

Ondes en milieux désordonnés et phénomènes de localisation – Examen

Vendredi 5 avril 2019

Durée : 3 heures.

Vous pouvez utiliser vos notes de cours (tout autre document est interdit).

Transition métal-isolant en 2D ?

La possibilité d'une transition métal-isolant dans un métal en deux dimensions a été beaucoup débattue (théoriquement et expérimentalement) dans les années 80 et 90. On étudie ici cette question dans le cadre de la théorie d'échelle. Le critère de localisation adopté par cette dernière est basé sur l'analyse de la dépendance de la conductance adimensionnée $g(L)$ dans la taille L du système, pour un échantillon "cubique" de volume L^d , où d est la dimension. On introduit

$$\beta(g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d \ln g}{d \ln L}, \quad (1)$$

dont les comportements limites attendus sont :

- $g(L) \simeq \sigma_D L^{d-2}$ (loi d'Ohm) à faible désordre, d'où $\beta(g) \simeq d - 2$ pour $\ln g \rightarrow +\infty$.
- $g(L) \sim \exp[-2L/\xi]$ à fort désordre (où ξ est la longueur de localisation), d'où $\beta(g) \simeq \ln g + \text{cste}$ pour $\ln g \rightarrow -\infty$.

Si $\beta(g) > 0$, le système est conduit vers la phase *métallique* à grande échelle ($g \nearrow$ pour $L \nearrow$) alors que pour $\beta(g) < 0$ il est conduit vers la phase *isolante* ($g \searrow$ pour $L \nearrow$).

Le calcul de la correction de localisation faible (1979) a permis une analyse de la fonction $\beta(g)$ dans la limite métallique $\ln g \rightarrow +\infty$. Nous nous focaliserons ici sur le cas marginal bi-dimensionnel pour lequel le résultat classique (Drude) donne $\beta(g) \simeq 0$ pour $\ln g \rightarrow +\infty$. Les corrections quantiques jouent donc un rôle très important, puisque suivant leur signe, le système reste isolant ou bascule dans la phase métallique, avec transition métal-isolant.

A. Correction de localisation faible dans un métal 2D

On considère dans un premier temps un métal bidimensionnel faiblement désordonné, de dimension $L \times L$ (Fig. 1). Si le courant est injecté par un bord et collecté sur le bord opposé, la conductance adimensionnée g est simplement proportionnelle à la conductivité σ dans cette géométrie : $\sigma = G = \frac{2se^2}{h} g$. En 2D, la conductance (classique) de Drude est donc indépendante de la taille du plan :

$$g_D = \frac{1}{2} k_F \ell_e, \quad (2)$$

où k_F est le vecteur de Fermi et ℓ_e le libre parcours moyen élastique.

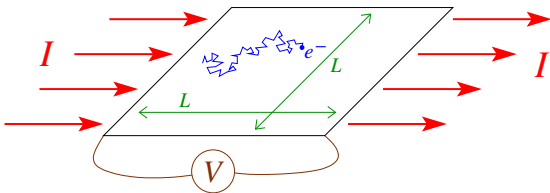


FIGURE 1 : Transport d'électrons dans un plan métallique de dimension $L \times L$. On étudie la conductance $G = I/V$.

Nous étudions en détail le Cooperon contrôlant la correction de localisation faible Δg_{WL} à la conductance classique du plan.

1/ À quelle condition sur g_{D} l'approche perturbative (diagrammatique) est-elle valable ?

2/ **Cooperon en 2D à champ magnétique nul**

a) Rappeler la solution (invariante par translation) de l'équation de la diffusion

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta \right] \mathcal{P}_t(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3)$$

en dimension d .

b) Le Cooperon est relié à $\mathcal{P}_t(\vec{r}, \vec{r}')$ par

$$\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}') = D \int_0^\infty dt \mathcal{P}_t(\vec{r}, \vec{r}') e^{-t/\tau_\varphi} \quad (4)$$

où τ_φ est le temps de cohérence de phase et $L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$ la longueur de cohérence de phase. Montrer que $\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}')$ est relié à une fonction de MacDonald (cf. annexe). Donner explicitement la solution pour la dimension $d = 2$.

c) L'évaluation de $\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r})$ pour $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}' \rightarrow 0$ pose problème en $d \geq 2$ (dans le cadre présenté ici). Pour régulariser le calcul de $\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r})$, on effectue une moyenne à petite échelle dans un disque de rayon ℓ_e :

$$\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}) \longrightarrow \int_{\|\vec{\rho}\| < \ell_e} \frac{d^2 \vec{\rho}}{\pi \ell_e^2} \mathcal{C}(\vec{\rho} + \vec{r}, \vec{r}) \equiv \bar{\mathcal{C}}(\vec{r}, \vec{r}) \quad (5)$$

Comment justifier cette moyenne sur l'échelle ℓ_e ? Calculer $\bar{\mathcal{C}}(\vec{r}, \vec{r})$ (utiliser l'annexe).

3/ En utilisant $\Delta g_{\text{WL}} = -2\bar{\mathcal{C}}(\vec{r}, \vec{r})$ (pour le plan), montrer que

$$\Delta g_{\text{WL}}(L_\varphi) = -\frac{1}{\pi} \ln(L_\varphi/\ell_e) + \text{cste} \quad (6)$$

4/ **Effet du champ magnétique.**— Le champ magnétique introduit une nouvelle échelle caractéristique $L_{\mathcal{B}}$. Par analyse dimensionnelle, exprimer $L_{\mathcal{B}}$ en fonction de \hbar , e et \mathcal{B} . Par un argument physique, justifier que le comportement de la correction de localisation faible à fort champ est donné par $\Delta g_{\text{WL}}(L_{\mathcal{B}})$. En admettant que Δg_{WL} est quadratique à faible champ, tracer l'allure de Δg_{WL} en fonction de \mathcal{B} .

5/ **Fonction β .**— On admet que la correction pour un échantillon *cohérent* ($L \lesssim L_\varphi$) est donnée par $\Delta g_{\text{WL}}(L)$. En écrivant $g \simeq g_{\text{D}} + \Delta g_{\text{WL}}$, déduire le comportement de la fonction $\beta(g)$ à grand g . Tracer l'allure de $\beta(g)$ en fonction de $\ln g$ (depuis le régime de fort désordre $g \rightarrow 0$ jusqu'au régime de faible désordre $g \rightarrow \infty$).

6/ **Longueur de localisation.**— Rappeler comment estimer la longueur de localisation $\xi^{(2\text{D})}$ à partir de la forme approchée $g \simeq g_{\text{D}} + \Delta g_{\text{WL}}$. Déduire l'expression de $\xi^{(2\text{D})}$ en fonction de k_F et ℓ_e .

A.N. : Dans l'article de Eshkol et al., Phys. Rev. B **73**, 115318 (2006), les auteurs présentent des mesures sur un métal 2D à une interface GaAs/AlGaAs. Ils donnent $n = 2.8 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ (densité d'électrons), $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_*} = 9.9 \text{ meV}$ (énergie de Fermi), $D = 0.085 \text{ m}^2/\text{s}$ (constante de diffusion), $\tau_e = \ell_e/v_F = 3.3 \times 10^{-12} \text{ s}$ (temps de libre parcours moyen élastique), où $v_F = \hbar k_F/m_*$.

Exprimer $k_F \ell_e$ en fonction de ε_F et τ_e . Déduire la valeur de $\xi^{(2\text{D})}/\ell_e$.

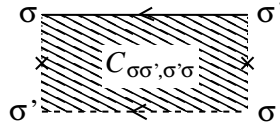
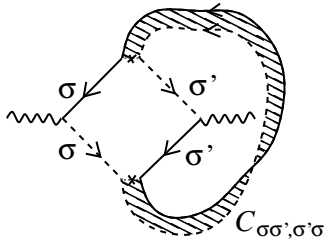


FIGURE 2 : À gauche : *Diagramme de localisation faible avec indices de spins. Le vertex de courant conserve le spin.* À droite : *Cooperon impliqué dans le diagramme.*

B. Effet d'un fort couplage spin-orbite

Les métaux lourds sont caractérisés par un fort couplage spin-orbite et la diffusion sur le potentiel désordonné affecte également l'état de spin des électrons.¹ Les lignes de fonctions de Green et le vertex de désordre portent des indices de spin. Le Cooperon “propage” donc une paire d'indices de spin : $C_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_3\sigma_4}(\vec{r}, \vec{r}')$.

L'invariance par rotation du problème implique que le Cooperon se décompose sur l'état singulet de spin ($S = 0$) pour la paire de spins et l'état triplet ($S = 1$). Dans la limite de fort couplage spin orbite, seul subsiste la contribution du canal singulet, i.e. une contribution

$$C_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_3\sigma_4}(\vec{r}, \vec{r}') \simeq \mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}') (\Pi_0)_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_3\sigma_4} \quad (7)$$

proportionnelle au projecteur

$$\Pi_0 \stackrel{\text{def}}{=} |0,0\rangle\langle 0,0| \quad \text{où} \quad |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) . \quad (8)$$

$\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{r}')$ étant le Cooperon de la question **A** (sans spin).

- 1/ Donner un argument physique pour justifier que le Cooperon est dominé par le canal singulet.
- 2/ Écrire la matrice représentant le projecteur Π_0 dans la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$.
- 3/ La correction de localisation faible (Fig. 2) est donnée par

$$\Delta g_{\text{WL}} = - \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{\mathcal{C}}_{\sigma\sigma', \sigma'\sigma}(\vec{r}, \vec{r}) \quad (9)$$

Effectuer la somme sur les indices de spin et déduire l'expression de Δg_{WL} à champ nul.

- 4/ En 1984, Bergman a fait une série de mesures de magnéto-*résistance* de films métalliques d'un alliage de Magnésium ($Z = 12$) et d'Or ($Z = 79$), en faisant varier la concentration en Or (Fig. 3). Expliquer l'allure des courbes expérimentales.
- 5/ Dans la limite de fort couplage spin-orbite, pour le film *cohérent*, on a donc

$$\Delta g_{\text{WL}}(L) = + \frac{1}{2\pi} \ln(L/\ell_e) + \text{cste} \quad (10)$$

Déduire le nouveau comportement limite de la fonction $\beta(g)$ à grand g . En admettant que le comportement à grand g de la fonction se raccorde continûment sur le comportement attendu dans le régime de fort désordre (cf. introduction), justifier que la présence de fort couplage spin-orbite induit une transition métal-isolant en 2D.

¹ Bien que cela ne soit pas utile ici, on rappelle que l'effet du couplage spin orbite est d'ajouter au potentiel désordonné $V(\vec{r})$ une contribution $\frac{1}{2m_e^2 c^2} \vec{S}_e \cdot (\vec{\nabla} V \times \vec{p})$ où \vec{S}_e est le spin de l'électron et \vec{p} son impulsion.

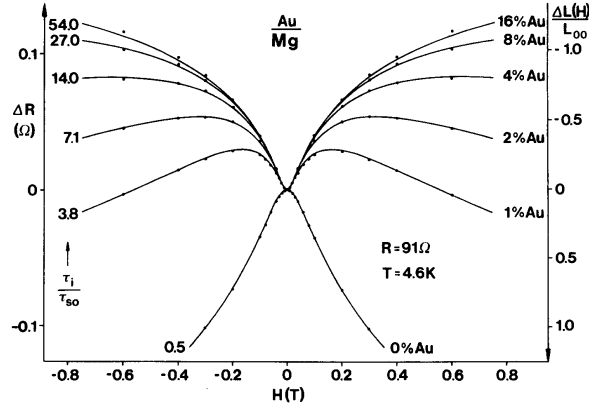


FIGURE 3 : Magnéto-résistance (résistance électrique en fonction du champ magnétique) d'un alliage magnésium-or pour différentes concentrations en or. Tiré de : G. Bergmann, Weak localization in thin films, Phys. Rep. **107**(1), 1–58 (1984).

C. Effet des interactions entre électrons

Dans un métal, la nature diffusive du transport renforce l'effet de l'interaction et apporte une contribution négative à la conductance, appelée correction Al'tshuler-Aronov. En utilisant maintenant une représentation temporelle, son expression est (pour $\hbar = k_B = 1$)

$$\Delta g_{AA} = -2\lambda_\sigma D \int_{\tilde{\tau}_e}^{\infty} dt \mathcal{P}_d(t) \left(\frac{\pi t T}{\sinh(\pi t T)} \right)^2 \quad (11)$$

où $\mathcal{P}_d(t) = \mathcal{P}_t(\vec{r}, \vec{r})$ (la solution du A.2.a) représente le **Diffuson** et λ_σ est une constante d'interaction sans dimension. T est la température et $\tilde{\tau}_e = \ell_e^2/D$ un cutoff.

1/ Montrer que

$$\Delta g_{AA}(L_T) = -\frac{\lambda_\sigma}{\pi} \ln(L_T/\ell_e) + \text{cste} \quad (12)$$

en 2D, où L_T est la longueur thermique, dont on donnera l'expression en fonction de T et de D (pour $\hbar = k_B = 1$).

2/ On admet que la correction Al'tshuler-Aronov dans un film de dimension $L \lesssim L_T$ est donnée par $\Delta g_{AA}(L)$. Donner l'expression de la conductance totale, combinant les deux corrections quantiques $g \simeq g_D + \Delta g_{WL} + \Delta g_{AA}$, pour un **fort couplage spin-orbite**.

3/ Dans la limite de fort couplage spin-orbite, la constante d'interaction est donnée par $\lambda_\sigma = 4/d$ où d est la dimension. Le comportement limite de la fonction $\beta(g)$ à grand g est-il compatible avec une transition métal-isolant en 2D ?

4/ Réintroduire k_B et \hbar dans l'expression de L_T (par analyse dimensionnelle). En utilisant la valeur donnée plus haut, $D = 0.085 \text{ m}^2/\text{s}$, donner la valeur de la température qu'il faudrait atteindre pour que $L_T > L = 10 \mu\text{m}$.

Annexe

Fonction de MacDonald (Bessel modifiée)

On donne une représentation intégrale des fonctions de MacDonald

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\nu+1}} e^{-t-z^2/4t} \quad \text{for } \operatorname{Re} z > 0 \quad (13)$$

et les comportements limites

$$K_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad \text{for } z \rightarrow +\infty \quad (14)$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} & \text{for } \nu \neq 0 \\ \ln(2/z) - \mathbf{C} & \text{for } \nu = 0 \end{cases} \quad \text{for } z \rightarrow 0 \quad (15)$$

où $\mathbf{C} = 0.577\dots$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Autres

- Constantes fondamentales : $\hbar = 10^{-34}$ J/s ; $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K ; $|q_e| = 1.6 \times 10^{-19}$ C.

Pour en savoir plus :

- La discussion est inspirée de l'article :

B. L. Altshuler and A. G. Aronov, *Fermi-liquid theory of the electron-electron interaction effects in disordered metals*, Solid State Commun. **46**(6), 429–435 (1983).

Solutions disponibles sur la page du cours : http://www.lptms.u-psud.fr/christophe_texier/