

EXAMEN FINAL DE PHYSIQUE STATISTIQUE DU 10 MAI 2019 — SOLUTIONS

1 Loi d'action de masse

On considère n gaz parfaits dans l'ensemble canonique.

- 1/ Pour une molécule X_i , la fonction de partition classique fait intervenir une intégrale dans l'espace des phases qui est $\propto V$, d'où $z_i(T, V) = V \zeta_i(T)$. Exemple pour un atome $z_i(T, V) = \frac{1}{h^3} \int_V d^3\vec{r} \int d^3\vec{p} e^{-\beta H(\vec{p})} = \frac{V}{h^3} \int d^3\vec{p} e^{-\beta H(\vec{p})}$.

Pour N_i molécules de type X_i (donc identiques) sans interaction, on a $Z_i = \frac{1}{N_i!} z_i^{N_i}$.

- 2/ Les n gaz sont indépendants, d'où $Z(T, V, N_1, \dots, N_n) = \prod_{i=1}^n Z_i = \prod_{i=1}^n \frac{1}{N_i!} (V \zeta_i)^{N_i}$. On obtient l'énergie libre

$$F(T, V, N_1, \dots, N_n) = -k_B T \sum_{i=1}^n N_i \{1 + \ln [V \zeta_i(T)/N_i]\} \quad (16)$$

où l'on a utilisé la formule de Stirling.

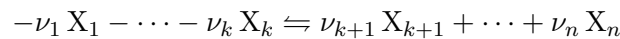
- 3/ Pour une espèce, le potentiel chimique canonique est défini comme $\mu^c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial N}$. Pour plusieurs espèces, on doit introduire une variable conjuguée μ_i pour chaque N_i :

$$\mu_i(T, n_i) = \frac{\partial F}{\partial N_i} = k_B T \ln(n_i/\zeta_i(T)) \quad \text{avec } n_i = N_i/V. \quad (17)$$

- 4/ En général, la variation d'énergie libre est

$$dF = -S^c dT - p^c dV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (18)$$

En l'absence de réaction chimique les N_i sont des variables *externes*. Lorsque la réaction



est activée, les N_i deviennent des variables *internes* (fluctuantes), i.e. $F(T, V, N_1, \dots, N_n)$ doit être alors interprétée comme une « énergie libre réduite » (vocabulaire du cours). L'équilibre, qui fixe l'état le plus probable, correspond à l'état qui **minimise l'énergie libre**, $dF = 0$.

Lorsque la réaction se produit, les variations des N_i sont liées par les $n - 1$ contraintes : $dN_1/\nu_1 = dN_2/\nu_2 = \dots = dN_n/\nu_n \equiv d\xi$, où il est commode d'introduire ξ , « l'avancement de la réaction », ainsi on écrit $dN_i = \nu_i d\xi \forall i$.

Si on se place à T et V fixés, on a

$$dF = \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i = d\xi \sum_{i=1}^n \mu_i \nu_i.$$

$dF = 0$ correspond donc à

$$\sum_{i=1}^n \nu_i \mu_i = 0 \quad (\text{équilibre}). \quad (19)$$

5/ **Loi d'action de masse.**— On utilise l'expression des potentiels chimiques pour réécrire l'équilibre en termes des densités

$$\sum_{i=1}^n \nu_i \ln(n_i/\zeta_i(T)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\prod_{i=1}^n n_i^{\nu_i} = K(T)} \quad \text{où } K(T) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n \zeta_i(T)^{\nu_i} \quad (20)$$

est donc seulement fonction de T .

6/ Étudions la réaction de dissociation $2\text{N} \rightleftharpoons \text{N}_2$. Notre objectif est de déterminer la fonction $K(T)$ en fonction des paramètres microscopiques.

a) Pour l'atome d'azote : $\zeta_1(T) = \frac{1}{h^3} \int d^3\vec{p} e^{-\beta\vec{p}^2/(2m_N)} = 1/\lambda_T^3$, où $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/(m_N k_B T)}$ est la longueur thermique.

b) La forme

$$\zeta_2(T) = \frac{2^{3/2}}{\lambda_T^3} \frac{T}{2T_{\text{rot}}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \quad (21)$$

correspond à la factorisation de la fonction de partition en : translation \times rotation \times liaison. La vibration est gelée et ne contribue pas car $T \ll T_{\text{vib}}$.

c) Finalement on déduit

$$K(T) = \frac{\zeta_2(T)}{\zeta_1(T)^2} = \sqrt{2} \lambda_T^3 \frac{T}{T_{\text{rot}}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \quad (22)$$

Remarque additionnelle :

Donnons quelques détails instructifs sur le calcul de $\zeta_2(T)$ pour les molécules N_2 :

On a vu (cours & TD) que la fonction de partition se factorise sous la forme $z_2 = z_{\text{trans}} z_{\text{rot}} z_{\text{vib}} e^{-\beta V_0}$ où $V_0 < 0$ est le minimum du potentiel qui assure la liaison.

- $z_{\text{trans}} = V/\Lambda_T^3$ où la longueur thermique Λ_T correspond aux molécules de masse $2m_N$, d'où $\Lambda_T = \lambda_T/\sqrt{2}$ et donc $\zeta_2(T) = \frac{2^{3/2}}{\lambda_T^3} z_{\text{rot}} z_{\text{vib}} e^{-\beta V_0}$.

- Comme $T \gg T_{\text{rot}}$, la rotation est activée et peut être décrite classiquement. En cours & TD on a étudié le cas des molécules hétéronucléaires pour lesquelles

$$z_{\text{rot}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-\ell(\ell+1) T_{\text{rot}}/T} \approx \int_0^{\infty} d\ell (2\ell+1) e^{-\ell(\ell+1) T_{\text{rot}}/T} = \frac{T}{T_{\text{rot}}} \quad (\text{molécule hétéronucléaire})$$

Il y a ici une subtilité : la molécule N_2 est *homonucléaire*. Le postulat de symétrisation impose que seuls les ℓ impairs soient retenus dans la somme (l'atome d'azote ${}^{14}_7\text{N}$ est un fermion), ce qui correspond à des états antisymétriques sous l'échange des deux atomes identiques. Comme on somme sur la moitié des moments orbitaux, il y a un facteur $1/2$:

$$z_{\text{rot}} = \sum_{\ell \text{ impairs}} (2\ell+1) e^{-\ell(\ell+1) T_{\text{rot}}/T} \approx \frac{T}{2T_{\text{rot}}} \quad (\text{molécule homonucléaire}).$$

- Dans le régime $T \ll T_{\text{vib}}$, la vibration est gelée et l'oscillateur reste dans son fondamental, d'où $z_{\text{vib}} \simeq e^{-\beta\hbar\omega/2}$.

Conclusion : en introduisant l'énergie de liaison $\varepsilon_0 = -V_0 - \hbar\omega/2 > 0$, qui correspond à l'énergie minimale nécessaire pour dissocier la molécule, on obtient finalement (21).

7/ Calculons la chaleur de réaction en utilisant la loi de van't Hoff.

$$Q_V = k_B T^2 \frac{\partial \ln K(T)}{\partial T} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \right) = -\varepsilon_0 - \frac{1}{2} k_B T. \quad (23)$$

Interprétation :

- la recombinaison $2N \rightarrow N_2$ est exothermique (l'état moléculaire est plus favorable énergétiquement que l'état atomique).
- Dans le gaz, les deux atomes ont une énergie moyenne $\bar{\varepsilon}_{\text{initiale}} = 2 \times \frac{3}{2} k_B T$ (translation). La molécule a une énergie moyenne $\bar{\varepsilon}_{\text{finale}} = \frac{3}{2} k_B T + k_B T - \varepsilon_0$ (translation + rotation - liaison).

On a bien $Q_V = \bar{\varepsilon}_{\text{finale}} - \bar{\varepsilon}_{\text{initiale}}$.

☞ Pour en savoir plus : On pourra consulter le §8.7 de l'ouvrage classique de F. Reif, « *Fundamentals of statistical and thermal physics* », McGraw-Hill (1965).

2 Ferromagnétisme à basse température

A. **Modèle d'Ising.**— Les spins sont des variables binaires $\sigma_i = \pm 1$.

1/ **Cristal paramagnétique.**— Pour $J = 0$:

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta B \sum_i \sigma_i} = \left(\sum_{\sigma=\pm} e^{\sigma \beta B} \right)^N = z_{\text{spin}}^N \quad \text{avec } z_{\text{spin}} = 2 \operatorname{ch}(\beta B)$$

Aimantation moyenne par spin :

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\sigma_i^c} = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial B} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln z_{\text{spin}} = \operatorname{th}(\beta B) \quad (24)$$

2/ **Champ moyen.**— Le champ local moyen vu par un spin est $\overline{B_i^{\text{loc}^c}} = B + J \sum_{j \in \text{voisins}(i)} \overline{\sigma_j^c} =$

$B + qJm$. On déduit l'équation auto-cohérente $m = \operatorname{th}(\beta \overline{B_i^{\text{loc}^c}})$, i.e. $m = \operatorname{th}(\beta(B + qJm))$.
Pour $B = 0$ on obtient

$$m = \operatorname{th}(m T_c/T) \quad \text{où } k_B T_c = qJ \quad (25)$$

3/ Pour $T \ll T_c$, on a $m \simeq \pm 1$. Posons $m = 1 - \delta m$ avec $\delta m \ll 1$. L'argument de th est $\gg 1$. Utilisons $\operatorname{th} x \simeq 1 - 2e^{-2x}$:

$$m \simeq 1 - 2e^{-2(1-\delta m)T_c/T}$$

Puisque $\delta m \rightarrow 0$ pour $T \rightarrow 0$, on peut le négliger dans l'exponentielle, d'où

$$m(T) \simeq 1 - 2e^{-2T_c/T} \quad \text{pour } T \ll T_c. \quad (26)$$

Vérifions la validité de l'approximation : $\delta m \sim 2e^{-2T_c/T}$ d'où $\delta m T_c/T \sim T_c/T e^{-2T_c/T} \ll 1$ peut être négligé dans l'exponentielle.

L'échelle qui apparaît dans l'exponentielle est le **gap** entre l'énergie fondamentale et la première excitation. En effet, le retournement d'un spin change le signe de l'énergie ($-J \rightarrow +J$) de q liens. Le coût du retournement d'un spin est donc $\Delta E = 2qJ = 2k_B T_c$.

Remarque additionnelle :

On peut aussi analyser la capacité calorifique par spin, qui est reliée à l'aimantation par

$$c(T) = k_B \frac{T_c^2 m^2 (1 - m^2)}{T [T - T_c (1 - m^2)]} \quad (27)$$

[C. Texier & G. Roux, *Physique statistique*, chapitre 10, Eq. (10.48)]. En utilisant le comportement de $m(T)$, on obtient

$$c(T) \simeq k_B \left(\frac{2T_c}{T} \right)^2 e^{-2T_c/T} \quad \text{pour } T \ll T_c \quad (28)$$

qui présente bien le comportement caractéristique $c(T) \sim \exp[-\text{Gap}/k_B T]$, identique au comportement de $\delta m(T)$.

B. Ondes de spin et magnons.— On considère un modèle de spins vectoriels. À basse énergie, les excitations du système peuvent être décrites en termes d'ondes de spin, qui sont les modes propres du système (i.e. l'énergie prend la forme de l'énergie d'oscillateurs harmoniques).

- 1/ Fonction de partition canonique d'un mode $z_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} = 1/[2 \text{sh}(\beta \hbar \omega / 2)]$.
 2/ L'énergie moyenne est

$$\overline{\varepsilon}_{\text{mode}}^c = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_\omega = \frac{\hbar \omega}{2} \coth(\beta \hbar \omega / 2) = \hbar \omega (\bar{n}_\omega + 1/2) \quad \text{où } \bar{n}_\omega = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

est le nombre moyen de quanta d'excitation dans le mode (le facteur de Bose-Einstein).

On a utilisé $\coth(x/2) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + \frac{2}{e^x - 1}$.

- 3/ Le nombre moyen de magnons $\overline{N}_{\text{magn}}^c$ (i.e. le nombre moyen de quanta d'excitation pour tous les modes) comme une intégrale faisant intervenir $\rho(\omega)$ et \bar{n}_ω . Déduire $\overline{N}_{\text{magn}}^c$ en fonction de T pour $k_B T \ll \hbar \omega_D$.

$$\overline{N}_{\text{magn}}^c = \int d\omega \rho(\omega) \bar{n}_\omega = c N \left(\frac{\hbar}{J M_0} \right)^{3/2} \int_0^{\omega_D} d\omega \frac{\sqrt{\omega}}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}.$$

Dans la limite $k_B T \ll \hbar \omega_D$, on peut remplacer la borne supérieure par l'infini car $\bar{n}_\omega \simeq e^{-\beta \hbar \omega}$ décroît vite, sur l'échelle $k_B T \ll \hbar \omega_D$. D'où

$$\overline{N}_{\text{magn}}^c \simeq N c \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{k_B T}{J M_0} \right)^{3/2} \equiv N \left(\frac{T}{T_J} \right)^{3/2} \quad \text{pour } k_B T \ll \hbar \omega_D, \quad (29)$$

où $T_J \sim M_0 J / k_B$.

- 4/ **Loi de Bloch.**— Les magnons représentent les quanta d'excitation pour les fluctuations d'aimantation. Les fluctuations de \vec{M} autour de $M_0 \vec{u}_z$ diminuent \overline{M}_z^c :

$$\frac{\overline{M}_z^c}{M_0} \simeq 1 - \frac{\overline{N}_{\text{magn}}^c}{N} \simeq 1 - \left(\frac{T}{T_J} \right)^{3/2} \quad (30)$$

où l'on attend $T_J \sim T_c$.

C. Conclusion.— Les deux modèles prédisent des comportements très différents. Le modèle d'Ising prédit $1 - m(T) \sim e^{-2T_c/T}$ où la correction exponentielle est liée à l'existence d'un **gap** dans le spectre des excitations. Au contraire, le modèle vectoriel prédit une correction en loi de puissance $1 - m(T) \sim (T/T_c)^{3/2}$ (loi de Bloch) qui est liée à l'**absence de gap** : il existe

des excitations à des énergies arbitrairement basses $\in [0, \hbar\omega_D]$. Sur la figure, on voit bien que l'aimantation du gadolinium suit la loi de Bloch du modèle vectoriel.

Remarque additionnelle : ondes de spin

Montrons que la relation de dispersion des ondes de spin est quadratique à petit vecteur d'onde. Pour cela nous considérons la situation unidimensionnelle $H = -J \sum_n \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1}$. Nous déduisons le champ local vu par le spin n :

$$\vec{B}_n = -\frac{\partial H}{\partial \vec{\sigma}_n} = J (\vec{\sigma}_{n+1} + \vec{\sigma}_{n-1})$$

et l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_n(t) = \vec{\sigma}_n(t) \times \vec{B}_n = J \vec{\sigma}_n \times (\vec{\sigma}_{n+1} + \vec{\sigma}_{n-1}) .$$

Dans la phase ferromagnétique, les spins sont alignés sur la direction $\vec{M} = M_0 \vec{u}_z$. Les petites fluctuations autour de cette direction prennent la forme $\vec{\sigma}_n(t) = \vec{M} + \vec{s}_n(t)$ avec $\|\vec{s}_n\| \ll M_0$. Nous obtenons les équations linéarisées

$$\frac{d}{dt} \vec{s}_n(t) \simeq J \vec{M} \times (\vec{s}_{n+1} - 2\vec{s}_n(t) + \vec{s}_{n-1}) . \quad (31)$$

Introduisons des coordonnées normales (comme pour les ondes de vibration des atomes, étudiées en cours) en posant $\vec{s}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \vec{S}_q(t) e^{iqn}$ où $q \in [-\pi, +\pi]$ est un vecteur d'onde. Nous déduisons les deux équations couplées

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S_q^x(t) \simeq +4M_0J \sin^2(q/2) S_q^y(t) \\ \frac{d}{dt} S_q^y(t) \simeq -4M_0J \sin^2(q/2) S_q^x(t) \end{cases} \quad (32)$$

($S_q^z(t)$ reste constant à cet ordre), ce qui nous permet d'identifier la fréquence du mode propre

$$\omega_q = 4M_0J \sin^2(q/2) \quad \text{pour } q \in [-\pi, +\pi] . \quad (33)$$

Pour les petits vecteurs d'onde (ondes de spin de grandes longueurs d'onde) on a donc bien un comportement quadratique $\omega_q \simeq M_0J q^2$.

Dans (31) on a vu apparaître le Laplacien discret $(\Delta\Phi)_n = \Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}$. L'analyse en dimension supérieure est analogue et ferait apparaître un Laplacien discret en dimension plus grande et conduirait au même comportement aux petits vecteurs d'onde, $\omega_{\vec{q}} \simeq M_0J \vec{q}^2$. Finalement, on peut faire l'analogie avec la relation de dispersion pour des particules non relativistes, $\omega_{\vec{q}} \simeq \vec{q}^2 / (2m_*)$, où la « masse effective » des magnons est $m_* = 1/(2M_0J)$.

☞ Pour en savoir plus : Sur la loi de Bloch, cf. le livre de C. Kittel, « *Physique de l'état solide* », Dunod.

3 Gaz en rotation

On considère la distribution

$$P_\ell^c = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell - \alpha J_\ell^z} \quad \text{avec} \quad Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\ell e^{-\beta E_\ell - \alpha J_\ell^z} .$$

1/ L'énergie moyenne est donnée par la formule (ensemble canonique) $\overline{E}^c = \sum_\ell P_\ell^c E_\ell = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$. De même, on a $\overline{J^z}^c = \sum_\ell P_\ell^c J_\ell^z = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z$. En ayant introduit un nouveau terme $-\alpha J_\ell^z$ dans P_ℓ^c , on décrit un système ayant un moment cinétique moyen non nul, i.e. un système en rotation (sauf si Z est indépendante de α).

- 2/ Si l'on considère un gaz de N atomes, décrit classiquement, les microétats sont caractérisés par l'ensemble des positions et des impulsions $\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\}$. La distribution devient une densité de probabilité dans l'espace des phases

$$\rho^c(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \propto \exp \left\{ -\beta \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - \alpha \vec{u}_z \cdot \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right\} \quad (34)$$

- 3/ Les atomes sont indépendants, d'où

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp \left\{ -\beta \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \alpha m \vec{u}_z \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \right\} \quad (35)$$

On écrit $\vec{v}^2 + \frac{2\alpha}{\beta} \vec{v} \cdot (\vec{u}_z \times \vec{r}) = \left(\vec{v} + \frac{\alpha}{\beta} \vec{u}_z \times \vec{r} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} (\vec{u}_z \times \vec{r})^2$, d'où

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp \left\{ -\beta \frac{m}{2} \left(\vec{v} + \frac{\alpha}{\beta} \vec{u}_z \times \vec{r} \right)^2 + \frac{m\alpha^2}{2\beta} \vec{r}_\perp^2 \right\} \quad (36)$$

La distribution est seulement normalisable dans un volume fini, pour $\|\vec{r}_\perp\| < R$ et $z \in [0, L]$.

- 4/ On détermine le sens du paramètre α . Pour cela, on écrit la distribution avec les coordonnées cylindriques $\vec{r} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$ et $\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{u}_z$:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp \left\{ -\beta \frac{m}{2} \left[v_r^2 + \left(v_\theta + \frac{\alpha}{\beta} r \right)^2 + v_z^2 \right] + \frac{m\alpha^2}{2\beta} r^2 \right\}$$

l'expression montre que la composante angulaire de la vitesse est centrée sur $-\alpha/\beta$, i.e. $-\alpha/\beta = \omega$ est identifiée avec la vitesse angulaire moyenne. En effet, en fixant $\alpha = -\beta\omega$, on déduit que les molécules à distance r de l'axe sont caractérisées par $\overline{v_\theta} = r\omega$.² On peut finalement réécrire la distribution comme

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp -\beta \left\{ \frac{m}{2} (\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r})^2 - \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \right\} \quad (37)$$

où $\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \omega \vec{u}_z$. La rotation fait apparaître un potentiel effectif parabolique en \vec{r}_\perp (potentiel harmonique *inversé*). Par conséquent, les atomes se concentrent sur les bords du cylindres, sous l'effet de la force centrifuge.

De même $P_\ell^c \propto e^{-\beta(E_\ell - \vec{\omega} \times \vec{J}_\ell)}$ décrit un système en rotation autour de l'axe \vec{u}_z à vitesse angulaire ω .

Remarque additionnelle :

Pour que le gaz soit entraîné lorsque le cylindre tourne, il faut bien qu'il y ait des interactions (le gaz ne peut pas être parfait) : les collisions des atomes avec les bords du cylindre transfèrent du moment cinétique au gaz puis le moment est transféré au sein du gaz par les collisions entre atomes.

- 5/ La densité est donnée en intégrant la distribution

$$n(\vec{r}) = N \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}) \propto \exp \left\{ +\beta \frac{m\omega^2}{2} \vec{r}_\perp^2 \right\}$$

²rappelons l'expression de la composante orthoradiale de la vitesse en cinématique $v_\theta(t) = r(t)\dot{\theta}(t)$.

(potentiel harmonique inversé). La normalisation se calcule facilement : on veut $\int_V d^3\vec{r} n(\vec{r}) = N$. On utilise

$$\int_V d^3\vec{r} \exp\left\{\beta\frac{m\omega^2}{2}r_\perp^2\right\} = \int_0^R 2\pi dr_\perp r_\perp \int_0^L dz \exp\left\{\frac{\beta m\omega^2}{2}r_\perp^2\right\} = 2\pi L \frac{1}{\beta m\omega^2} \left(e^{\beta m\omega^2 R^2/2} - 1\right)$$

d'où

$$n(\vec{r}) = \frac{N}{V} \frac{\beta m\omega^2 R^2/2}{e^{\beta m\omega^2 R^2/2} - 1} \exp\left\{+\beta\frac{m\omega^2}{2}r_\perp^2\right\} \quad \text{pour } 0 \leq \|\vec{r}_\perp\| \leq R \quad (38)$$

où $V = \pi R^2 L$ est le volume du cylindre.

Pour $m\omega^2 R^2 \ll k_B T$ (rotation lente), on a $n(\vec{r}) \simeq N/V$ homogène. Pour $m\omega^2 R^2 \gg k_B T$ (rotation rapide), les atomes se concentrent sur les bords, sur une épaisseur typique $\delta r_\perp \sim \sqrt{k_B T/(m\omega^2)}$. Plus les atomes sont lourds ou plus la fréquence augmente et plus ils sont concentrés sur les bords.

- 6/ Les molécules les plus lourdes (avec ^{238}U) sont davantage concentrées sur les bords du cylindre. Donc la proportion en ^{235}U est plus forte au centre et plus faible au bord. On injecte du gaz dans la centrifugeuse et on extrait le gaz au centre ($\|\vec{r}_\perp\| = 0$) légèrement enrichi en ^{235}U . On le réinjecte dans une autre centrifugeuse (cf. figure) et ainsi on enrichit progressivement le gaz. L'application numérique donne


$$\frac{n_{235}(0)/n_{238}(0)}{n_{235}(R)/n_{238}(R)} = \exp\left\{\frac{m_{238} - m_{235}}{2k_B T} \omega^2 R^2\right\} \simeq \exp 0.00955 \simeq 1.01$$

Cette estimation montre qu'une centrifugeuse permet d'augmenter le rapport de 1%.

Si on utilise n centrifugeuses en série :

$$\left(\frac{n_{235}}{n_{238}}\right)_{\text{final}} \simeq \left(\frac{n_{235}}{n_{238}}\right)_{\text{initial}} e^{0.00955 n}$$

- Uranium faiblement enrichi pour une centrale : il faut atteindre $\sim 4\%$ d' ^{235}U ([wikipedia](#)), ce qui requerrait $n \simeq 186$ centrifugeuses.
- Uranium hautement enrichi pour usage militaire : pour atteindre $\sim 90\%$ d' ^{235}U , il faudrait $n \simeq 749$ centrifugeuses.

 Pour en savoir plus : L'exercice a été inspiré par l'ouvrage de R. Balian, « From microphysics to macrophysics », vol. I, Springer.

dans le dossier récent de la revue du CNRS « *Reflets de la physique* » (n°60, décembre 2018, p. 10), on trouve qu'il suffit d'une dizaine de centrifugeuses pour atteindre une proportion de $\sim 4\%$ d' ^{235}U , ce qui montre que $\frac{m_{238} - m_{235}}{2k_B T} \omega^2 R^2 \simeq 0.177$, i.e. j'avais sous-estimé ωR d'un facteur ~ 4.3 . Il ne faut alors que $n \sim 40$ centrifugeuses pour obtenir de l'uranium pour usage militaire.