

## EXAMEN FINAL DE PHYSIQUE STATISTIQUE DU 10 MAI 2019 — SOLUTIONS

## 1 Loi d'action de masse

On considère  $n$  gaz parfaits dans l'ensemble canonique.

1/ Pour une molécule  $X_i$ , la fonction de partition classique fait intervenir une intégrale dans l'espace des phases qui est  $\propto V$ , d'où  $z_i(T, V) = V \zeta_i(T)$ . Exemple pour un atome  $z_i(T, V) = \frac{1}{h^3} \int_V d^3\vec{r} \int d^3\vec{p} e^{-\beta H(\vec{p})} = \frac{V}{h^3} \int d^3\vec{p} e^{-\beta H(\vec{p})}$ .

Pour  $N_i$  molécules de type  $X_i$  (donc identiques) sans interaction, on a  $Z_i = \frac{1}{N_i!} z_i^{N_i}$ .

2/ Les  $n$  gaz sont indépendants, d'où  $Z(T, V, N_1, \dots, N_n) = \prod_{i=1}^n Z_i = \prod_{i=1}^n \frac{1}{N_i!} (V \zeta_i)^{N_i}$ . On obtient l'énergie libre

$$F(T, V, N_1, \dots, N_n) = -k_B T \sum_{i=1}^n N_i \{1 + \ln [V \zeta_i(T)/N_i]\} \quad (16)$$

où l'on a utilisé la formule de Stirling.

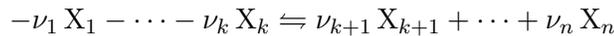
3/ Pour une espèce, le potentiel chimique canonique est défini comme  $\mu^c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial N}$ . Pour plusieurs espèces, on doit introduire une variable conjuguée  $\mu_i$  pour chaque  $N_i$  :

$$\mu_i(T, n_i) = \frac{\partial F}{\partial N_i} = k_B T \ln(n_i/\zeta_i(T)) \quad \text{avec } n_i = N_i/V. \quad (17)$$

4/ En général, la variation d'énergie libre est

$$dF = -S^c dT - p^c dV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (18)$$

En l'absence de réaction chimique les  $N_i$  sont des variables *externes*. Lorsque la réaction



est activée, les  $N_i$  deviennent des variables *internes* (fluctuantes), i.e.  $F(T, V, N_1, \dots, N_n)$  doit être alors interprétée comme une « énergie libre réduite » (vocabulaire du cours). L'équilibre, qui fixe l'état le plus probable, correspond à l'état qui **minimise l'énergie libre**,  $dF = 0$ .

Lorsque la réaction se produit, les variations des  $N_i$  sont liées par les  $n - 1$  contraintes :  $dN_1/\nu_1 = dN_2/\nu_2 = \dots = dN_n/\nu_n \equiv d\xi$ , où il est commode d'introduire  $\xi$ , « l'avancement de la réaction », ainsi on écrit  $dN_i = \nu_i d\xi \forall i$ .

Si on se place à  $T$  et  $V$  fixés, on a

$$dF = \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i = d\xi \sum_{i=1}^n \mu_i \nu_i.$$

$dF = 0$  correspond donc à

$$\sum_{i=1}^n \nu_i \mu_i = 0 \quad (\text{équilibre}). \quad (19)$$

5/ **Loi d'action de masse.**— On utilise l'expression des potentiels chimiques pour réécrire l'équilibre en termes des densités

$$\sum_{i=1}^n \nu_i \ln(n_i/\zeta_i(T)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\prod_{i=1}^n n_i^{\nu_i} = K(T)} \quad \text{où } K(T) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n \zeta_i(T)^{\nu_i} \quad (20)$$

est donc seulement fonction de  $T$ .

6/ Étudions la réaction de dissociation  $2\text{N} \rightleftharpoons \text{N}_2$ . Notre objectif est de déterminer la fonction  $K(T)$  en fonction des paramètres microscopiques.

a) Pour l'atome d'azote :  $\zeta_1(T) = \frac{1}{h^3} \int d^3\vec{p} e^{-\beta\vec{p}^2/(2m_N)} = 1/\lambda_T^3$ , où  $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/(m_N k_B T)}$  est la longueur thermique.

b) La forme

$$\zeta_2(T) = \frac{2^{3/2}}{\lambda_T^3} \frac{T}{2T_{\text{rot}}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \quad (21)$$

correspond à la factorisation de la fonction de partition en : translation  $\times$  rotation  $\times$  liaison. La vibration est gelée et ne contribue pas car  $T \ll T_{\text{vib}}$ .

c) Finalement on déduit

$$K(T) = \frac{\zeta_2(T)}{\zeta_1(T)^2} = \sqrt{2} \lambda_T^3 \frac{T}{T_{\text{rot}}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \quad (22)$$

#### Remarque additionnelle :

Donnons quelques détails instructifs sur le calcul de  $\zeta_2(T)$  pour les molécules  $\text{N}_2$  :

On a vu (cours & TD) que la fonction de partition se factorise sous la forme  $z_2 = z_{\text{trans}} z_{\text{rot}} z_{\text{vib}} e^{-\beta V_0}$  où  $V_0 < 0$  est le minimum du potentiel qui assure la liaison.

- $z_{\text{trans}} = V/\Lambda_T^3$  où la longueur thermique  $\Lambda_T$  correspond aux molécules de masse  $2m_N$ , d'où  $\Lambda_T = \lambda_T/\sqrt{2}$  et donc  $\zeta_2(T) = \frac{2^{3/2}}{\lambda_T^3} z_{\text{rot}} z_{\text{vib}} e^{-\beta V_0}$ .

- Comme  $T \gg T_{\text{rot}}$ , la rotation est activée et peut être décrite classiquement. En cours & TD on a étudié le cas des molécules hétéronucléaires pour lesquelles

$$z_{\text{rot}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-\ell(\ell+1) T_{\text{rot}}/T} \approx \int_0^{\infty} d\ell (2\ell+1) e^{-\ell(\ell+1) T_{\text{rot}}/T} = \frac{T}{T_{\text{rot}}} \quad (\text{molécule hétéronucléaire})$$

Il y a ici une subtilité : la molécule  $\text{N}_2$  est *homonucléaire*. Le postulat de symétrisation impose que seuls les  $\ell$  impairs soient retenus dans la somme (l'atome d'azote  ${}^{14}_7\text{N}$  est un fermion), ce qui correspond à des états antisymétriques sous l'échange des deux atomes identiques. Comme on somme sur la moitié des moments orbitaux, il y a un facteur  $1/2$  :

$$z_{\text{rot}} = \sum_{\ell \text{ impairs}} (2\ell+1) e^{-\ell(\ell+1) T_{\text{rot}}/T} \approx \frac{T}{2T_{\text{rot}}} \quad (\text{molécule homonucléaire}).$$

- Dans le régime  $T \ll T_{\text{vib}}$ , la vibration est gelée et l'oscillateur reste dans son fondamental, d'où  $z_{\text{vib}} \simeq e^{-\beta\hbar\omega/2}$ .

Conclusion : en introduisant l'énergie de liaison  $\varepsilon_0 = -V_0 - \hbar\omega/2 > 0$ , qui correspond à l'énergie minimale nécessaire pour dissocier la molécule, on obtient finalement (21).

7/ Calculons la chaleur de réaction en utilisant la loi de van't Hoff.

$$Q_V = k_B T^2 \frac{\partial \ln K(T)}{\partial T} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\varepsilon_0/(k_B T)} \right) = -\varepsilon_0 - \frac{1}{2} k_B T. \quad (23)$$

Interprétation :

- la recombinaison  $2N \rightarrow N_2$  est exothermique (l'état moléculaire est plus favorable énergétiquement que l'état atomique).
- Dans le gaz, les deux atomes ont une énergie moyenne  $\bar{\varepsilon}_{\text{initiale}} = 2 \times \frac{3}{2} k_B T$  (translation). La molécule a une énergie moyenne  $\bar{\varepsilon}_{\text{finale}} = \frac{3}{2} k_B T + k_B T - \varepsilon_0$  (translation + rotation - liaison).

On a bien  $Q_V = \bar{\varepsilon}_{\text{finale}} - \bar{\varepsilon}_{\text{initiale}}$ .

☞ Pour en savoir plus : On pourra consulter le §8.7 de l'ouvrage classique de F. Reif, « *Fundamentals of statistical and thermal physics* », McGraw-Hill (1965).

## 2 Ferromagnétisme à basse température

A. **Modèle d'Ising.**— Les spins sont des variables binaires  $\sigma_i = \pm 1$ .

1/ **Cristal paramagnétique.**— Pour  $J = 0$  :

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta B \sum_i \sigma_i} = \left( \sum_{\sigma=\pm} e^{\sigma \beta B} \right)^N = z_{\text{spin}}^N \quad \text{avec } z_{\text{spin}} = 2 \operatorname{ch}(\beta B)$$

Aimantation moyenne par spin :

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\sigma_i^c} = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial B} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln z_{\text{spin}} = \operatorname{th}(\beta B) \quad (24)$$

2/ **Champ moyen.**— Le champ local moyen vu par un spin est  $\overline{B_i^{\text{loc}^c}} = B + J \sum_{j \in \text{voisins}(i)} \overline{\sigma_j^c} =$

$B + qJm$ . On déduit l'équation auto-cohérente  $m = \operatorname{th}(\beta \overline{B_i^{\text{loc}^c}})$ , i.e.  $m = \operatorname{th}(\beta(B + qJm))$ . Pour  $B = 0$  on obtient

$$m = \operatorname{th}(m T_c / T) \quad \text{où } k_B T_c = qJ \quad (25)$$

3/ Pour  $T \ll T_c$ , on a  $m \simeq \pm 1$ . Posons  $m = 1 - \delta m$  avec  $\delta m \ll 1$ . L'argument de  $\operatorname{th}$  est  $\gg 1$ . Utilisons  $\operatorname{th} x \simeq 1 - 2e^{-2x}$  :

$$m \simeq 1 - 2e^{-2(1-\delta m)T_c/T}$$

Puisque  $\delta m \rightarrow 0$  pour  $T \rightarrow 0$ , on peut le négliger dans l'exponentielle, d'où

$$m(T) \simeq 1 - 2e^{-2T_c/T} \quad \text{pour } T \ll T_c. \quad (26)$$

Vérifions la validité de l'approximation :  $\delta m \sim 2e^{-2T_c/T}$  d'où  $\delta m T_c / T \sim T_c / T e^{-2T_c/T} \ll 1$  peut être négligé dans l'exponentielle.

L'échelle qui apparaît dans l'exponentielle est le **gap** entre l'énergie fondamentale et la première excitation. En effet, le retournement d'un spin change le signe de l'énergie ( $-J \rightarrow +J$ ) de  $q$  liens. Le coût du retournement d'un spin est donc  $\Delta E = 2qJ = 2k_B T_c$ .

**Remarque additionnelle :**

On peut aussi analyser la capacité calorifique par spin, qui est reliée à l'aimantation par

$$c(T) = k_B \frac{T_c^2 m^2 (1 - m^2)}{T [T - T_c (1 - m^2)]} \quad (27)$$

[C. Texier & G. Roux, *Physique statistique*, chapitre 10, Eq. (10.48)]. En utilisant le comportement de  $m(T)$ , on obtient

$$c(T) \simeq k_B \left( \frac{2T_c}{T} \right)^2 e^{-2T_c/T} \quad \text{pour } T \ll T_c \quad (28)$$

qui présente bien le comportement caractéristique  $c(T) \sim \exp[-\text{Gap}/k_B T]$ , identique au comportement de  $\delta m(T)$ .

**B. Ondes de spin et magnons.**— On considère un modèle de spins vectoriels. À basse énergie, les excitations du système peuvent être décrites en termes d'ondes de spin, qui sont les modes propres du système (i.e. l'énergie prend la forme de l'énergie d'oscillateurs harmoniques).

- 1/ Fonction de partition canonique d'un mode  $z_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} = 1/[2 \text{sh}(\beta \hbar \omega / 2)]$ .  
 2/ L'énergie moyenne est

$$\overline{\varepsilon}_{\text{mode}}^c = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_\omega = \frac{\hbar \omega}{2} \coth(\beta \hbar \omega / 2) = \hbar \omega (\bar{n}_\omega + 1/2) \quad \text{où } \bar{n}_\omega = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

est le nombre moyen de quanta d'excitation dans le mode (le facteur de Bose-Einstein).

On a utilisé  $\coth(x/2) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + \frac{2}{e^x - 1}$ .

- 3/ Le nombre moyen de magnons  $\overline{N}_{\text{magn}}^c$  (i.e. le nombre moyen de quanta d'excitation pour tous les modes) comme une intégrale faisant intervenir  $\rho(\omega)$  et  $\bar{n}_\omega$ . Déduire  $\overline{N}_{\text{magn}}^c$  en fonction de  $T$  pour  $k_B T \ll \hbar \omega_D$ .

$$\overline{N}_{\text{magn}}^c = \int d\omega \rho(\omega) \bar{n}_\omega = c N \left( \frac{\hbar}{J M_0} \right)^{3/2} \int_0^{\omega_D} d\omega \frac{\sqrt{\omega}}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}.$$

Dans la limite  $k_B T \ll \hbar \omega_D$ , on peut remplacer la borne supérieure par l'infini car  $\bar{n}_\omega \simeq e^{-\beta \hbar \omega}$  décroît vite, sur l'échelle  $k_B T \ll \hbar \omega_D$ . D'où

$$\overline{N}_{\text{magn}}^c \simeq N c \Gamma \left( \frac{3}{2} \right) \zeta \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{k_B T}{J M_0} \right)^{3/2} \equiv N \left( \frac{T}{T_J} \right)^{3/2} \quad \text{pour } k_B T \ll \hbar \omega_D, \quad (29)$$

où  $T_J \sim M_0 J / k_B$ .

- 4/ **Loi de Bloch.**— Les magnons représentent les quanta d'excitation pour les fluctuations d'aimantation. Les fluctuations de  $\vec{M}$  autour de  $M_0 \vec{u}_z$  diminuent  $\overline{M}_z^c$  :

$$\frac{\overline{M}_z^c}{M_0} \simeq 1 - \frac{\overline{N}_{\text{magn}}^c}{N} \simeq 1 - \left( \frac{T}{T_J} \right)^{3/2} \quad (30)$$

où l'on attend  $T_J \sim T_c$ .

**C. Conclusion.**— Les deux modèles prédisent des comportements très différents. Le modèle d'Ising prédit  $1 - m(T) \sim e^{-2T_c/T}$  où la correction exponentielle est liée à l'existence d'un **gap** dans le spectre des excitations. Au contraire, le modèle vectoriel prédit une correction en loi de puissance  $1 - m(T) \sim (T/T_c)^{3/2}$  (loi de Bloch) qui est liée à l'**absence de gap** : il existe

des excitations à des énergies arbitrairement basses  $\in [0, \hbar\omega_D]$ . Sur la figure, on voit bien que l'aimantation du gadolinium suit la loi de Bloch du modèle vectoriel.

**Remarque additionnelle : ondes de spin**

Montrons que la relation de dispersion des ondes de spin est quadratique à petit vecteur d'onde. Pour cela nous considérons la situation unidimensionnelle  $H = -J \sum_n \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1}$ . Nous déduisons le champ local vu par le spin  $n$  :

$$\vec{B}_n = -\frac{\partial H}{\partial \vec{\sigma}_n} = J (\vec{\sigma}_{n+1} + \vec{\sigma}_{n-1})$$

et l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_n(t) = \vec{\sigma}_n(t) \times \vec{B}_n = J \vec{\sigma}_n \times (\vec{\sigma}_{n+1} + \vec{\sigma}_{n-1}) .$$

Dans la phase ferromagnétique, les spins sont alignés sur la direction  $\vec{M} = M_0 \vec{u}_z$ . Les petites fluctuations autour de cette direction prennent la forme  $\vec{\sigma}_n(t) = \vec{M} + \vec{s}_n(t)$  avec  $\|\vec{s}_n\| \ll M_0$ . Nous obtenons les équations linéarisées

$$\frac{d}{dt} \vec{s}_n(t) \simeq J \vec{M} \times (\vec{s}_{n+1} - 2\vec{s}_n(t) + \vec{s}_{n-1}) . \quad (31)$$

Introduisons des coordonnées normales (comme pour les ondes de vibration des atomes, étudiées en cours) en posant  $\vec{s}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \vec{S}_q(t) e^{iqn}$  où  $q \in [-\pi, +\pi]$  est un vecteur d'onde. Nous déduisons les deux équations couplées

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S_q^x(t) \simeq +4M_0J \sin^2(q/2) S_q^y(t) \\ \frac{d}{dt} S_q^y(t) \simeq -4M_0J \sin^2(q/2) S_q^x(t) \end{cases} \quad (32)$$

( $S_q^z(t)$  reste constant à cet ordre), ce qui nous permet d'identifier la fréquence du mode propre

$$\omega_q = 4M_0J \sin^2(q/2) \quad \text{pour } q \in [-\pi, +\pi] . \quad (33)$$

Pour les petits vecteurs d'onde (ondes de spin de grandes longueurs d'onde) on a donc bien un comportement quadratique  $\omega_q \simeq M_0J q^2$ .

Dans (31) on a vu apparaître le Laplacien discret  $(\Delta\Phi)_n = \Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}$ . L'analyse en dimension supérieure est analogue et ferait apparaître un Laplacien discret en dimension plus grande et conduirait au même comportement aux petits vecteurs d'onde,  $\omega_{\vec{q}} \simeq M_0J \vec{q}^2$ . Finalement, on peut faire l'analogie avec la relation de dispersion pour des particules non relativistes,  $\omega_{\vec{q}} \simeq \vec{q}^2 / (2m_*)$ , où la « masse effective » des magnons est  $m_* = 1/(2M_0J)$ .

☞ Pour en savoir plus : Sur la loi de Bloch, cf. le livre de C. Kittel, « *Physique de l'état solide* », Dunod.

### 3 Gaz en rotation

On considère la distribution

$$P_\ell^c = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell - \alpha J_\ell^z} \quad \text{avec} \quad Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\ell e^{-\beta E_\ell - \alpha J_\ell^z} .$$

1/ L'énergie moyenne est donnée par la formule (ensemble canonique)  $\overline{E}^c = \sum_\ell P_\ell^c E_\ell = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$ . De même, on a  $\overline{J^z}^c = \sum_\ell P_\ell^c J_\ell^z = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z$ . En ayant introduit un nouveau terme  $-\alpha J_\ell^z$  dans  $P_\ell^c$ , on décrit un système ayant un moment cinétique moyen non nul, i.e. un système en rotation (sauf si  $Z$  est indépendante de  $\alpha$ ).

- 2/ Si l'on considère un gaz de  $N$  atomes, décrit classiquement, les microétats sont caractérisés par l'ensemble des positions et des impulsions  $\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\}$ . La distribution devient une densité de probabilité dans l'espace des phases

$$\rho^c(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \propto \exp \left\{ -\beta \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - \alpha \vec{u}_z \cdot \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right\} \quad (34)$$

- 3/ Les atomes sont indépendants, d'où

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp \left\{ -\beta \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \alpha m \vec{u}_z \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \right\} \quad (35)$$

On écrit  $\vec{v}^2 + \frac{2\alpha}{\beta} \vec{v} \cdot (\vec{u}_z \times \vec{r}) = \left( \vec{v} + \frac{\alpha}{\beta} \vec{u}_z \times \vec{r} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} (\vec{u}_z \times \vec{r})^2$ , d'où

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp \left\{ -\beta \frac{m}{2} \left( \vec{v} + \frac{\alpha}{\beta} \vec{u}_z \times \vec{r} \right)^2 + \frac{m\alpha^2}{2\beta} \vec{r}_\perp^2 \right\} \quad (36)$$

La distribution est seulement normalisable dans un volume fini, pour  $\|\vec{r}_\perp\| < R$  et  $z \in [0, L]$ .

- 4/ On détermine le sens du paramètre  $\alpha$ . Pour cela, on écrit la distribution avec les coordonnées cylindriques  $\vec{r} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$  et  $\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{u}_z$  :

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp \left\{ -\beta \frac{m}{2} \left[ v_r^2 + \left( v_\theta + \frac{\alpha}{\beta} r \right)^2 + v_z^2 \right] + \frac{m\alpha^2}{2\beta} r^2 \right\}$$

l'expression montre que la composante angulaire de la vitesse est centrée sur  $-\alpha/\beta$ , i.e.  $-\alpha/\beta = \omega$  est identifiée avec la vitesse angulaire moyenne. En effet, en fixant  $\alpha = -\beta\omega$ , on déduit que les molécules à distance  $r$  de l'axe sont caractérisées par  $\overline{v_\theta} = r\omega$ .<sup>2</sup> On peut finalement réécrire la distribution comme

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp -\beta \left\{ \frac{m}{2} (\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r})^2 - \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \right\} \quad (37)$$

où  $\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \omega \vec{u}_z$ . La rotation fait apparaître un potentiel effectif parabolique en  $\vec{r}_\perp$  (potentiel harmonique *inversé*). Par conséquent, les atomes se concentrent sur les bords du cylindres, sous l'effet de la force centrifuge.

De même  $P_\ell^c \propto e^{-\beta(E_\ell - \vec{\omega} \times \vec{J}_\ell)}$  décrit un système en rotation autour de l'axe  $\vec{u}_z$  à vitesse angulaire  $\omega$ .

**Remarque additionnelle :**

Pour que le gaz soit entraîné lorsque le cylindre tourne, il faut bien qu'il y ait des interactions (le gaz ne peut pas être parfait) : les collisions des atomes avec les bords du cylindre transfèrent du moment cinétique au gaz puis le moment est transféré au sein du gaz par les collisions entre atomes.

- 5/ La densité est donnée en intégrant la distribution

$$n(\vec{r}) = N \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}) \propto \exp \left\{ +\beta \frac{m\omega^2}{2} \vec{r}_\perp^2 \right\}$$

<sup>2</sup>rappelons l'expression de la composante orthoradiale de la vitesse en cinématique  $v_\theta(t) = r(t)\dot{\theta}(t)$ .

(potentiel harmonique inversé). La normalisation se calcule facilement : on veut  $\int_V d^3\vec{r} n(\vec{r}) = N$ . On utilise

$$\int_V d^3\vec{r} \exp\left\{\beta\frac{m\omega^2}{2}r_\perp^2\right\} = \int_0^R 2\pi dr_\perp r_\perp \int_0^L dz \exp\left\{\frac{\beta m\omega^2}{2}r_\perp^2\right\} = 2\pi L \frac{1}{\beta m\omega^2} \left(e^{\beta m\omega^2 R^2/2} - 1\right)$$

d'où

$$n(\vec{r}) = \frac{N}{V} \frac{\beta m\omega^2 R^2/2}{e^{\beta m\omega^2 R^2/2} - 1} \exp\left\{+\beta\frac{m\omega^2}{2}r_\perp^2\right\} \quad \text{pour } 0 \leq \|\vec{r}_\perp\| \leq R \quad (38)$$

où  $V = \pi R^2 L$  est le volume du cylindre.

Pour  $m\omega^2 R^2 \ll k_B T$  (rotation lente), on a  $n(\vec{r}) \simeq N/V$  homogène. Pour  $m\omega^2 R^2 \gg k_B T$  (rotation rapide), les atomes se concentrent sur les bords, sur une épaisseur typique  $\delta r_\perp \sim \sqrt{k_B T/(m\omega^2)}$ . Plus les atomes sont lourds ou plus la fréquence augmente et plus ils sont concentrés sur les bords.

- 6/ Les molécules les plus lourdes (avec  $^{238}\text{U}$ ) sont davantage concentrées sur les bords du cylindre. Donc la proportion en  $^{235}\text{U}$  est plus forte au centre et plus faible au bord. On injecte du gaz dans la centrifugeuse et on extrait le gaz au centre ( $\|\vec{r}_\perp\| = 0$ ) légèrement enrichi en  $^{235}\text{U}$ . On le réinjecte dans une autre centrifugeuse (cf. figure) et ainsi on enrichit progressivement le gaz. L'application numérique donne

$$\frac{n_{235}(0)/n_{238}(0)}{n_{235}(R)/n_{238}(R)} = \exp\left\{\frac{m_{238} - m_{235}}{2k_B T} \omega^2 R^2\right\} \simeq \exp 0.00955 \simeq 1.01$$

Cette estimation montre qu'une centrifugeuse permet d'augmenter le rapport de 1%.

Si on utilise  $n$  centrifugeuses en série :

$$\left(\frac{n_{235}}{n_{238}}\right)_{\text{final}} \simeq \left(\frac{n_{235}}{n_{238}}\right)_{\text{initial}} e^{0.00955 n}$$

- Uranium faiblement enrichi pour une centrale : il faut atteindre  $\sim 4\%$  d' $^{235}\text{U}$  ([wikipedia](#)), ce qui requerrait  $n \simeq 186$  centrifugeuses.
- Uranium hautement enrichi pour usage militaire : pour atteindre  $\sim 90\%$  d' $^{235}\text{U}$ , il faudrait  $n \simeq 749$  centrifugeuses.

👉 Pour en savoir plus : L'exercice a été inspiré par l'ouvrage de R. Balian, « From microphysics to macrophysics », vol. I, Springer.

dans le dossier récent de la revue du CNRS « *Reflets de la physique* » (n°60, décembre 2018, p. 10), on trouve qu'il suffit d'une dizaine de centrifugeuses pour atteindre une proportion de  $\sim 4\%$  d' $^{235}\text{U}$ , ce qui montre que  $\frac{m_{238} - m_{235}}{2k_B T} \omega^2 R^2 \simeq 0.177$ , i.e. j'avais sous-estimé  $\omega R$  d'un facteur  $\sim 4.3$ . Il ne faut alors que  $n \sim 40$  centrifugeuses pour obtenir de l'uranium pour usage militaire.