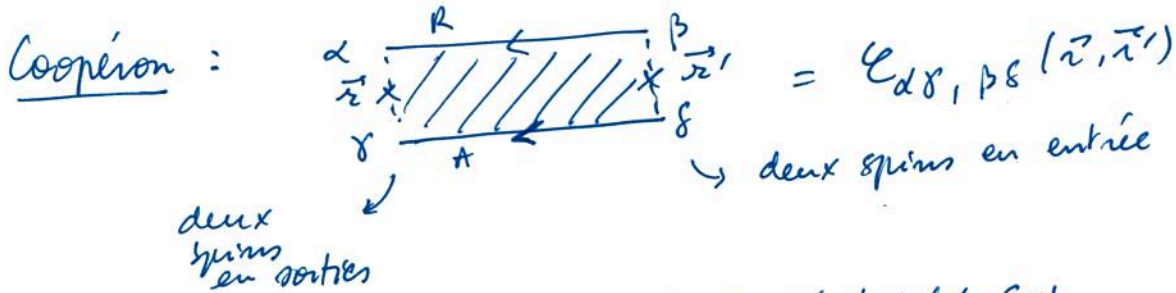
B. Effet d'un fort couplage spin-orbite

$$V(\vec{r}) \rightarrow V(\vec{r}) + \underbrace{\frac{1}{2m\vec{e}c^2} \vec{S}_e \cdot (\vec{\nabla} V \times \vec{p})}_{\text{correction relativiste}}$$

↑
spin

Vertex de disordres:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \leftarrow & \beta \\ & \times & \\ \gamma & \leftarrow & \delta \end{array} = \underbrace{\frac{W}{V} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}}_{\text{partie usuelle}} + \underbrace{\left(\frac{W_{SO}}{V}\right) \delta_{\gamma, \beta\delta}}_{\text{spin-orbite}}$$



2 spins. → canal singulet $S=0$ et canal triplet $S=1$
 Invariante par translation ⇒ $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{S=0} + \mathcal{C}_{S=1}$

1/ Fort couplage spin-orbite : le terme $S=0$ domine car dans ce canal $S=0 \Rightarrow$ insensible au couplage spin-orbite supplémentaire !
 structure spin-orbite

$$\mathcal{C}_{\sigma_1\sigma_2, \sigma_3\sigma_4}(\vec{r}, \vec{r}') \approx \mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}') \times (\Pi_0)_{\sigma_1\sigma_2, \sigma_3\sigma_4}$$

↓
projecteur $|0,0\rangle\langle 0,0|$

2/ $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$

⇒ $\Pi_0 = \frac{1}{2} (|+-\rangle - |-+\rangle)(\langle + - | - \langle - + |)$

dans la base $\frac{1}{2} \{ |++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \}$: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Pi_0 \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

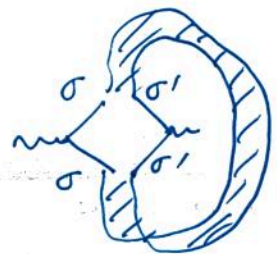
3/ Rq: sans spin-orbite: $\mathcal{C}_{\sigma_1\sigma_2, \sigma_3\sigma_4}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta_{\sigma_1\sigma_3} \delta_{\sigma_2\sigma_4} \mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}')$

no ~~SO~~

$$\Delta g_{WL} = - \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{\mathcal{C}}_{\sigma\sigma', \sigma'\sigma}(\vec{r}, \vec{r})$$

des spins
sont
rebornés

$$= - \sum_{\sigma, \sigma'} \delta_{\sigma, \sigma'} \bar{\mathcal{C}}(\vec{r}, \vec{r}) = -2 \bar{\mathcal{C}}(\vec{r}, \vec{r}) \text{ ok.}$$



Avec fort remplissage SO

on doit calculer

$$\sum_{\sigma, \sigma'} (\pi_0)_{\sigma\sigma', \sigma'\sigma} = \overbrace{(\pi_0)_{++}}^0 + \overbrace{(\pi_0)_{+-}}^{-1/2} + \overbrace{(\pi_0)_{-+}}^{-1/2} + \overbrace{(\pi_0)_{--}}^0 = -1$$

ce signe vient du rebondissement du singulet $|010\rangle$

strong SO

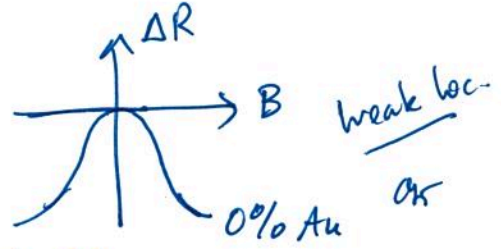
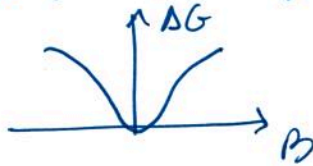
$\Rightarrow \Delta g_{WL} \approx -(-1) \bar{E}(\vec{r}, \vec{r})$

$\Delta g_{WL} = + \bar{E}(\vec{r}, \vec{r})$ antilocalisation
2x plus petite

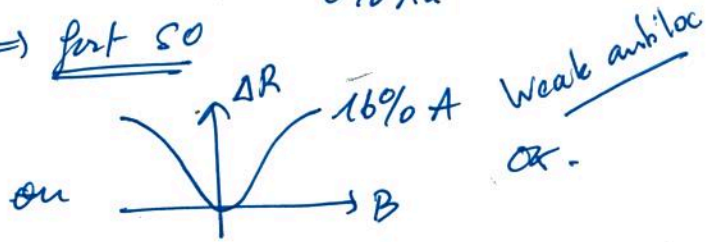
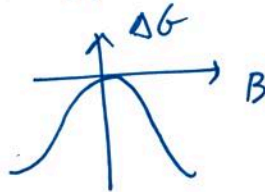
$\Delta g_{WL} = + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{L_{up}}{L_{down}} + \dots$

4/ Figure: $\Delta R = -\frac{\Delta G}{\sigma^2}$ (magnétorésistance)

Magnésium ($Z=12$): léger \Rightarrow pas de SO.



Or ($Z=79$): lourd \Rightarrow fort SO

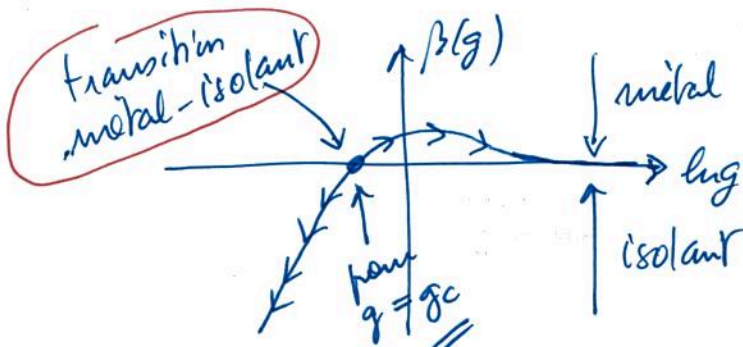


5/ Film cohérent

$\Delta g_{WL} |_{\text{strong SO}} = + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{L}{L_0} + \dots$

\Rightarrow \hat{h} calcul: qu'au A.S

$\beta(g) \approx + \frac{1}{2\pi g}$ pour $g \rightarrow \infty$



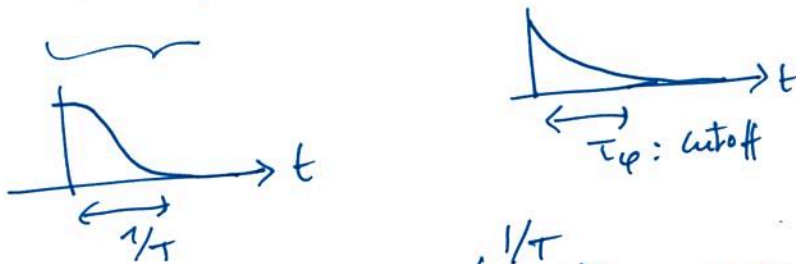
C. Interaction

une autre correction quantique: correct. Altshuler-Aronov.

$$\Delta g_{AA} = -2\lambda\sigma D \int_{\tilde{\tau}_e}^{\infty} dt \frac{P_d(t)}{\text{diffusion}} \left(\frac{\pi T t}{\text{sh} \pi T t} \right)^2 \quad (k_B = \hbar = 1)$$

↓
cutoff (limite de l'approx. de diffusion)

1/ $\left(\frac{\pi T t}{\text{sh} \pi T t} \right)^2$ remplace e^{-t/τ_φ} ... mais fait le m^e travail!



$$\Rightarrow \Delta g_{AA} \approx -2\lambda\sigma D \int_{\tilde{\tau}_e}^{1/T} \frac{dt}{4\pi D t} + \text{cste}$$

↓
détail des coupures.

$$= -2\lambda\sigma D \frac{1}{4\pi D} \ln \frac{1}{T \tilde{\tau}_e}$$

$$\tilde{\tau}_e = l^2/D \quad T = D/L_T^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{L_T = \sqrt{\frac{D}{T}}}$$

$$\frac{1}{T \tilde{\tau}_e} = \left(\frac{L_T}{l} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\Delta g_{AA} = -\frac{\lambda\sigma}{\pi} \ln \frac{L_T}{l} + \text{cste}}$$

2/ si $L \lesssim L_T \Rightarrow \Delta g_{AA} \approx -\frac{\lambda\sigma}{2\pi} \ln \frac{L}{l} + \text{cste}$

on doit ajouter les deux corrections:

$$g(L) = g_D + \underbrace{\Delta g_{WL}}_{\substack{\text{dépend} \\ \text{de } B \text{ et de } l \\ \text{(Cooperon)}}} + \underbrace{\Delta g_{AA}}_{\substack{\text{indép. de } B \\ \text{dépend de } L_T}}$$

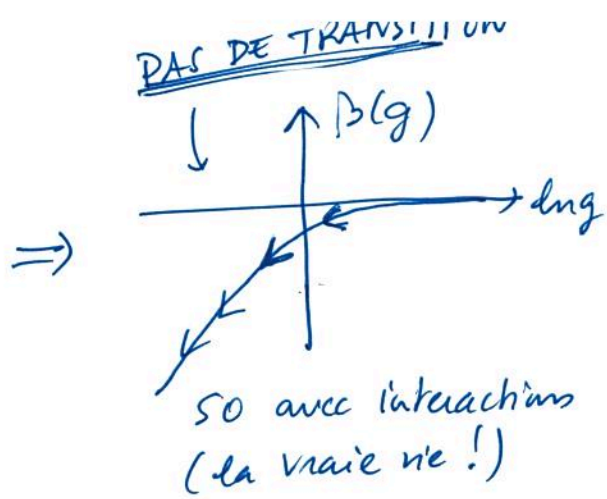
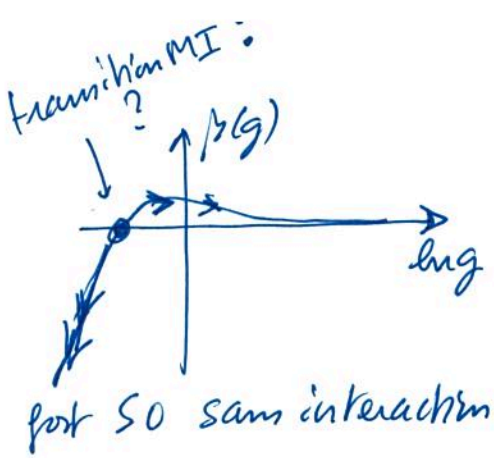
↓ $L \lesssim L_\varphi$ et L_T

fort so

$$g(L) \approx g_D - \frac{2\lambda\sigma - 1}{2\pi} \ln \frac{L}{l} + \text{cste}$$

3/ fort so $\Rightarrow \lambda\sigma = 4/d = 2 \Rightarrow g(L) \approx g_D - \frac{3}{2\pi} \ln \frac{L}{l} + \text{cste}$

les correct. quant. sont
bien negatives!



4/ A.N. $D = 0.085 \text{ m}^2/\text{s}$

$$L_T = \sqrt{\frac{\hbar D}{k_B T}}$$

$\rightarrow L_T = 0.78 \mu\text{m} \text{ à } 1\text{K}$

$$L_T \gtrsim L_{=10\mu\text{m}} \Leftrightarrow T \lesssim \left(\frac{0.78}{10}\right)^2 = 6 \text{ mK}$$

la limite
des fuzos
(des meilleurs
groupes)